

**MEMORIA FINAL INNOVA<sup>1</sup>**  
**COMPROMISOS Y RESULTADOS PROYECTOS**  
**DE INNOVACIÓN Y MEJORA DOCENTE**  
**2024/2025**

| Identificación del proyecto |                                                                                                                                            |
|-----------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Código                      | sol-202400285077-tra                                                                                                                       |
| Título                      | Creación de un Libro de Problemas Resueltos de Electromagnetismo para la Asignatura "Fundamentos Físicos y Electrónicos de la Informática" |
| Responsable                 | Jose Antonio Vilchez Membrilla                                                                                                             |

1. Describa los resultados obtenidos a la luz de los objetivos y compromisos que adquirió en la solicitud de su proyecto. Incluya tantas tablas como objetivos contempló.

| Objetivo nº 1                                                | <i>Creación de un Recurso Didáctico Integral</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|--------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Actividades que había previsto en la solicitud del proyecto: | <i>Crear un libro con una amplia gama de cuestiones teóricas y de problemas de electromagnetismo y electrónica, clasificados por niveles de dificultad y alineados con el temario de la asignatura.</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| Actividades realizadas y resultados obtenidos:               | <i>Se ha elaborado un libro completo que cubre los contenidos fundamentales de electromagnetismo de la asignatura "Fundamentos Físicos y Electrónicos de la Informática". El material incluye numerosos problemas resueltos paso a paso y cuestiones teóricas distribuidas según los bloques del temario.<br/>Además, se han generado todas las figuras del libro de forma original, adaptándolas a cada problema para garantizar claridad visual.<br/>El libro está finalizado en su contenido y se encuentra en fase de revisión final antes de ser enviado a la editorial de la UCA para su publicación. Durante este curso, se ha utilizado con el alumnado una versión en PDF en formato beta.</i> |

<sup>1</sup> Esta memoria no debe superar las 6 páginas.

| <b>Objetivo nº 2</b>                                         | <b>Implementar Métodos Didácticos Adicionales</b>                                                                                                                                                                                                                                    |
|--------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Actividades que había previsto en la solicitud del proyecto: | <i>Introducir métodos didácticos que complemente a los actuales y faciliten el aprendizaje activo y participativo, fomentando el pensamiento crítico y la resolución de problemas.</i>                                                                                               |
| Actividades realizadas y resultados obtenidos:               | <i>Se ha utilizado el libro como soporte para actividades guiadas en clase, resolución participativa de problemas y posterior trabajo autónomo.<br/>La estructura por niveles de complejidad ha permitido plantear actividades secuenciadas tanto en el aula como fuera de ella.</i> |

| <b>Objetivo nº 3</b>                                         | <b>Optimizar el Aprendizaje y Rendimiento Estudiantil</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|--------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Actividades que había previsto en la solicitud del proyecto: | <i>Proporcionar a los estudiantes una herramienta de estudio adicional que les permita practicar y consolidar sus conocimientos, mejorando así su rendimiento académico en la asignatura.</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| Actividades realizadas y resultados obtenidos:               | <i>El alumnado ha dispuesto de una versión preliminar de los problemas resueltos en el libro.<br/>Se han organizado sesiones de resolución conjunta, permitiendo resolver dudas frecuentes, reforzar conceptos clave y corregir debilidades de los problemas.<br/>Además, el libro incorpora un formulario con las ecuaciones del temario, de manera que el alumnado tiene a su disposición una herramienta útil para la resolución de los ejercicios de manera autónoma.</i> |

| <b>Objetivo nº 4</b>                                         | <b>Generar Recursos Complementarios para el Profesorado</b>                                                                                                                                                                                                                                         |
|--------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Actividades que había previsto en la solicitud del proyecto: | <i>Ofrecer un recurso complementario que pueda ser utilizado por los docentes para enriquecer sus clases y diversificar las actividades de evaluación.</i>                                                                                                                                          |
| Actividades realizadas y resultados obtenidos:               | <i>El libro se ha utilizado como base para proponer problemas en clase y plantear actividades prácticas.<br/>Los docentes implicados en la asignatura disponen ahora de un repositorio estructurado de problemas con soluciones detalladas que facilitan la preparación de materiales docentes.</i> |

| <b>Objetivo nº 5</b>                                         | <b>Fomentar el aprendizaje autodirigido y la participación activa</b>                                                                |
|--------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Actividades que había previsto en la solicitud del proyecto: | <i>Promover el aprendizaje autónomo y la adquisición de competencias genéricas y transversales a través de actividades prácticas</i> |
| Actividades realizadas y resultados obtenidos:               | <i>La distribución de los problemas resueltos ha permitido que los estudiantes organicen su estudio de forma autónoma.</i>           |

Los problemas resueltos paso a paso han funcionado como guía de autoaprendizaje, reforzando la comprensión y el desarrollo de competencias transversales.

- Realice una breve valoración sobre la influencia del proyecto ejecutado en la evolución de las asignaturas implicadas.

### Análisis del impacto de la innovación en las asignaturas relacionadas con el proyecto

La aplicación del libro de problemas ha tenido un impacto positivo en la asignatura *Fundamentos Físicos y Electrónicos de la Informática*. El alumnado (aprox. 250 estudiantes) ha utilizado los problemas resueltos como apoyo principal para el estudio y la resolución de ejercicios, lo que ha favorecido el aprendizaje autónomo y una mejor preparación de las clases y evaluaciones.

Desde el punto de vista docente, el recurso ha permitido estructurar de forma más coherente las actividades prácticas y ha facilitado la planificación y coordinación. Se observa una mayor implicación y seguimiento del alumnado. Se prevé que, tras su publicación, el libro consolide su uso y amplíe su alcance.

Se adjuntan a continuación varias imágenes con la portada del libro y algunas páginas con ejercicios resueltos y formulario del libro:



2.5 Cuestiones 37

3. Al tratarse de una carga distribuida de manera uniforme y dada la simetría del problema, podemos considerar que el campo tiene dirección normal al plano. En nuestro caso, el campo tendrá dirección  $z$  positiva si nos encontramos por encima del plano y negativa si estamos por debajo.

$$\mathbf{E} = \begin{cases} E \hat{k} & \text{si } z > 0 \\ -E \hat{k} & \text{si } z < 0. \end{cases}$$

4. Para calcular el campo eléctrico, dado la simetría del problema, aplicamos ley de Gauss haciendo uso de una superficie gaussiana cilíndrica,  $S$ , con bases paralelas al plano.

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$

5. Vemos que para aplicar la ley de Gauss, tendremos que calcular previamente el flujo eléctrico a través de cada una de las superficies que forman la geometría gaussiana (dos bases y una superficie lateral).

(II) Resolución del problema

En primer lugar, calculamos el flujo eléctrico neto en la superficie gaussiana. Para ello, tengamos en cuenta que:

- la dirección del campo es positiva en  $z$  si estamos por encima del plano,  $\mathbf{E} = E \hat{k}$ , y negativa en  $z$  si estamos por debajo,  $\mathbf{E} = -E \hat{k}$ .
- las superficies de las dos bases del cilindro son iguales,  $S_1 = S_2 = S$ .

$$dS_1 = dS_2 \hat{k} \Rightarrow \Phi_1 = \int_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_1 = E \int_{S_1} dS_1 = ES,$$

164 Capítulo 7. Campo Magnético

**Cuestión 7.10 — Campo magnético espira circular.** Considere una espira circular de radio  $a$  por la que circula una corriente  $I$ . Determine, mediante la ley de Biot-Savart, la expresión del campo magnético creado por la espira en su centro.

**Solución:**

(I) **Análisis del problema**

1. Ley de Biot-Savart, ecuación (7.5):

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

2. En la figura podemos observar que el campo magnético en el centro de la espira es paralelo al eje  $z$ .

$$\mathbf{B} = B \hat{k}$$

3. Todos los vectores  $d\mathbf{l}$  que se cojan en la espira serán perpendiculares ( $\theta = 90^\circ$ ) al vector posición  $\mathbf{r}$ , por tanto:

$$d\mathbf{l} \times \mathbf{r} = dl \sin 90^\circ \hat{k} = dl \hat{k}$$

4. Para cualquier vector  $d\mathbf{l}$ , el módulo del vector posición coincide con el radio de la espira:

$$r = a$$

(II) **Resolución del problema**

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dl \hat{k}}{a^3} \hat{k} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^3} \int dl \hat{k} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^3} \int_0^{2\pi a} dl \hat{k} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^3} 2\pi a \hat{k} = \frac{\mu_0 I}{2a} \hat{k}$$

**Sol.** El campo magnético creado por una espira circular de radio  $a$  en su centro es

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2a} \hat{k}$$

**Cuestión 7.11 — Campo magnético de un conductor cilíndrico.** Considere un conductor cilíndrico de radio  $a$  y longitud  $L \gg a$  por el que circula una corriente

**Formulario de ecuaciones**

**1. Campo Eléctrico**

- Cuantización de la carga:  $q = Ze$  (1.1)
- Ley de Coulomb (Magnitud):  $|\mathbf{F}_{12}| = F_{12} = k \frac{|q_1||q_2|}{r^2}$  (1.2)
- Relación  $k - \epsilon_0$ :  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$  (1.3)
- Ley de Coulomb:  $\mathbf{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{12}$  (1.4)
- Campo eléctrico:  $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}$  (1.5)
- Campo eléctrico dist. de carga:  $\mathbf{E} = \int \frac{k dq}{r^2} \hat{r}$  (1.9)
- Distribución volumétrica:  $dq = \rho dV$  (1.10)
- Distribución superficial:  $dq = \sigma dS$  (1.12)
- Distribución lineal:  $dq = \lambda dL$  (1.14)

**2. Ley de Gauss**

- Flujo eléctrico:  $\Phi_E = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$  (2.1)
- Ley de Gauss:  $\Phi_E = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}$  (2.3)

**3. Potencial Eléctrico**

- Trabajo fuerza eléctrica:  $W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$  (3.1)
- Diferencia de energía potencial:  $\Delta U = -q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$  (3.2)
- Diferencia de potencial:  $\Delta V = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$  (3.3)
- Potencial dist. de carga:  $V = k \int \frac{dq}{r}$  (3.8)

3. Incluya en la siguiente tabla el número de alumnado matriculado y el de respuestas recibidas en cada opción y realice una valoración crítica sobre la influencia que el proyecto ha ejercido en la opinión del alumnado.

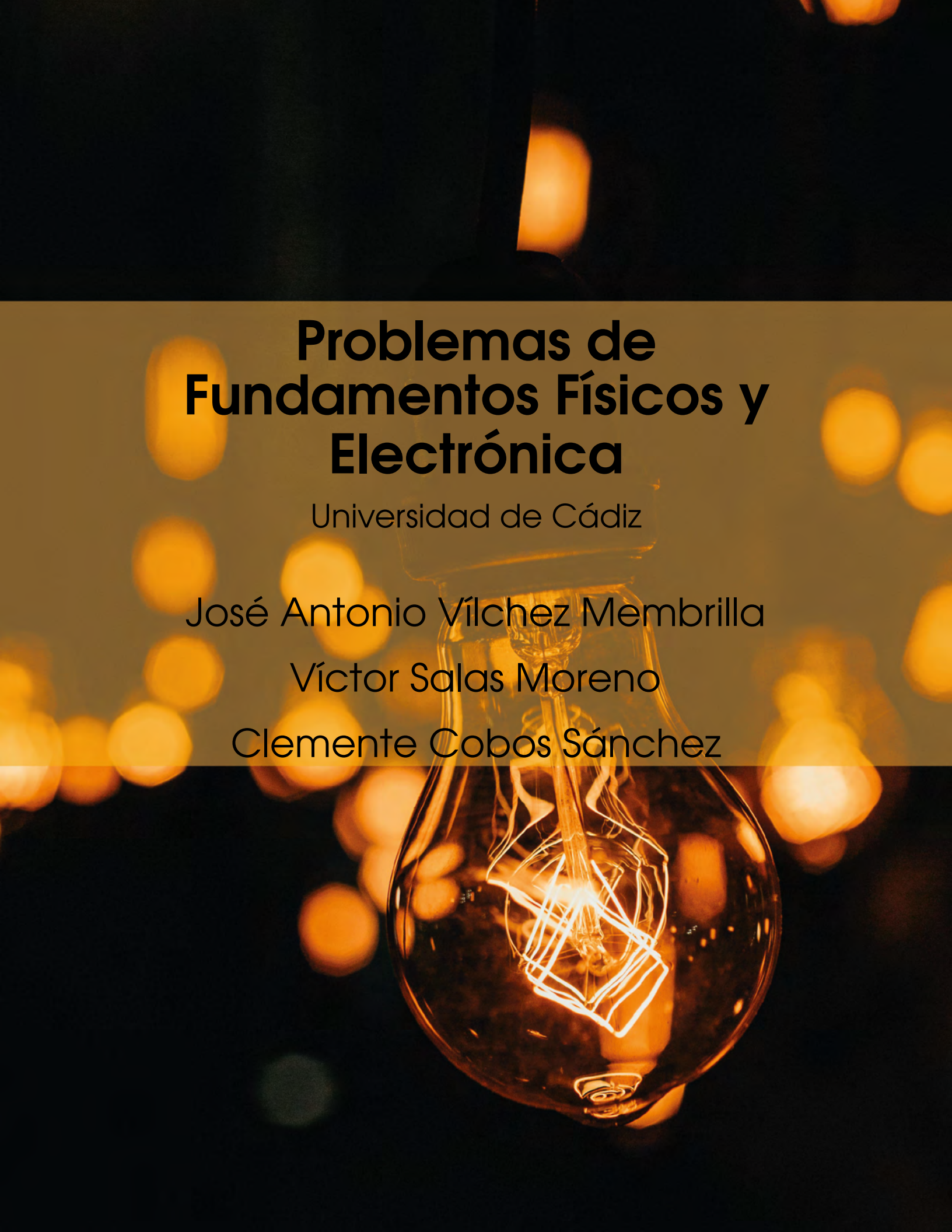
| Opinión del alumnado al inicio del proyecto                                                                                                                                                                                  |                 |                                |                     |                          |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|--------------------------------|---------------------|--------------------------|
| Número de alumnado matriculado: 250                                                                                                                                                                                          |                 |                                |                     |                          |
| Valoración del grado de dificultad <b>que cree que va a tener</b> en la comprensión de los contenidos y/o en la adquisición de competencias asociadas a la asignatura en la que se enmarca el proyecto de innovación docente |                 |                                |                     |                          |
| Ninguna dificultad                                                                                                                                                                                                           | Poca dificultad | Dificultad media               | Bastante dificultad | Mucha dificultad         |
|                                                                                                                                                                                                                              |                 |                                |                     | X                        |
| Opinión del alumnado en la etapa final del proyecto                                                                                                                                                                          |                 |                                |                     |                          |
| Valoración del grado de dificultad <b>que ha tenido</b> en la comprensión de los contenidos y/o en la adquisición de competencias asociadas a la asignatura en la que se enmarca el proyecto de innovación docente           |                 |                                |                     |                          |
| Ninguna dificultad                                                                                                                                                                                                           | Poca dificultad | Dificultad media               | Bastante dificultad | Mucha dificultad         |
|                                                                                                                                                                                                                              |                 |                                | X                   |                          |
| Los elementos de innovación y mejora docente aplicados en esta asignatura han favorecido mi comprensión de los contenidos y/o la adquisición de competencias asociadas a la asignatura                                       |                 |                                |                     |                          |
| Nada de acuerdo                                                                                                                                                                                                              | Poco de acuerdo | Ni en acuerdo ni en desacuerdo | Muy de acuerdo      | Completamente de acuerdo |
|                                                                                                                                                                                                                              |                 |                                | X                   |                          |
| En el caso de la participación de profesorado invitado                                                                                                                                                                       |                 |                                |                     |                          |
| La participación del profesorado invitado ha supuesto un gran beneficio en mi formación                                                                                                                                      |                 |                                |                     |                          |
| Nada de acuerdo                                                                                                                                                                                                              | Poco de acuerdo | Ni en acuerdo ni en desacuerdo | Muy de acuerdo      | Completamente de acuerdo |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |  |  |  |  |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|--|--|--|
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |  |  |  |  |
| <b>Valoración crítica sobre la influencia que ha ejercido el proyecto en la opinión del alumnado</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |  |  |  |  |
| <p>La percepción del alumnado ha sido positiva, destacando los siguientes aspectos:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Claridad en la exposición de los problemas.</li> <li>• Utilidad de las soluciones detalladas para estudiar de forma autónoma.</li> <li>• Mejora de la seguridad para afrontar exámenes y prácticas.</li> <li>• Valor añadido de las figuras creadas específicamente para los enunciados.</li> </ul> |  |  |  |  |

4. Describa las medidas de difusión a las que se comprometió en la solicitud y las que ha llevado a cabo<sup>2</sup>.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Descripción de las medidas comprometidas en la solicitud</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| Jornadas de Innovación Docente de la Universidad de Cádiz.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| <b>Descripción de las medidas que se han llevado a cabo</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| <p>La difusión se ha realizado de las siguientes formas:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Distribución de los problemas resueltos en las sesiones prácticas.</li> <li>• Comunicación informal con otros docentes del área interesados en el recurso.</li> <li>• Previsión de presentar los resultados en próximas jornadas de innovación docente de la Universidad.</li> <li>• Una vez finalizada la revisión, el libro será enviado a una editorial para su publicación, lo que permitirá su difusión institucional y académica.</li> </ul> |

<sup>2</sup> Si en la solicitud no indicó compromiso de difusión de resultados, este criterio no se tendrá en cuenta en la evaluación.



# **Problemas de Fundamentos Físicos y Electrónica**

Universidad de Cádiz

José Antonio Vílchez Membrilla

Víctor Salas Moreno

Clemente Cobos Sánchez



UNIVERSIDAD DE CÁDIZ

*Primera Edición, Septiembre 2024*



# Unidades y Constantes Físicas

## Unidades Físicas

| Nombre         | Símbolo  | Magnitud               | Unidades base SI               |
|----------------|----------|------------------------|--------------------------------|
| Amperio        | A        | Corriente Eléctrica    | A                              |
| Coulombio      | C        | Carga Eléctrica        | A s                            |
| Faradio        | F        | Capacidad              | $A^2 s^4 kg^{-1} m^{-2}$       |
| Gauss          | G        | Campo magnético        | $10^{-4} kg s^{-2} A^{-1}$     |
| Grado          | °        | Ángulo Plano           | $\frac{\pi}{180}$ rad          |
| Henrio         | H        | Inductancia            | $kg m^2 s^{-2} A^{-2}$         |
| Herzio         | Hz       | Frecuencia             | $s^{-1}$                       |
| Julio          | J        | Energía y Trabajo      | $kg m^2 s^{-2}$                |
| Kilovatio-hora | kWh      | Energía                | $3.6 \cdot 10^6 kg m^2 s^{-2}$ |
| Newton         | N        | Fuerza                 | $kg m s^{-2}$                  |
| Ohmio          | $\Omega$ | Resistencia Eléctrica  | $kg m^2 s^{-3} A^{-2}$         |
| Radián         | rad      | Ángulo Plano           | rad                            |
| Siemens        | S        | Conductancia Eléctrica | $kg^{-1} m^{-2} s^3 A^2$       |
| Tesla          | T        | Campo magnético        | $kg s^{-2} A^{-1}$             |
| Vatio          | W        | Potencia               | $kg m^2 s^{-3}$                |
| Voltio         | V        | Potencial Eléctrico    | $kg m^2 s^{-3} A^{-1}$         |

## Constantes Físicas

| Nombre              | Símbolo        | Valor                  | Unidades                                       | Unidades SI                                       |
|---------------------|----------------|------------------------|------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| Carga electrón      | $q_e \equiv e$ | $-1.6 \cdot 10^{-19}$  | C                                              | A s                                               |
| Carga protón        | $q_p \equiv p$ | $1.6 \cdot 10^{-19}$   | C                                              | A s                                               |
| Constante Coulomb   | $k$            | $8.987 \cdot 10^9$     | N m <sup>2</sup> C <sup>-2</sup>               | kg m <sup>3</sup> A <sup>-2</sup> s <sup>-4</sup> |
| Masa electrón       | $m_e$          | $9.109 \cdot 10^{-31}$ | kg                                             |                                                   |
| Masa protón         | $m_p$          | $1.673 \cdot 10^{-27}$ | kg                                             |                                                   |
| Masa neutrón        | $m_n$          | $1.675 \cdot 10^{-27}$ | kg                                             |                                                   |
| Permeabilidad vacío | $\mu_0$        | $4\pi \cdot 10^{-7}$   | N · A <sup>-2</sup>                            | kg · m · s <sup>-2</sup> · A <sup>-2</sup>        |
| Permitividad vacío  | $\epsilon_0$   | $8.854 \cdot 10^{-12}$ | C <sup>2</sup> N <sup>-1</sup> m <sup>-2</sup> | A <sup>2</sup> s <sup>-4</sup> kg m <sup>3</sup>  |



# Notación

## Variables Vectoriales

|                             |                                                                                                                                                                                              |
|-----------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\mathbf{r}$                | Vector de la variable $r$ . Comúnmente representado como $\vec{r}$ .                                                                                                                         |
| $r$                         | Módulo del vector $\mathbf{r}$ . Comúnmente representado como $ \vec{r} $ .                                                                                                                  |
| $\hat{r}$                   | Vector unitario de la variable $r$ .                                                                                                                                                         |
| $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ | Vectores unitarios cartesianos con direcciones $x, y, z$ , respectivamente.                                                                                                                  |
| $d\mathbf{r}$               | Elemento diferencial de posición.<br>Usualmente, $d\mathbf{r} = dx_i \hat{r}_i$ con $dx_i = dx, dy, dz$ y $\hat{r}_i = \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ .                                          |
| $d\mathbf{l}$               | Vector diferencial de longitud.                                                                                                                                                              |
| $d\mathbf{S}$               | Vector diferencial de superficie.                                                                                                                                                            |
| $\nabla V$                  | Gradiente del campo escalar $V \rightarrow \nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k}\right)$ . |

## Integrales

|              |                                                                                |                        |                                          |
|--------------|--------------------------------------------------------------------------------|------------------------|------------------------------------------|
| $\int_L dl$  | $\left(= \int_{x_i} dx_i\right)$                                               | Integral de línea      |                                          |
| $\int_S dS$  | $\left(= \iint_S dS = \int_{x_i} \int_{x_j} dx_i dx_j\right)$                  | Integral de superficie | $(dx_i, dx_j, dx_k =$<br>$= dx, dy, dz)$ |
| $\int_V dV$  | $\left(= \iiint_V dV = \int_{x_i} \int_{x_j} \int_{x_k} dx_i dx_j dx_k\right)$ | Integral de volumen    |                                          |
| $\oint_C dC$ | Integral cerrada en el camino o superficie $C$ .                               |                        |                                          |

## Variable Real

|              |                                    |
|--------------|------------------------------------|
| $\mathbb{N}$ | Conjunto de los números naturales. |
| $\mathbb{Z}$ | Conjunto de los números enteros.   |
| $\mathbb{R}$ | Conjunto de los números reales.    |

## Variable Compleja

|              |                                    |
|--------------|------------------------------------|
| $\mathbb{C}$ | Conjunto de los números complejos. |
|--------------|------------------------------------|



# Tablas

## Longitud, Área, Volumen

|                        | Longitud | Área                 | Volumen              |
|------------------------|----------|----------------------|----------------------|
| Esfera                 |          | $4\pi r^2$           | $\frac{4}{3}\pi r^3$ |
| Círculo-Circunferencia | $2\pi r$ | $\pi r^2$            |                      |
| Cilindro               |          | $2\pi r^2 + 2\pi rh$ | $\pi r^2 h$          |



# Índice general

|                                                                  |            |
|------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Símbolos y Constantes Físicas</b>                             | <b>V</b>   |
| <b>Notación</b>                                                  | <b>VII</b> |
| <b>Tablas</b>                                                    | <b>IX</b>  |
| <b>1 Campo Eléctrico</b>                                         | <b>1</b>   |
| 1.1 Carga atómica                                                | 1          |
| 1.1.1 Clasificación de los materiales                            | 2          |
| 1.2 Fuerza Eléctrica - Ley de Coulomb                            | 2          |
| 1.3 Campo eléctrico                                              | 4          |
| 1.3.1 Campo eléctrico producido por una carga puntual            | 5          |
| 1.3.2 Campo eléctrico debido a distribuciones continuas de carga | 5          |
| 1.4 Cuestiones                                                   | 8          |
| 1.5 Problemas                                                    | 16         |
| <b>2 Ley de Gauss</b>                                            | <b>29</b>  |
| 2.1 Líneas de campo eléctrico                                    | 29         |
| 2.2 Flujo eléctrico                                              | 29         |
| 2.3 Ley de Gauss                                                 | 30         |
| 2.4 Conductor en equilibrio electrostático                       | 30         |
| 2.5 Cuestiones                                                   | 31         |
| 2.6 Problemas                                                    | 44         |
| <b>3 Potencial Eléctrico</b>                                     | <b>47</b>  |
| 3.1 Energía potencial eléctrica                                  | 47         |
| 3.2 Diferencia de potencial                                      | 48         |
| 3.2.1 Potencial de una carga puntual                             | 48         |
| 3.2.2 Potencial de distribución de carga                         | 49         |
| 3.3 Campo eléctrico y potencial                                  | 49         |
| 3.4 Cuestiones                                                   | 50         |
| 3.5 Problemas                                                    | 56         |

---

|          |                                                  |            |
|----------|--------------------------------------------------|------------|
| <b>4</b> | <b>Corriente Eléctrica .....</b>                 | <b>67</b>  |
| 4.1      | Corriente eléctrica                              | 67         |
| 4.2      | Resistencia eléctrica                            | 68         |
| 4.3      | Potencia eléctrica                               | 69         |
| 4.4      | Resistencia en circuitos eléctricos              | 70         |
| 4.5      | Cuestiones                                       | 71         |
| 4.6      | Problemas                                        | 74         |
| <br>     |                                                  |            |
| <b>5</b> | <b>Circuitos de Corriente Continua .....</b>     | <b>81</b>  |
| 5.1      | Circuito eléctrico                               | 81         |
| 5.2      | Componentes activos de un circuito               | 81         |
| 5.2.1    | Fuentes de tensión                               | 82         |
| 5.2.2    | Fuentes de corriente                             | 82         |
| 5.2.3    | Fuentes dependientes                             | 83         |
| 5.3      | Componentes pasivos de un circuito. Resistencias | 84         |
| 5.4      | Otros elementos frecuentes en un circuito        | 84         |
| 5.5      | Potencia. Referencia de signos                   | 85         |
| 5.6      | Análisis de circuitos eléctricos                 | 85         |
| 5.6.1    | Reglas de Kirchhoff                              | 86         |
| 5.6.2    | Teorema de Thévenin                              | 87         |
| 5.6.3    | Teorema de Norton                                | 87         |
| 5.7      | Cuestiones                                       | 89         |
| 5.8      | Problemas                                        | 105        |
| <br>     |                                                  |            |
| <b>6</b> | <b>Condensadores .....</b>                       | <b>125</b> |
| 6.1      | Capacidad                                        | 125        |
| 6.2      | Energía almacenada en un condensador             | 126        |
| 6.3      | Asociaciones de condensadores                    | 126        |
| 6.4      | Circuito RC                                      | 127        |
| 6.5      | Cuestiones                                       | 129        |
| 6.6      | Problemas                                        | 141        |

---

|          |                                                |            |
|----------|------------------------------------------------|------------|
| <b>7</b> | <b>Campo Magnético .....</b>                   | <b>151</b> |
| 7.1      | Introducción                                   | 151        |
| 7.2      | Ley de Lorentz                                 | 151        |
| 7.3      | Líneas de campo magnético                      | 152        |
| 7.4      | Campo magnético                                | 152        |
| 7.5      | Circulación de campo magnético                 | 153        |
| 7.6      | Ley de Ampère                                  | 153        |
| 7.7      | Ley de Gauss del Magnetismo                    | 154        |
| 7.8      | Electromagnetismo en la materia                | 155        |
| 7.9      | Cuestiones                                     | 156        |
| 7.10     | Problemas                                      | 169        |
| <br>     |                                                |            |
| <b>8</b> | <b>Inducción Magnética .....</b>               | <b>179</b> |
| 8.1      | Introducción                                   | 179        |
| 8.2      | Ley de Faraday-Lenz                            | 179        |
| 8.3      | Campo eléctrico inducido                       | 180        |
| 8.4      | Autoinducción e inductancia                    | 180        |
| 8.5      | Energía en un campo magnético                  | 181        |
| 8.6      | Circuito <i>RL</i>                             | 181        |
| 8.7      | Cuestiones                                     | 182        |
| 8.8      | Problemas                                      | 192        |
| <br>     |                                                |            |
| <b>9</b> | <b>Circuitos de Corriente Alterna .....</b>    | <b>201</b> |
| 9.1      | Señales Alternas                               | 201        |
| 9.2      | Componentes pasivos en circuitos AC            | 203        |
| 9.2.1    | Resistencias en circuitos AC                   | 203        |
| 9.2.2    | Inductores en circuitos AC                     | 204        |
| 9.2.3    | Condensadores en circuitos AC                  | 204        |
| 9.3      | Potencia                                       | 205        |
| 9.4      | Fasores. Representación compleja de señales AC | 206        |
| 9.5      | Impedancias                                    | 207        |
| 9.6      | Circuito <i>RLC</i>                            | 208        |

|                                |               |     |
|--------------------------------|---------------|-----|
| 9.7                            | Transformador | 208 |
| 9.8                            | Cuestiones    | 209 |
| 9.9                            | Problemas     | 225 |
| Repaso matemático .....        |               | 241 |
| Formulario de ecuaciones ..... |               | 243 |

- 1.1 Carga atómica
- 1.2 Fuerza Eléctrica - Ley de Coulomb
- 1.3 Campo eléctrico
- 1.4 Cuestiones
- 1.5 Problemas



# 1. Campo Eléctrico

## 1.1 Carga atómica

La materia está constituida por átomos, que a su vez están formados por **protones** (p), **electrones** (e) y **neutrones** (n). Los electrones se encuentran en la corteza atómica orbitando al núcleo, el cual está formado por protones y neutrones. Existen dos propiedades que caracterizan al núcleo atómico:

### Número atómico, $Z$

Cuantifica el número de protones presentes en el núcleo de un átomo,  $Z = p$ .

### Número másico, $A$

Cuantifica el número de protones y neutrones presentes en el núcleo de un átomo,  $A = p + n$ .

Protones, electrones y neutrones tienen masa, siendo la de los electrones mucho menor que la de los protones y neutrones, Tabla 1.1.

Tabla 1.1: Carga eléctrica y masa de los electrones, protones y neutrones.

| Partícula        | Carga (C)             | Masa (kg)               |
|------------------|-----------------------|-------------------------|
| Electrón ( $e$ ) | $-1.6 \cdot 10^{-19}$ | $9.1093 \cdot 10^{-31}$ |
| Protón ( $p$ )   | $1.6 \cdot 10^{-19}$  | $1.6726 \cdot 10^{-27}$ |
| Neutrón ( $n$ )  | 0                     | $1.6749 \cdot 10^{-27}$ |

Además, protones y electrones presentan otra propiedad fundamental e intrínseca denominada **carga eléctrica**, con las siguientes características:

## Polaridad de la carga

La carga eléctrica se presenta en dos estados, **positiva** y **negativa**, asociados a protones y electrones, respectivamente. Cargas del mismo signo se repelen mientras que cargas de signos contrarios se atraen. Así pues, los protones repelen a otros protones y atraen a electrones de igual manera que los electrones repelen a otros electrones y atraen a protones. Los neutrones carecen de carga, como su propio nombre indica, así que los protones o los electrones no ejercen atracción o repulsión eléctrica sobre ellos.

## Conservación de la carga

La suma algebraica de todas las cargas eléctricas en cualquier sistema cerrado es constante.

## Cuantización de la carga

La carga eléctrica siempre se presenta como un entero múltiplo de una cantidad básica de carga del electrón.

$$q = ze, \quad z \in \mathbb{Z} \quad (1.1)$$

### 1.1.1 Clasificación de los materiales

En función de la facilidad que tienen los electrones de moverse a través de los materiales, es común clasificar a los materiales como:

**Conductores:** en ellos parte de los electrones de valencia pueden moverse libremente a en el seno del material. Ejemplos de este tipo de materiales son los metales.

**Aislantes:** Materiales en los que los electrones están muy ligados a los átomos próximos y ninguno puede moverse libremente. Ejemplos de aislantes son la madera o el vidrio.

**Semiconductores:** se caracterizan porque la facilidad con que se mueven los electrones a través de ellos puede variar. Materiales semiconductores son el Silicio o Germanio.

## 1.2 Fuerza Eléctrica - Ley de Coulomb

La atracción o repulsión que sienten los materiales cargados evidencia la existencia de una fuerza de origen eléctrico, que se puede caracterizar a partir de las conclusiones que se presentan a continuación.

La fuerza eléctrica que se establece entre dos cargas puntuales<sup>1</sup>  $q_1$  y  $q_2$ :

- Es atractiva si las cargas son de signo opuesto y repulsiva si las cargas tienen el mismo signo. *Sentido de la fuerza.*
- Tiene una dirección que viene determinada por la recta que une ambas cargas. *Dirección de la fuerza.*
- Tiene una magnitud que es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa y directamente proporcional al producto de las cargas. *Módulo o magnitud de la fuerza.*<sup>2</sup>

$$|\mathbf{F}_{12}| = F_{12} = k \frac{|q_1||q_2|}{r^2}, \quad (1.2)$$

donde  $F_{12}$  es la fuerza que ejerce  $q_1$  sobre  $q_2$ ,  $r$  es la distancia que separa ambas cargas y  $k$  es la conocida como **constante de Coulomb**<sup>3</sup> y esta relacionada con la **permitividad del vacío**<sup>4</sup>,  $\varepsilon_0$ , a través de la siguiente relación:

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}. \quad (1.3)$$

## Ley de Coulomb

Las conclusiones anteriores son conocidas como la **ley de Coulomb**, la cual se puede generalizar en forma vectorial como

$$\mathbf{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^3} \mathbf{r}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}_{12}, \quad (1.4)$$

donde  $\mathbf{r}_{12}$  es el vector que define la posición de  $q_2$  respecto de  $q_1$  y  $\hat{\mathbf{r}}_{12}$  es el vector unitario ( $|\hat{\mathbf{r}}_{12}| = 1$ ) en esa dirección, o lo que es lo mismo, es el vector unitario dirigido de  $q_1$  hacia  $q_2$ .

⚠ Al igual que la carga  $q_1$  ejerce una fuerza,  $\mathbf{F}_{12}$ , sobre la carga  $q_2$ , esta segunda carga  $q_2$  ejercerá una fuerza,  $\mathbf{F}_{21}$ , sobre la carga  $q_1$ . Estas dos fuerzas obedecen la tercera ley de Newton; siempre tienen la misma magnitud y sentido opuesto.

## Principio de superposición de las fuerzas eléctricas

La fuerza sobre una carga puntual en reposo  $q$  debida a  $n$  cargas puntuales  $q_1, q_2, \dots, q_n$  también fijas y actuando simultáneamente, es igual a la suma vectorial de las fuerzas ejercidas por cada una de ellas actuando por separado como si las demás no existiesen.

<sup>1</sup>El término carga puntual hace referencia a una cantidad de carga eléctrica concentrada en un solo punto o a una partícula con carga de tamaño cero. Electrones y protones se pueden aproximar bastante bien a cargas puntuales

<sup>2</sup> $|\mathbf{F}|$  y  $F$  son dos maneras equivalentes de denotar el módulo o magnitud de una fuerza.

<sup>3</sup> $k \approx 8.987 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$

<sup>4</sup> $\varepsilon_0 \approx 8.8542 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$

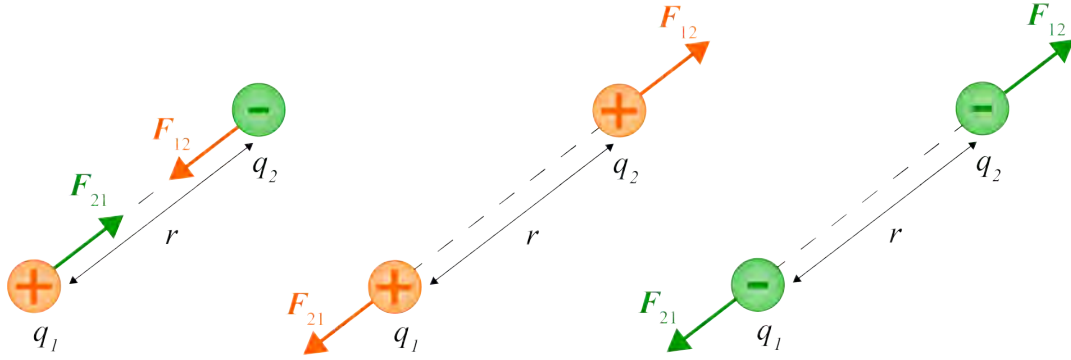


Figura 1.1: La fuerza existente entre cargas del mismo signo es atractiva. Si las cargas tienen igual signo, la fuerza será repulsiva.

$$\mathbf{F} = \sum_i^n \mathbf{F}_i = \sum_i^n k \frac{q_i q}{r_i^2} \hat{r}_i = kq \sum_i^n \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i = kq \sum_i^n \frac{q_i}{r_i^3} \mathbf{r}_i \quad (1.5)$$

donde  $\mathbf{F}_i$  es la fuerza que realiza la carga  $q_i$  sobre  $q$ ,  $\mathbf{r}_i$  es el vector que define la posición de  $q$  respecto de  $q_i$ ,  $r_i$  es la distancia entre  $q$  y la carga  $q_i$ , y  $\hat{r}_i$  el vector unitario dirigido de  $q_i$  hacia  $q$ .

### 1.3 Campo eléctrico

Toda carga eléctrica genera un campo eléctrico en el espacio que la rodea. Así se dice que una carga fuente<sup>5</sup>,  $q_0$ , crea un campo eléctrico,  $\mathbf{E}$ , en un punto,  $P$ , del espacio, si sobre una carga testigo<sup>6</sup>,  $q$ , colocada en dicho punto, se ejerce una fuerza de origen eléctrico,  $\mathbf{F}$ , tal que

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}.$$

Así podemos definir el **campo eléctrico**,  $\mathbf{E}$ , en un punto del espacio como la fuerza eléctrica que experimenta una carga de prueba  $q$  en dicho punto, dividida entre el valor de dicha carga  $q$ :

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}. \quad (1.6)$$

La unidad de campo eléctrico en el *SI* es igual a unidad de fuerza dividida por unidad de carga, es decir newton dividido por culombio, N/C.

<sup>5</sup>Llamamos carga fuente a la carga eléctrica que genera un campo eléctrico en el espacio.

<sup>6</sup>Llamamos carga testigo a la carga que experimenta el campo eléctrico y desarrolla una fuerza eléctrica como resultado.

⚠ El campo eléctrico es un vector con igual dirección que la fuerza eléctrica. Su sentido será igual al de la fuerza si la carga testigo es positiva y opuesto si esta es negativa.

### 1.3.1 Campo eléctrico producido por una carga puntual

El campo eléctrico producido por una carga puntual,  $q_0$ , en un punto del espacio,  $P$ , puede calcularse a partir de la Ley de Coulomb. Supongamos que se sitúa una carga testigo,  $q$ , en dicho punto. Esta carga sentirá una fuerza eléctrica que se puede calcular a partir de la ecuación (1.4):

$$\mathbf{F} = k \frac{q_0 q}{r^2} \hat{r},$$

siendo  $r$  el módulo del vector que apunta de  $q_0$  a  $q$  y  $\hat{r}$  su vector unitario. Usando ahora la ecuación (1.6) es directo obtener el campo eléctrico producido por la carga puntual,  $q_0$ , en el punto  $P$ :

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q} = k \frac{q_0 q}{qr^2} \hat{r} = k \frac{q_0}{r^2} \hat{r}. \quad (1.7)$$

⚠ El campo eléctrico creado por una carga puntual positiva tiene sentido saliente de la carga, mientras que el creado por una negativa es entrante hacia la carga.

### Principio de superposición de campos eléctricos

Al igual que en el caso de las fuerzas eléctricas, se cumple que el campo debido a  $n$  cargas puntuales  $q_1, q_2, \dots, q_n$  en reposo y actuando simultáneamente sobre el punto  $P$ , es igual a la suma vectorial de los campos generados por cada una de ellas actuando por separado como si las demás no existiesen.

$$\mathbf{E} = \sum_i^n \mathbf{E}_i = k \sum_i^n \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i, \quad (1.8)$$

donde  $\mathbf{E}_i$  es el campo creado por la carga  $q_i$ ,  $r_i$  es la distancia entre  $q_i$  y el punto  $P$ , y  $\hat{r}_i$  el vector unitario en esa dirección.

### 1.3.2 Campo eléctrico debido a distribuciones continuas de carga

Si la carga eléctrica total,  $q_{tot}$ , se distribuye en un cuerpo, el campo eléctrico se calculará a partir de la siguiente expresión:

$$\mathbf{E} = \int_C k \frac{dq}{r^2} \hat{r}. \quad (1.9)$$

donde  $C$  hace referencia a que se integra en el cuerpo cargado,  $dq$  es el elemento diferencial de carga,  $r$  es la distancia del elemento diferencial de carga al punto donde se calcula el campo y  $\hat{r}$  su vector unitario.

Para calcular el elemento diferencial de carga, se distinguen lo siguientes casos:

### Carga volumétrica

Se define el elemento diferencial de carga como

$$dq = \rho dV, \quad (1.10)$$

donde  $\rho = q_{tot}/V$  es la densidad volumétrica de carga medida en culombios por metro cúbico, C/m<sup>3</sup>.

El campo eléctrico total producido por dicha distribución podrá calcularse a partir de la expresión (1.9) usando el elemento diferencial de carga (1.10):

$$\mathbf{E} = \int_V k \frac{\rho}{r^2} dV \hat{r}. \quad (1.11)$$

### Carga superficial

Se define el elemento diferencial de carga como

$$dq = \sigma dS, \quad (1.12)$$

donde  $\sigma = q_{tot}/S$  es la densidad superficial de carga medida en culombios por metro cúbico, C/m<sup>2</sup>.

El campo eléctrico total producido por dicha distribución podrá calcularse a partir de la expresión (1.9) usando el elemento diferencial de carga (1.12):

$$\mathbf{E} = \int_S k \frac{\sigma}{r^2} dS \hat{r}. \quad (1.13)$$

### Carga lineal

Se define el elemento diferencial de carga como

$$dq = \lambda dL, \quad (1.14)$$

donde  $\lambda = q_{tot}/L$  es la densidad volumétrica de carga medida en culombios por metro cúbico, C/m.

El campo eléctrico total producido por dicha distribución podrá calcularse a partir de la expresión (1.9) usando el elemento diferencial de carga (1.14):

$$\mathbf{E} = \int_L k \frac{\lambda}{r^2} dL \hat{r}. \quad (1.15)$$

## 1.4 Cuestiones

### Carga atómica

**Cuestión 1.1 — Culombio de carga.** ¿Cuántos electrones hay en un culombio de carga negativa?

*Solución:*

Se pide cuantos electrones se necesitan para obtener un culombio negativo de carga ( $q = -1 \text{ C}$ ). Sabiendo que la carga del electrón es  $e = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  y que la carga está cuantizada (ecuación 1.1):

$$q = ze, \quad (z \in \mathbb{Z}) \quad \Rightarrow \quad z = \frac{q}{e} = 6.25 \cdot 10^{18} \text{ electrones}$$

**Sol** Hay  $6.25 \cdot 10^{18}$  electrones en un culombio de carga negativa.

**Cuestión 1.2 — The Big Bang Problem.** Howard, un ingeniero, y Sheldon, un físico teórico, han descubierto una nueva molécula, el *pacheconio*. Tras los cálculos pertinentes, Howard, dice que la carga eléctrica de esta molécula es de  $2.0 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ . Sheldon, afirma que ese dato es incorrecto, y que la carga eléctrica de la nueva molécula es de  $3.2 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ . ¿Quién no tiene razón?

Denominaremos como  $q_H$  a la carga predicha por Howard y  $q_S$  a la carga propuesta por Sheldon.

Como sabemos, una de las propiedades de la carga eléctrica es que está cuantizada. Por tanto, cualquier carga,  $q$ , observable debe ser siempre múltiplo entero de la unidad natural de carga, ecuación (1.1).

Teniendo en cuenta esta propiedad, podemos comprobar cual de los dos valores es múltiplo entero de la unidad natural de carga.

$$(\text{Howard}) \quad q_H = z_H e \quad \Rightarrow \quad z_H = \frac{q_H}{e} = \frac{2.0 \cdot 10^{-19} \text{ C}}{-1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = -1.3 \notin \mathbb{Z}$$

$$(\text{Sheldon}) \quad q_S = z_S e \quad \Rightarrow \quad z_S = \frac{q_S}{e} = \frac{3.2 \cdot 10^{-19} \text{ C}}{-1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = -2 \in \mathbb{Z}$$

**Sol** El ingeniero Howard está equivocado ya que la carga está cuantizada. Sheldon tiene razón.

## Fuerza eléctrica - Ley de Coulomb

**Cuestión 1.3 — Convención de signos.** Si la convención de signos para las cargas eléctricas se cambiase de manera que el protón tuviese carga negativa y el electrón positiva, ¿cómo afectaría esto a la ley de Coulomb?

*Solución:*

Según la ley de Coulomb, la fuerza que ejerce una carga  $q_1$  sobre otra  $q_2$  se calcula a partir de la ecuación (1.4):

$$\mathbf{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{12}$$

Si se cambia la convención de signos, podemos definir las nuevas cargas como

$$\begin{cases} q'_1 &= -q_1 \\ q'_2 &= -q_2 \end{cases}$$

Teniendo en cuenta el nuevo criterio para las cargas eléctricas podemos calcular la fuerza siguiendo la ley de Coulomb como:

$$\mathbf{F}'_{12} = k \frac{q'_1 q'_2}{r^2} \hat{r}_{12} = k \frac{(-q_1)(-q_2)}{r^2} \hat{r}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{12} = \mathbf{F}_{12}.$$

**Sol** La ley de Coulomb es independiente del criterio de signos.

**Cuestión 1.4 — Interacción eléctrica entre esferas cargadas.** Considere la interacción entre dos esferas idénticas cargadas con igual carga  $q$ , siendo su radio mucho menor que la distancia que las separa. Si quitamos una cantidad de carga  $\Delta q$  de una esfera y la añadimos a la segunda esfera, ¿cómo es la magnitud de la nueva fuerza electrostática: menor, mayor o igual que la anterior?

*Solución:*

Dado que el radio de las esferas cargadas es mucho menor que la distancia que las separa podemos asumir que trabajamos con cargas puntuales. De esta forma, podemos obtener el valor de la magnitud de la fuerza electrostática a partir de la ley de Coulomb, ecuación (1.2). En el primer caso, tenemos dos esferas (para nosotros cargas puntuales) de igual valor,  $q_1 = q_2 = q$ . Por tanto, la magnitud de la fuerza electrostática en este caso es:

$$F_{12} = k \frac{|q_1||q_2|}{r^2} = k \frac{q^2}{r^2}$$

donde  $r$  es la distancia entre  $q_1$  y  $q_2$ . Si a continuación extraemos una cierta cantidad de carga  $\Delta q$  a la segunda carga y se la añadimos a la primera, tenemos una situación en la que  $q'_1 = q + \Delta q$  y  $q'_2 = q - \Delta q$ . En esta situación, la magnitud de la fuerza electrostática es:

$$F'_{12} = k \frac{|q_1||q'_2|}{r^2} = k \frac{|q + \Delta q||q - \Delta q|}{r^2} = k \frac{q^2 - \Delta q^2}{r^2} = k \frac{q^2}{r^2} - k \frac{\Delta q^2}{r^2} = |\mathbf{F}_{12}| - k \frac{(\Delta q)^2}{r^2}$$

donde,  $r$  es la distancia entre  $q'_1$  y  $q'_2$ . La misma distancia que en el caso anterior.

Como  $k \frac{(\Delta q)^2}{r^2} > 0$  se concluye que

$$F'_{12} < F_{12},$$

y, por tanto, la fuerza disminuye en el segundo caso.

**Sol** La magnitud de la fuerza electrostática tras el cambio en las cargas,  $F'_{12}$ , es menor que la magnitud de la fuerza inicial,  $F_{12}$ .

## Campo Eléctrico

**Cuestión 1.5 — Campo eléctrico en un punto del espacio.** Sea una carga testigo de 10 nC colocada sobre un punto determinado del espacio sobre el que siente la acción de una fuerza de  $50 \cdot 10^{-4} \hat{i}$  N. Bajo estas condiciones ¿qué valor tiene el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  presente en dicho punto?

*Solución:*

El campo eléctrico que siente la carga  $q = 10$  nC para desarrollar una fuerza  $\mathbf{F} = 50 \cdot 10^{-4} \hat{i}$  N se puede calcular a partir de la ecuación (1.6):

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q} = \frac{50 \cdot 10^{-4} \text{ N}}{10 \cdot 10^{-9} \text{ C}} = 2 \cdot 10^5 \text{ N/C}.$$

**Sol** El campo eléctrico en dicho punto es  $2 \cdot 10^5$  N/C.

**Cuestión 1.6 — Cargas testigo bajo campos magnéticos.** Una carga  $q_1 = 2 \text{ nC}$  se encuentra en un punto  $P$  donde existe un campo eléctrico dado por  $\mathbf{E} = 5 \cdot 10^9 \hat{i} \text{ N/C}$ . Si sustituimos la carga  $q_1$  en el punto  $P$  por una nueva carga  $q_2 = -2 \text{ nC}$ , ¿cambia la fuerza electrostática que sufre la nueva carga? ¿Qué ocurre con el campo eléctrico en dicho punto?

*Solución:*

*Nota:* Por una mayor comodidad, en este problema utilizaremos las siguientes unidades:  $10^9 \text{ N/C} = 1 \text{ N/nC}$ .

La fuerza que sufre una carga en el seno de un campo eléctrico puede determinarse a partir de la ecuación (1.6),  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ . Por tanto, la carga  $q_1 = +2 \text{ nC}$  sufre una fuerza:

$$\mathbf{F}_1 = q_1 \mathbf{E} = 2 \text{ nC} \cdot 5 \hat{i} \text{ N/C} = 10 \hat{i} \text{ N}.$$

Si, a continuación, sustituimos la carga  $q_1$  por una nueva carga  $q_2 = -2 \text{ nC}$ , la fuerza que experimenta esta carga bajo la influencia del mismo campo eléctrico es:

$$\mathbf{F}_2 = q_2 \mathbf{E} = -2 \text{ nC} \cdot 5 \hat{i} \text{ N/C} = -10 \hat{i} \text{ N}.$$

En ambos casos, podemos ver que:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_1}{q_1} = \frac{\mathbf{F}_2}{q_2} = 5 \text{ N/nC}$$

**Sol** Cambiar la carga testigo de  $q_1 = 2 \text{ nC}$  a  $q_2 = -2 \text{ nC}$  implica un cambio en el sentido de la fuerza,  $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$ .

El campo eléctrico es independiente de la carga testigo. Por tanto, el cambio de  $q_1$  a  $q_2$  no implica un cambio en el campo eléctrico.

**Cuestión 1.7 — Dipolo eléctrico.** El sistema formado por dos cargas puntuales de igual magnitud y signo opuesto separadas por una distancia  $2a$  se conoce como un dipolo eléctrico. Suponga un dipolo dispuesto en el eje  $x$  de manera que  $+q$  está en  $x_+ = +a$  y mientras que  $-q$  está en  $x_- = -a$ .

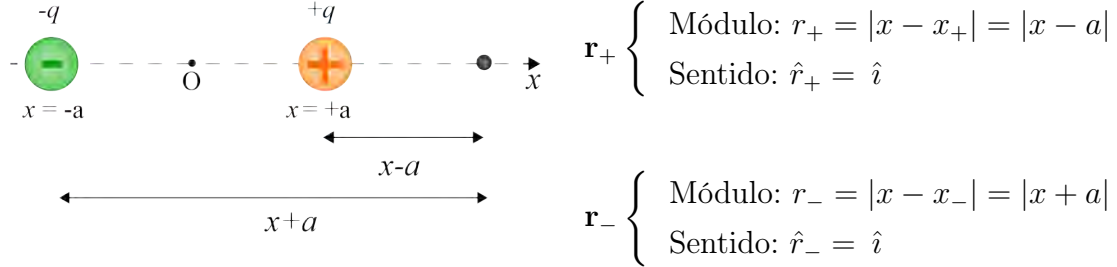
a) Encuentre el campo eléctrico creado por el dipolo en un punto en el eje  $x$  a la derecha de  $+q$ .

b) Obtenga una expresión aproximada para el campo eléctrico, si el punto considerado está a una distancia mucho mayor que el tamaño del dipolo ( $x \gg 2a$ ).

*Dato:* Expresar los resultados en función del momento dipolar eléctrico,  $p \approx 2aq$ .

*Solución:*

a)



1. En este problema, llamaremos  $\mathbf{E}_+$  y  $\mathbf{E}_-$  a los campos generados por las cargas puntuales  $q_+$  y  $q_-$ , respectivamente. Se pueden obtener a partir de la ecuación del campo eléctrico para cargas puntuales (1.7):

$$\mathbf{E}_+ = k \frac{q_+}{(x - x_+)^2} \hat{r} = k \frac{q}{(x - a)^2} \hat{i}$$

$$\mathbf{E}_- = k \frac{q_-}{(x - x_-)^2} \hat{r} = k \frac{q}{(x + a)^2} \hat{i}$$

2. Se pide encontrar el campo eléctrico en una posición  $x$  a la derecha de  $+q$ . El campo eléctrico en este punto puede calcularse aplicando el principio de superposición a los campos  $E_+$  y  $E_-$  calculados en el punto anterior:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- &= kq \left( \frac{1}{(x - a)^2} - \frac{1}{(x + a)^2} \right) \hat{i} = kq \frac{(x + a)^2 - (x - a)^2}{(x - a)^2(x + a)^2} \hat{i} = \\ &= kq \frac{x^2 + 2ax - x^2 - a^2 + 2ax}{(x - a)^2(x + a)^2} \hat{i} = k \frac{4aqx}{(x - a)^2(x + a)^2} \hat{i} \end{aligned}$$

Si definimos el momento dipolar eléctrico como  $p = 2aq$ , podemos simplificar la ecuación que nos da el valor del campo:

$$\mathbf{E} = k \frac{2px}{(x - a)^2(x + a)^2} \hat{i}$$

b) Si ahora consideramos que el punto está a una distancia mucho mayor que el tamaño del dipolo,  $x \gg 2a$ , ocurrirá que:

$$\text{Si } x \gg a \Rightarrow \begin{cases} x - a \approx x \\ x + a \approx x. \end{cases}$$

Por tanto,

$$\mathbf{E} \approx k \frac{2px}{x^2 x^2} \hat{i} = k \frac{2p}{x^3} \hat{i}.$$

**Sol** a) El campo eléctrico en un dipolo eléctrico es  $\mathbf{E} = k \frac{2px}{(x-a)^2(x+a)^2} \hat{i}$ .

b) El campo eléctrico creado por un dipolo eléctrico en punto cuya distancia es mucho mayor que la del dipolo,  $x \gg a$ , el campo eléctrico creado por el dipolo en dicho punto es  $\mathbf{E} = k \frac{2p}{x^3} \hat{i}$ .

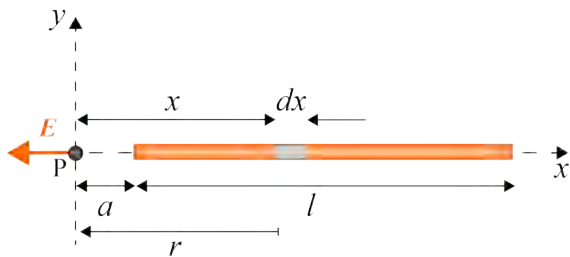
! El campo eléctrico de un dipolo es comúnmente expresado en función del valor de la permitividad eléctrica del vacío,  $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k}$ . En dicho caso

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{px}{(x-a)^2(x+a)^2} \hat{i} \quad x \gg 2a \quad \approx \quad \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p}{x^3} \hat{i}$$

### Cuestión 1.8 — Campo eléctrico de una barra con densidad de carga uniforme.

Calcule el campo eléctrico generado por una barra de longitud  $l$  con una densidad de carga longitudinal uniforme  $\lambda$  y una carga total  $Q$  en un punto  $P$  ubicado a una distancia  $a$  de uno de los extremos de la barra.

*Solución:*



$$\lambda \begin{cases} dq = \lambda dl \stackrel{\text{Eje } x}{=} \lambda dx \\ \text{Densidad uniforme: } Q = \lambda l \end{cases}$$

$$\mathbf{r} = -x \hat{i} \begin{cases} \text{Módulo: } r = x \\ \text{Sentido: } \hat{r} = -\hat{i} \end{cases}$$

El campo eléctrico producido por barra puede calcularse usando la ecuación (1.14), usando la densidad de carga lineal  $\lambda$  y el vector de posición calculados previamente:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \int_l k \frac{dq}{r^2} \hat{r} = \int_a^{a+l} k \frac{\lambda dx}{x^2} (-\hat{i}) = -k\lambda \hat{i} \int_a^{a+l} \frac{dx}{x^2} = -k\lambda \hat{i} \left[ -\frac{1}{x} \right]_a^{a+l} = \\ &= -k\lambda \hat{i} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{a+l} \right) = -k\lambda \frac{l}{a(a+l)} \hat{i} \stackrel{Q=\lambda l}{=} -k \frac{Q}{a(a+l)} \hat{i}. \end{aligned}$$

**Sol**

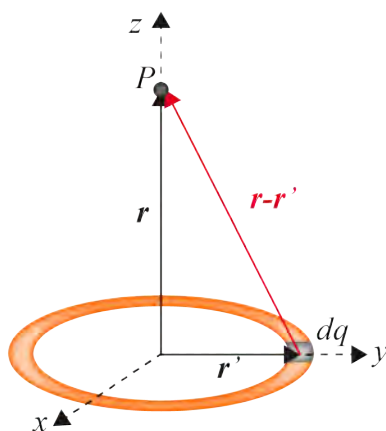
El campo eléctrico producido por la barra en un punto  $P$  a una distancia  $a$  sobre el eje de la barra es

$$\mathbf{E} = -k \frac{Q}{a(a+l)} \hat{i}.$$

**Cuestión 1.9 — Campo eléctrico de un anillo con carga uniforme.** Suponga un anillo de radio  $a$  centrado en el origen y en  $z = 0$ . Calcule el campo eléctrico generado por el anillo en un punto  $P$  ubicado a una distancia  $z$  sobre su eje si tiene una carga total  $q$  es uniforme y lineal.

*Solución:*

Para calcular el vector de posición densidad de carga-punto, tengamos primero en cuenta los vectores origen-punto,  $\mathbf{r}$ , y densidad de carga-punto,  $\mathbf{r}'$ :



$$\mathbf{r}_p = z \hat{k}, \quad \mathbf{r}_q = a \cos \theta \hat{i} + a \sin \theta \hat{j}.$$

Por tanto, el vector de posición densidad de carga-punto es:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q = -a \cos \theta \hat{i} - a \sin \theta \hat{j} + z \hat{k}.$$

Cuyo módulo es:

$$r = \sqrt{a^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + z^2} = \sqrt{a^2 + z^2}.$$

Previo al cálculo del campo eléctrico habrá que tener en cuenta además las siguientes consideraciones:

1. Estamos trabajando con una densidad de carga lineal:

$$dq = \lambda dl.$$

2. El elemento de carga diferencial corresponde a la carga en el arco definido por el ángulo diferencial  $d\theta$ :

$$dl = a d\theta.$$

Por tanto, podemos expresar el elemento de carga como:

$$dq = \lambda dl = \lambda a d\theta.$$

3. Puesto que la carga es uniforme en toda la distribución lineal:

$$q = \lambda 2\pi a$$

El campo eléctrico producido por el anillo puede calcularse usando la ecuación (1.14), usando la densidad de carga lineal  $\lambda$  y el vector de posición calculados previamente:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \int_l k \frac{dq}{r^2} \hat{r} = \int_l k \frac{dq}{r^3} \mathbf{r} = \int_0^{2\pi} k \frac{\lambda a d\theta}{r^3} \mathbf{r} = k \lambda a \int_0^{2\pi} \frac{-a \cos \theta \hat{i} - a \sin \theta \hat{j} + z \hat{k}}{(a^2 + z^2)^{3/2}} d\theta = \\ &= \frac{k \lambda a}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \left[ -a \sin \theta \hat{i} + a \cos \theta \hat{j} + z \theta \hat{k} \right]_0^{2\pi} = \frac{k \lambda a}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \left[ (a - a) \hat{j} + 2\pi z \hat{k} \right] = \\ &= k \frac{2\pi \lambda a z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k} \stackrel{(3)}{=} k \frac{q z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k}. \end{aligned}$$

**Sol**

El campo eléctrico producido por el anillo con carga lineal total  $q$  en un punto  $P$  sobre su eje es

$$\mathbf{E} = k \frac{q z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k}.$$

## 1.5 Problemas

### Fuerza eléctrica - Ley de Coulomb

**Problema 1.1 — Átomo de hidrógeno.** Un átomo de hidrógeno está formado por un electrón y un protón separados (en promedio)  $5.3 \cdot 10^{-11}$  m. Encuentre la magnitud de la fuerza eléctrica entre las dos partículas.

*Solución:*

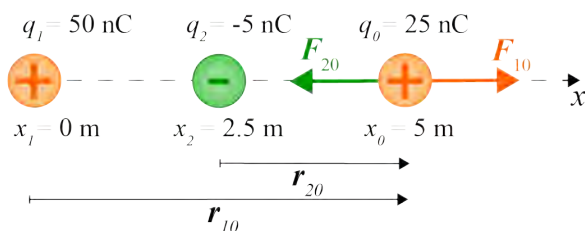
En un átomo de hidrógeno tenemos un protón en el núcleo ( $p = 1.6 \cdot 10^{-19}$  C) y un electrón orbitando en la corteza atómica ( $e = -1.6 \cdot 10^{-19}$  C). Sabiendo que ambas partículas están separadas una distancia  $r = 5.3 \cdot 10^{-11}$  m y usando la ecuación (1.2), podemos obtener la magnitud de la fuerza eléctrica entre ambas partículas:

$$|\mathbf{F}| = k \frac{|q_p||q_e|}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \frac{|1.6 \cdot 10^{-19}| \text{C} | -1.6 \cdot 10^{-19}| \text{C}}{(5.3 \cdot 10^{-11} \text{m})^2} = 8.2 \cdot 10^{-8} \text{N}.$$

**Sol** En un átomo de hidrógeno, la magnitud de la fuerza eléctrica entre protón y electrón es  $8.2 \cdot 10^{-8}$  N.

**Problema 1.2 — Fuerza neta en un sistema de tres cargas puntuales.** Se dispone de un sistema de tres cargas puntuales situadas a lo largo del eje  $x$ ;  $q_1 = 50$  nC está en el origen,  $q_2 = -5$  nC está en  $x = 2.5$  m, y  $q_0 = 25$  nC está en  $x = 5$  m. Determinar la fuerza neta ejercida por  $q_1$  y  $q_2$  sobre  $q_0$ .

*Solución:*



#### (I) Datos del problema

Fuerza neta sobre  $q_0$ :

$$\mathbf{F}_0 = \mathbf{F}_{10} + \mathbf{F}_{20}$$

Esta fuerza se podrá hallar aplicando la ley de Coulomb (ecuación 1.4).

Vectores posición de  $x_0$  respecto de  $x_1$  y  $x_2$  son:

$$\mathbf{r}_{10} = (x_0 - x_1)\hat{x} = 5\hat{x} \text{ m} \rightarrow \begin{cases} r_{10} = (x_0 - x_1) = 5 \text{ m} \\ \hat{r}_{10} = \hat{x} \end{cases}$$

$$\mathbf{r}_{20} = (x_0 - x_2)\hat{x} = 2.5\hat{x} \text{ m} \rightarrow \begin{cases} r_{20} = (x_0 - x_2) = 2.5 \text{ m} \\ \hat{r}_{20} = \hat{x} \end{cases}$$

### (IIa) Aplicando la ley de Coulomb

Aplicando la ley de Coulomb por separada y sumando posteriormente:

$$\mathbf{F}_{10} = k \frac{q_1 q_0}{r_{10}^2} \hat{r}_{10} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \frac{(50 \cdot 10^{-9} \text{ C})(25 \cdot 10^{-9} \text{ C})}{(5 \text{ m})^2} \hat{x} = 4.50 \cdot 10^{-7} \hat{x} \text{ N} = 450 \hat{x} \text{ nN}$$

$$\mathbf{F}_{20} = k \frac{q_2 q_0}{r_{20}^2} \hat{r}_{20} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \frac{(-5 \cdot 10^{-9} \text{ C})(25 \cdot 10^{-9} \text{ C})}{(2.5 \text{ m})^2} \hat{x} = -1.8 \cdot 10^{-7} \hat{x} \text{ N} = -180 \hat{x} \text{ nN}$$

Fuerza neta sobre  $q_0$ :

$$\mathbf{F}_0 = \mathbf{F}_{10} + \mathbf{F}_{20} = 450 \hat{x} - 180 \hat{x} \text{ nN} = 270 \hat{x} \text{ nN}.$$

### (IIb) Aplicando principio de superposición

Aplicando directamente la ecuación 1.5 del principio de superposición para fuerzas eléctricas:

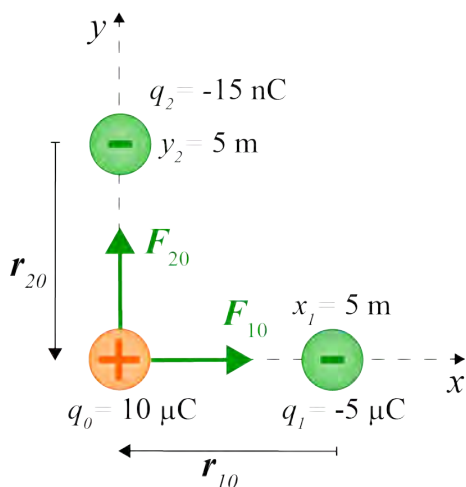
$$\begin{aligned} \mathbf{F}_0 &= \mathbf{F}_{10} + \mathbf{F}_{20} = k \frac{q_1 q_0}{r_{10}^2} \hat{r}_{10} + k \frac{q_2 q_0}{r_{20}^2} \hat{r}_{20} = k q_0 \left( \frac{q_1}{r_{10}^2} \hat{r}_{10} + \frac{q_2}{r_{20}^2} \hat{r}_{20} \right) = \\ &= 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} (25 \cdot 10^{-9} \text{ C}) \left( \frac{(50 \cdot 10^{-9} \text{ C})}{(5 \text{ m})^2} + \frac{(-5 \cdot 10^{-9} \text{ C})}{(2.5 \text{ m})^2} \right) \hat{x} = \\ &= 2.7 \cdot 10^{-7} \hat{x} \text{ N} = 270 \hat{x} \text{ nN} \end{aligned}$$

**Sol** La fuerza neta ejercida por  $q_1$  y  $q_2$  sobre  $q_0$  es  $\mathbf{F}_0 = 270 \hat{x} \text{ nN}$ .

### Problema 1.3 — Fuerza neta en un sistema de tres cargas puntuales en el plano

$xy$ . Se dispone de un sistema de tres cargas puntuales situadas sobre el plano  $xy$ ;  $q_1 = -5 \mu\text{C}$  está sobre el eje  $x$  en  $x_1 = 5 \text{ m}$ ,  $q_2 = -15 \mu\text{C}$  está sobre el eje  $y$  en  $y_2 = 5 \text{ m}$ , y  $q_0 = 10 \mu\text{C}$  está en el origen. Determinar la fuerza neta ejercida por  $q_1$  y  $q_2$  sobre  $q_0$ .

Solución:



### (I) Datos del problema

Fuerza neta sobre  $q_0$ :

$$\mathbf{F}_0 = \mathbf{F}_{10} + \mathbf{F}_{20}$$

Esta fuerza se podrá hallar aplicando la ley de Coulomb (ecuación 1.4).

En este caso, los vectores de posición no tendrán una única dirección, ya que las cargas están distribuidas en el plano  $xy$ .

Los vectores posición de  $x_0$  respecto de  $x_1$  y  $x_2$  son:

$$\mathbf{r}_{10} = (x_0 - x_1)\hat{x} = -5\hat{x} \text{ m} \rightarrow \begin{cases} r_{10} = (x_0 - x_1) = 5 \text{ m} \\ \hat{r}_{10} = -\hat{x} \end{cases}$$

$$\mathbf{r}_{20} = (y_0 - y_2)\hat{y} = -5\hat{y} \text{ m} \rightarrow \begin{cases} r_{20} = (y_0 - y_2) = 5 \text{ m} \\ \hat{r}_{20} = -\hat{y} \end{cases}$$

### (II) Aplicando principio de superposición

Aplicando la ecuación 1.5 del principio de superposición para fuerzas eléctricas:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_0 &= \mathbf{F}_{10} + \mathbf{F}_{20} = k \frac{q_1 q_0}{r_{10}^3} \mathbf{r}_{10} + k \frac{q_2 q_0}{r_{20}^3} \mathbf{r}_{20} = k q_0 \left( \frac{q_1}{r_{10}^3} \mathbf{r}_{10} + \frac{q_2}{r_{20}^3} \mathbf{r}_{20} \right) = \\ &= 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} (10 \cdot 10^{-6} \text{ C}) \left( \frac{(-5 \cdot 10^{-6} \text{ C})}{(5 \text{ m})^3} (-5\hat{x} \text{ m}) + \frac{(-15 \cdot 10^{-6} \text{ C})}{(5 \text{ m})^3} (-5\hat{y} \text{ m}) \right) \\ &= 0.018\hat{x} + 0.054\hat{y} \text{ N} = 18\hat{x} + 54\hat{y} \text{ mN} \end{aligned}$$

**Sol** La fuerza neta ejercida por  $q_1$  y  $q_2$  sobre  $q_0$  es  $\mathbf{F}_0 = 18\hat{x} + 54\hat{y} \text{ mN}$ .

**Problema 1.4 — Resultante nula en un sistema de cargas puntuales.** Dos cargas puntuales están colocadas sobre el eje  $x$ :  $4 \mu\text{C}$  en  $x = 0$  y  $-8 \mu\text{C}$  en  $x = 60 \text{ cm}$ . ¿Dónde debe colocarse una tercera carga  $q$  si la fuerza resultante sobre ésta debe ser cero? ¿Por qué el resultado no depende del valor de  $q$ ?

*Solución:*

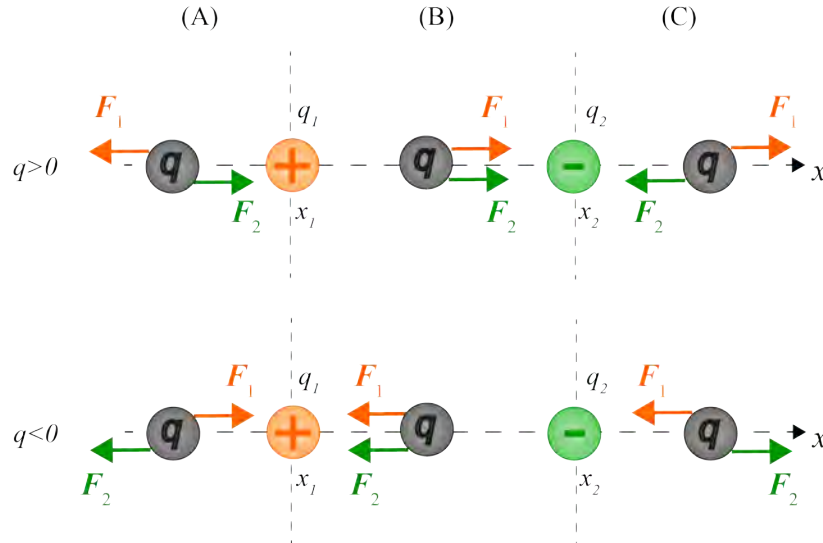
**(I) Análisis del problema**

1. En este problema, llamaremos  $\mathbf{F}_1$  y  $\mathbf{F}_2$  a las fuerzas que ejercen  $q_1$  y  $q_2$  sobre  $q$ , respectivamente.
2. Se pide encontrar el punto en el que la resultante sobre  $q$  es nula. Dicho punto no depende del signo de  $q$ .

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0 \Leftrightarrow q\mathbf{E}_1 + q\mathbf{E}_2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = 0$$

3. Región en la que se anula la resultante de las fuerzas.

Para la resolución del problema será útil encontrar primero la región en la que se debe localizar la carga  $q$  para que la resultante sobre ella sea cero. Para ello, realizaremos un análisis distinguiendo tres regiones distintas: (A)  $x < x_1$ , (B)  $x_1 < x < x_2$  y (C)  $x > x_2$ .



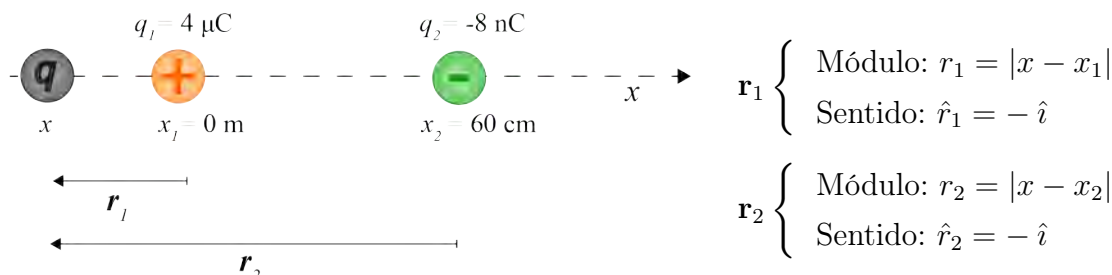
- Si  $x_1 < x < x_2$  la resultante no se puede anular ya que  $\mathbf{F}_1$  y  $\mathbf{F}_2$  tienen igual sentido (independientemente del signo de  $q$ ). Por tanto, la región (B) está descartada.
- La resultante podrá ser cero si  $x < x_1$  o si  $x > x_2$  (independientemente del signo de  $q$ ). Veamos en qué región ocurre que la resultante es cero:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0 &\Leftrightarrow |\mathbf{F}_1| = |\mathbf{F}_2| \Leftrightarrow k \frac{|q_1||q|}{r_1^2} = k \frac{|q_2||q|}{r_2^2} \Leftrightarrow \\ &\frac{|q_1|}{r_1^2} = \frac{|q_2|}{r_2^2} \Leftrightarrow |q_1|r_2^2 = |q_2|r_1^2 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $|q_1| < |q_2|$ , la igualdad  $|q_1|r_2^2 = |q_2|r_1^2$  se cumplirá si,

y solo si,  $r_1 < r_2$ . Por tanto, solo cabe la posibilidad de que  $q$  se encuentre en la región (A), donde  $x < x_1$ .

## (II) Resolución del problema



En el punto 2 del análisis del problema hemos visto que el punto en el que la resultante de las fuerzas es nula es independiente del valor de  $q$ . Por tanto, trabajamos directamente con el campo eléctrico resultante en dicho punto:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = 0 \Rightarrow \frac{q_1}{(x - x_1)^2}(-\hat{i}) + \frac{q_2}{(x - x_2)^2}(-\hat{i}) = 0 \Rightarrow \frac{q_1}{(x - x_1)^2} + \frac{q_2}{(x - x_2)^2} = 0$$

Lo cual nos deja una ecuación de segundo grado para determinar el valor  $x$  donde se anula la resultante de las fuerzas.

$$q_1(x - x_2)^2 + q_2(x - x_1)^2 = 0 \xrightarrow{x_1=0} x^2 + x_2^2 - 2xx_2 + \frac{q_2}{q_1}x^2 = 0$$

Despejando por los valores  $q_1 = 4 \mu\text{C}$ ,  $q_2 = -8 \mu\text{C}$ , y  $x_2 = 60 \text{ cm}$ , tenemos la siguiente ecuación por resolver:

$$x^2 + 0.6^2 - 2 \cdot 0.6x - \frac{8}{4}x^2 = -x^2 - 1.2x + 0.36 = 0 \Leftrightarrow x = \begin{cases} -1.45 \text{ m}, \\ 0.25 \text{ m}. \end{cases}$$

Del análisis, realizado sabemos que  $x < x_1 = 0$ , por tanto, la solución correcta es  $x = -1.45 \text{ m} = -145 \text{ cm}$ .

**Sol** La tercera carga  $q$  debe colocarse 145 cm a la izquierda de  $q_1$  para que la fuerza resultante sobre ella sea cero.

El resultado no depende del valor  $q$  ya que esta es una carga testigo que siente el campo creado por dos cargas fuente,  $q_1$  y  $q_2$ . Como se ha visto en el punto 2 del análisis, que la resultante sobre  $q$  sea cero se cumple si, y solo si,  $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = 0$ .

**Problema 1.5 — Resultante nula en un sistema con cargas positivas.** Tres cargas puntuales  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q$  se encuentran dispuestas en el eje  $x$ . La carga  $q_1 = 3\mu C$  está en el origen, mientras que  $q_2 = 12\mu C$  está en la posición  $x_2 = 2.00$  m. Calcule la posición  $x$  de  $q$  sabiendo que la fuerza neta que actúa sobre ella es nula.

*Solución:*

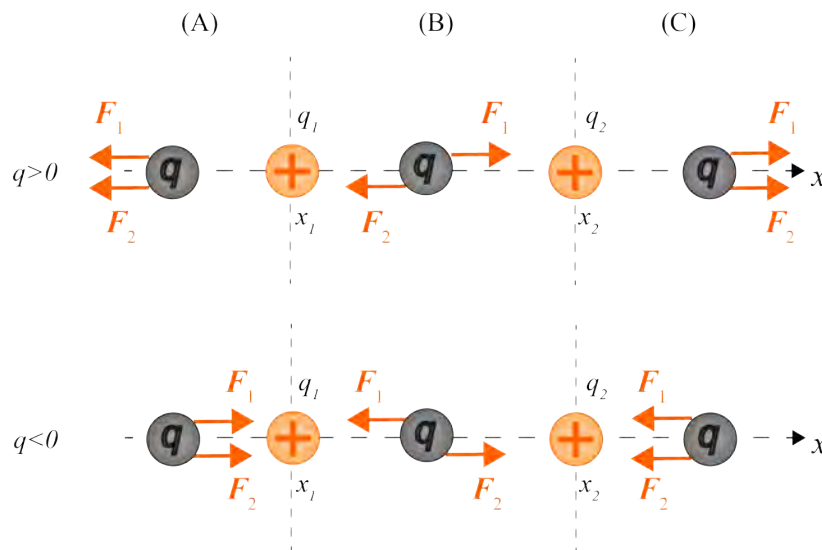
### (I) Análisis del problema

1. En este problema, llamaremos  $\mathbf{F}_1$  y  $\mathbf{F}_2$  a las fuerzas que ejercen  $q_1$  y  $q_2$  sobre  $q$ , respectivamente.
2. Se pide encontrar el punto en el que la resultante sobre  $q$  es nula. Dicho punto no depende del signo de  $q$ .

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad q\mathbf{E}_1 + q\mathbf{E}_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = 0$$

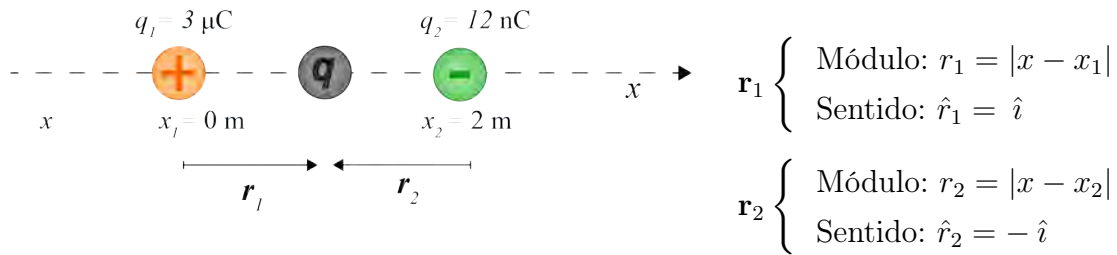
3. Región en la que se anula la resultante de las fuerzas.

Para la resolución del problema será útil encontrar primero la región en la que se debe localizar la carga  $q$  para que la resultante sobre ella sea cero. Para ello, realizaremos un análisis distinguiendo tres regiones distintas: (A)  $x < x_1$ , (B)  $x_1 < x < x_2$  y (C)  $x > x_2$ .



- Si  $x < x_1$  o  $x > x_2$  la resultante no se puede anular ya que  $\mathbf{F}_1$  y  $\mathbf{F}_2$  tienen igual sentido (independientemente del signo de  $q$ ). Por tanto, las regiones (A) y (C) están descartadas.
- La resultante podrá ser cero si  $x_1 < x < x_2$  ya que en este caso las fuerzas de  $q_1$  y  $q_2$  sobre  $q$  se anulan (independientemente del signo de  $q$ ). Por tanto, la resultante de fuerzas sobre  $q$  será cero en la región (B).

## (II) Resolución del problema



En el punto 2 del análisis del problema hemos visto que el punto en el que la resultante de las fuerzas es nula es independiente del valor de  $q$ . Por tanto, trabajamos directamente con el campo eléctrico resultante en dicho punto:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{q_1}{(x - x_1)^2}(-\hat{i}) + \frac{q_2}{(x - x_2)^2}(-\hat{i}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{q_1}{(x - x_1)^2} - \frac{q_2}{(x - x_2)^2} = 0$$

Lo cual nos deja una ecuación de segundo grado para determinar el valor  $x$  donde se anula el campo total:

$$q_1(x - x_2)^2 - q_2(x - x_1)^2 = 0 \quad \xrightarrow{x_1=0} \quad x^2 + x_2^2 - 2xx_2 - \frac{q_2}{q_1}x^2 = 0$$

Despejando por los valores  $q_1 = 3 \mu\text{C}$ ,  $q_2 = 12 \mu\text{C}$ , y  $x_2 = 2 \text{ m}$ , tenemos la siguiente ecuación por resolver:

$$x^2 + 2^2 - 2 \cdot 2x - \frac{12}{3}x^2 = -3x^2 - 4x + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \begin{cases} -2 \text{ m}, \\ 0.67 \text{ m}. \end{cases}$$

Del análisis, realizado sabemos que  $0 = x_1 < X < x_2 = 2 \text{ m}$ , por tanto, la solución correcta es  $x = 0.67 \text{ m}$ .

**Sol** La tercera carga  $q$  debe colocarse  $0.67 \text{ m}$  a la derecha de  $q_1$  para que la fuerza resultante sobre ella sea cero.

## Campo Eléctrico

**Problema 1.6 — Superposición de campos.** Dos cargas puntuales  $q_1$  y  $q_2$  se encuentran dispuestas en el eje  $x$ . La carga  $q_1 = +4 \text{ nC}$  está en el origen, mientras

que  $q_2 = -9\text{ nC}$  está en la posición  $x_2 = 3\text{ m}$ . Calcule la posición  $x$  (distinta del infinito) en la que el campo eléctrico es nulo.

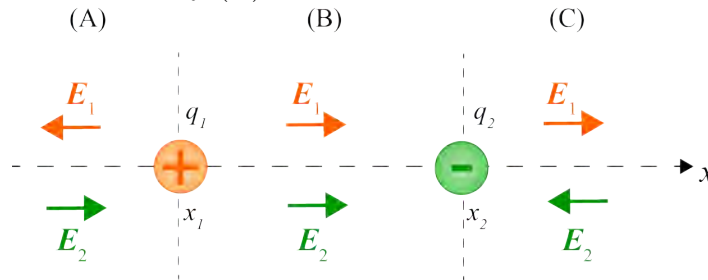
*Solución:*

### (I) Análisis del problema

1. En este problema, llamaremos  $\mathbf{E}_1$  y  $\mathbf{E}_2$  a los campos generados por las cargas puntuales  $q_1$  y  $q_2$ , respectivamente.
2. Se pide encontrar el punto la posición en la que el campo eléctrico es nulo  $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = 0$ .
3. Región en la que se anula el campo eléctrico.

Distinguimos tres posibles regiones en las que se puede anular el campo total:

(A)  $x < x_1$ , (B)  $x_1 < x < x_2$  y (C)  $x > x_2$ .

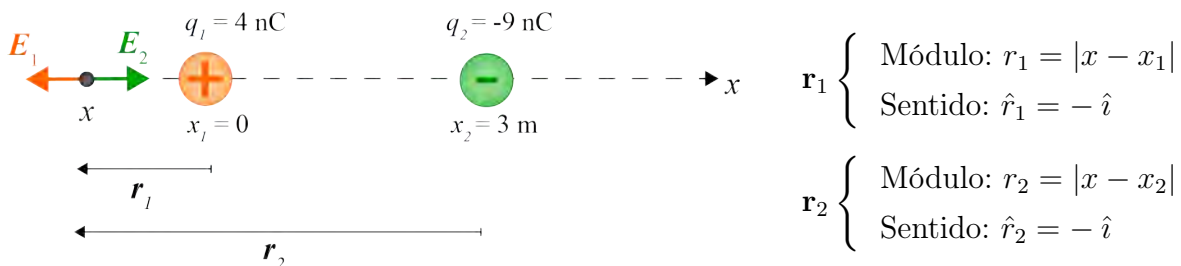


- Si  $x_1 < x < x_2$  el campo total no se puede anular ya que  $\mathbf{E}_1$  y  $\mathbf{E}_2$  tienen igual sentido. Por tanto, la región (B) está descartada.
- El campo total podrá ser cero si  $x < x_1$  o si  $x > x_2$ . Veamos en qué región ocurre que la resultante es cero:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = 0 &\Leftrightarrow |\mathbf{E}_1| = |\mathbf{E}_2| \Leftrightarrow k \frac{|q_1|}{r_1^2} = k \frac{|q_2|}{r_2^2} \Leftrightarrow \\ \frac{|q_1|}{r_1^2} &= \frac{|q_2|}{r_2^2} \Leftrightarrow |q_1|r_2^2 = |q_2|r_1^2 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $|q_1| < |q_2|$ , la igualdad  $|q_1|r_2^2 = |q_2|r_1^2$  se cumplirá si, y solo si,  $r_1 < r_2$ . Por tanto, solo cabe la posibilidad de que  $q$  se encuentre en la región (A), donde  $x < x_1$ .

### (II) Resolución del problema



A partir del análisis hecho previamente, obtenemos la posición en la que se anula el campo:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = 0 \Rightarrow \frac{q_1}{(x - x_1)^2} \hat{i} + \frac{q_2}{(x - x_2)^2} (-\hat{i}) = 0 \Rightarrow \frac{q_1}{(x - x_1)^2} + \frac{q_2}{(x - x_2)^2} = 0$$

Lo cual nos deja una ecuación de segundo grado para determinar el valor  $x$  donde se anula la resultante de las fuerzas.

$$q_1(x - x_2)^2 + q_2(x - x_1)^2 = 0 \xrightarrow{x_1=0} x^2 + x_2^2 - 2xx_2 + \frac{q_2}{q_1}x^2 = 0$$

Despejando por los valores  $q_1 = 4 \text{ nC}$ ,  $q_2 = -9 \text{ nC}$ , y  $x_2 = 3 \text{ m}$ , tenemos la siguiente ecuación por resolver:

$$x^2 + 3^2 - 2 \cdot 3x - \frac{9}{4}x^2 = -1.25x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = \begin{cases} -6.0 \text{ m}, \\ 1.2 \text{ m}. \end{cases}$$

Del análisis, realizado sabemos que  $0 = x_1 < X < x_2 = 3 \text{ m}$ , por tanto, la solución correcta es  $x = -6.0 \text{ m}$ .

**Revisar:** No coincide con solución en comentarios –  $x = -6/5 \text{ m} = -1.2 \text{ m}$



La posición en la que el campo total es nulo es 6 m a la izquierda de  $q_1$ .

**Problema 1.7 — Densidades de carga en diferentes cuerpos.** Calcule la densidad de carga para una carga total  $Q = +10 \mu\text{C}$  distribuida uniformemente en los siguiente tres cuerpos

- Un cable cilíndrico de longitud de 1 m y radio despreciable,
- Una superficie cilíndrica (sin tapas) de longitud de 1m y radio 0.1 m,
- Un cilindro de longitud de 1m y radio 0.1 m.

*Solución:*

Para resolver el problema, tengamos en cuenta que en todos los casos la carga está distribuida uniformemente.

**a) Densidad lineal.** Dado que el radio es despreciable, este caso se ajusta a una distribución lineal de carga. Es apropiado emplear la siguiente densidad lineal de carga

$$\lambda = \frac{Q}{l} = \frac{10 \mu \text{ C}}{1 \text{ m}} = 10 \mu \text{ C/m},$$

**b) Densidad superficial.** En este caso la carga se extiende por una superficie, por lo que podemos usar la siguiente densidad superficial de carga

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{2\pi r l} = \frac{10 \mu \text{ C}}{2\pi(0.1 \text{ m})(1 \text{ m})} = \frac{50 \mu \text{ C}}{\pi \text{ m}^2} = 15.9 \mu \text{ C/m}^2,$$

**c) Densidad volumétrica.** Al estar la carga distribuida en un volumen se trata de una distribución continua volumétrica de carga con la siguiente densidad

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\pi r^2 l} = \frac{10 \mu \text{ C}}{\pi(0.1 \text{ m})^2(1 \text{ m})} = \frac{1000 \mu \text{ C}}{\pi \text{ m}^3} = 318.3 \mu \text{ C/m}^3.$$

**Sol** La densidad de carga es  $10 \mu \text{ C/m}$  en el caso de la distribución lineal,  $15.9 \mu \text{ C/m}^2$  en la superficial y  $318.3 \mu \text{ C/m}^3$  en la volumétrica.

**Problema 1.8 — Electrización de un coche en movimiento.** Un coche que se desplaza a alta velocidad experimentando acumulación de carga debido al rozamiento con el aire. Supongamos que, debido a este efecto, el coche adquiere una carga neta positiva de  $5 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ .

- Determina el número de electrones transferidos del coche al aire.
- Si el coche adquiere una carga uniforme, calcula la densidad de carga superficial si la superficie del coche es de  $12 \text{ m}^2$ .

*Solución:*

**a)** Según el enunciado, el coche en movimiento adquiere por rozamiento con el aire una carga neta positiva  $Q = 5 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ .

Para calcular el número de electrones transferidos podemos emplear la ecuación (1.1), siendo  $z \in \mathbb{Z}$  el número de electrones transferidos y  $e$  la carga del electrón:

$$z = \frac{Q}{e} = \frac{5 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = 3.125 \cdot 10^{13} \text{ electrones}$$

**b)** Sea la superficie del coche  $S = 12 \text{ m}^2$ , podemos calcular la densidad de carga superficial,  $\sigma$ , dividiendo la carga total por la superficie del coche:

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{5 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{12 \text{ m}^2} = 4.2 \cdot 10^{-7} \text{ C/m}^2.$$

**Sol** Debido al rozamiento con el aire, el coche transfiere al aire  $3.125 \cdot 10^{13}$  electrones.  
La densidad de carga superficial del coche en este proceso es  $4.2 \cdot 10^{-7} \text{ C/m}^2$ .





- 2.1 Líneas de campo eléctrico
- 2.2 Flujo eléctrico
- 2.3 Ley de Gauss
- 2.4 Conductor en equilibrio electrostático
- 2.5 Cuestiones
- 2.6 Problemas

## 2. Ley de Gauss

### 2.1 Líneas de campo eléctrico

Una forma de visualizar gráficamente el campo eléctrico es mediante las líneas de campo, las cuales tienen las siguientes propiedades:

1. Son líneas tangentes en cada punto al vector campo eléctrico.
2. Son líneas que muestran la dirección de la fuerza ejercida sobre una carga testigo positiva.
3. Las líneas de campo divergen desde las cargas fuentes positivas y convergen hacia cargas fuente negativas.
4. La densidad de líneas en un punto del espacio es proporcional a la intensidad del campo en dicho punto.
5. Dos líneas de campo no se cortan.

### 2.2 Flujo eléctrico

El **flujo eléctrico**,  $\Phi_E$ , es una magnitud matemática que se relaciona con el número de líneas de campo eléctrico,  $\mathbf{E}$ , presente en una región del espacio que atraviesan una superficie cualquiera,  $S$ ,

$$\Phi_E = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}, \quad (2.1)$$

donde  $d\mathbf{S}$  es el vector diferencial de la superficie  $S$  que tiene como módulo el área del elemento diferencial, y como dirección y sentido la normal a dicha superficie. La unidad de flujo eléctrico es igual a unidad de campo eléctrico por unidad de longitud, es decir voltio por metro, Vm.

Destacar que para una superficie plana,  $S$ , en una región del espacio con un campo magnético uniforme,  $\mathbf{E}$ , el flujo eléctrico vendrá dado por

$$\Phi_E = \mathbf{E} \cdot \mathbf{S} = ES \cos \theta. \quad (2.2)$$

donde  $\mathbf{S}$  es el vector superficie (módulo  $S$  y dirección normal al plano de  $S$ ) y  $\theta$  es el ángulo que forman  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{S}$ .

- ⚠ El flujo eléctrico en una superficie dada es proporcional al número de líneas de campo que entran en la superficie. El número de líneas entrantes es proporcional a la intensidad de campo, al tamaño de la superficie y a la orientación entre campo y superficie.
- ⚠ En una superficie cerrada el flujo eléctrico es proporcional al número de líneas que salen menos las líneas que entran en la geometría.

## 2.3 Ley de Gauss

Según la **ley de Gauss** el flujo del campo eléctrico a través de cualquier superficie gaussiana<sup>1</sup> es igual a la **carga eléctrica neta** que encierra dicha superficie dividida por la constante dieléctrica  $\varepsilon_0$ .

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}. \quad (2.3)$$

En la ecuación 2.3,  $q_{int}$  hace referencia a la carga interna neta encerrada en la superficie gaussiana y  $d\mathbf{S}$  es el elemento diferencial de superficie que divide la superficie gaussiana.

- ⚠ La ley de Gauss con el campo eléctrico permite simplificar el cálculo del campo eléctrico de distribuciones continuas de cargas con altos grados de simetría.

## 2.4 Conductor en equilibrio electrostático

Un material conductor está en equilibrio electrostático cuando, al ser sometido a un campo eléctrico externo, las cargas libres en su interior se desplazan hacia la superficie. Este movimiento genera un campo eléctrico que cancela al campo externo dentro del conductor. Bajo esta condición se cumple que:

- El campo eléctrico es nulo en cualquier punto en el interior del conductor.
- El exceso de carga se acumula por completo en la superficie del conductor.

---

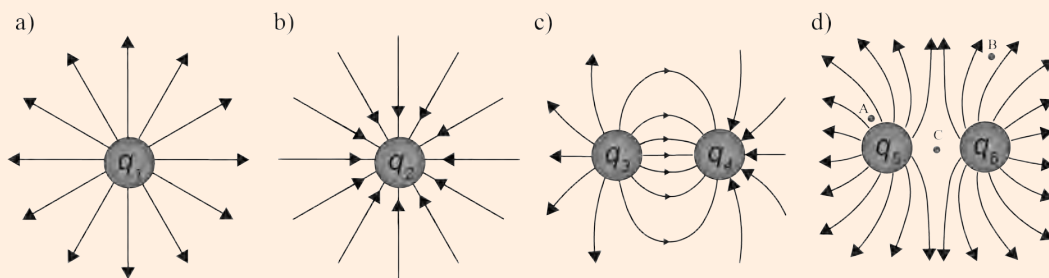
<sup>1</sup>En la ley de Gauss, una superficie gaussiana es una superficie cerrada imaginaria que no tiene por qué ser una geometría del problema.

- Si un conductor tiene forma irregular, la carga tiende a acumularse en las puntas del conductor<sup>2</sup>.
- El campo eléctrico en la superficie es siempre normal a ella.
- En cualquier cavidad cerrada dentro de un conductor homogéneo el campo eléctrico es nulo<sup>3</sup>.

## 2.5 Cuestiones

### Líneas de campo eléctrico

**Cuestión 2.1 — Líneas de campo en cargas puntuales.** En los siguientes esquemas, indique el signo de la carga y ordene de mayor a menor la magnitud del campo eléctrico en los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ .



**Sol** Recordemos que las líneas de campo divergen (salen) de las cargas positivas y convergen (entran) en las cargas negativas. Siguiendo este criterio podemos afirmar que son:

- cargas positivas:  $q_1$ ,  $q_3$ ,  $q_5$  y  $q_6$ ;
- cargas negativas:  $q_2$  y  $q_4$ .

Además, la densidad de líneas de campo en un punto es proporcional a la intensidad del campo en dicho punto. Por tanto, se puede afirmar que:

- el campo es mayor en  $A$  ya que es el punto con mayor densidad de líneas;
- la ausencia de líneas de campo en  $C$  indica que el campo es nulo en este punto;
- $E(A) > E(B) > E(C) = 0$ .

### Flujo eléctrico

<sup>2</sup>Este fenómeno se conoce como efecto punta y tiene una aplicación importante en el diseño de pararrayos.

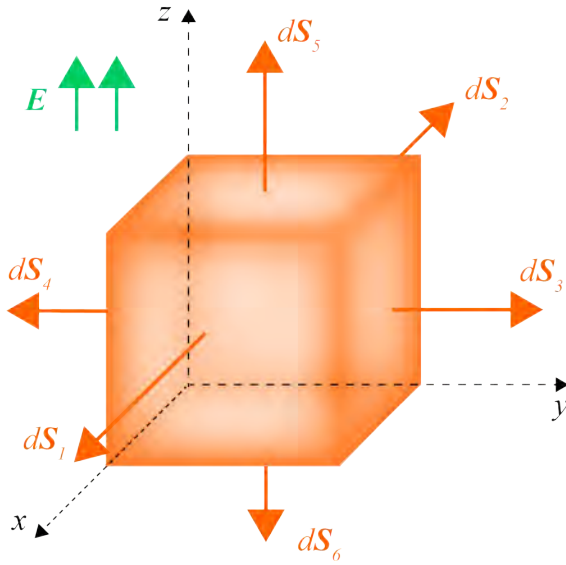
<sup>3</sup>De esta propiedad se extrae como aplicación la jaula de Faraday que puede ser empleada como protección de equipos electrónicos y en otros dispositivos como los microondas.

**Cuestión 2.2 — Flujo eléctrico cubo.** Encuentre el flujo eléctrico neto a través de la superficie de un cubo con arista  $l$  que se encuentra en el seno de un campo eléctrico uniforme  $\mathbf{E} = E \hat{k}$ .

*Solución:*

### (I) Análisis del problema

El flujo eléctrico neto a través del cubo será igual a la suma de los flujos a través de cada una de las superficies que forman el cubo.



Usamos la ecuación (2.2) para determinar el flujo eléctrico a través de cada superficie. El producto escalar  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$  nos indica que para que el flujo sea no nulo,  $\mathbf{E}$  y  $d\mathbf{S}$  no pueden ser perpendiculares. En nuestro problema tendremos:

- flujo nulo para los vectores superficie perpendiculares a  $z$  (1, 2, 3 y 4).
- flujo distinto de cero para los vectores superficie paralelos a  $z$  (5 y 6).

### (II) Resolución del problema

#### Caras 1, 2, 3 y 4

Los vectores superficie de las caras 1, 2, 3 y 4 son perpendiculares al campo eléctrico y, por tanto, los ángulos que forman  $\mathbf{E}$  y  $d\mathbf{S}_i$  son  $\theta_i = 90^\circ$  siendo  $i = 1, \dots, 4$  ( $\cos \theta_i = 0$ ).

$$\Phi_i = \int_{S_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_i = \int_{S_i} E \cos \theta_i dS_i = 0 \quad (i = 1, \dots, 4).$$

#### Caras 5 y 6

El vector superficie de la cara 5 es paralelo al campo eléctrico mientras que el de la 6 es anti-paralelo. Esto se traduce en unos ángulos entre campo eléctrico y vector superficie  $\theta_5 = 0^\circ$  y  $\theta_6 = 180^\circ$  ( $\cos \theta_5 = 1$  y  $\cos \theta_6 = -1$ ). Por tanto, el flujo eléctrico a través de estas superficies es:

$$\Phi_5 = \int_{S_5} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_5 = \int_{S_5} E \cos \theta_5 dS_5 = E \int_{S_5} dS_5 = El^2,$$

$$\Phi_6 = \int_{S_6} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_6 = \int_{S_6} E \cos \theta_6 dS_6 = -E \int_{S_6} dS_6 = -El^2.$$

Por tanto, el flujo eléctrico neto será:

$$\Phi = \sum_{i=1}^6 \Phi_i = \Phi_5 + \Phi_6 = El^2 - El^2 = 0.$$

**Sol** El flujo eléctrico neto a través de un cubo situado en el seno de un campo eléctrico uniforme en la dirección  $z$  es cero.

## Ley de Gauss

**Cuestión 2.3 — Proporción entre líneas de campo y flujo eléctrico.** Al evaluar el flujo eléctrico en una superficie cerrada se evidencia que entran más líneas de campo eléctrico que las que salen, ¿cómo es la carga neta dentro de dicha superficie?

*Solución:*

Podemos afirmar que el flujo eléctrico es proporcional al número de líneas que salen menos las líneas que entran. Si en la situación problema entran más líneas de campo que salen, el flujo eléctrico será negativo.

$$\Phi = \text{núm. líneas que salen} - \text{núm. líneas que entran} < 0.$$

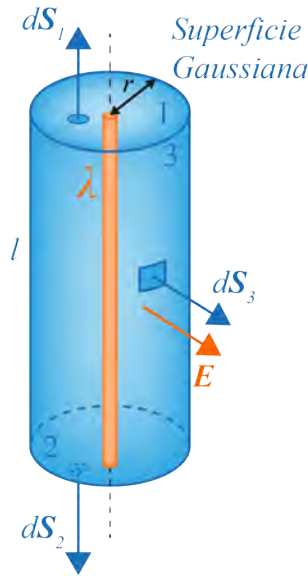
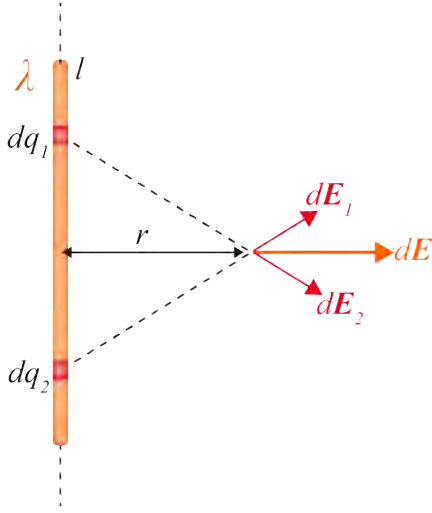
Aplicando la ley de Gauss

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} < 0 \quad \xLeftrightarrow{\varepsilon_0 > 0} \quad q_{int} < 0.$$

**Sol** Si el número de líneas entrantes son mayores que las salientes sobre una superficie cerrada, el flujo eléctrico será negativo y, por tanto, la carga neta en el interior de la superficie será negativa.

**Cuestión 2.4 — Campo eléctrico de un hilo infinito.** Encuentre el campo eléctrico a una distancia  $r$  desde un hilo de longitud infinita cargado uniformemente con densidad de carga lineal positiva  $\lambda$ .

*Solución:*



### (I) Análisis del problema

1. Un hilo puede considerarse de longitud infinita siempre que la distancia a la que se mide el campo sea mucho menor que la longitud del hilo,  $r \ll l$ .

2. Al tratarse de un hilo infinito podemos considerar que el campo es el mismo en todos los puntos del espacio que sean equidistantes al hilo.

3. Podemos considerar que el campo tiene dirección radial al hilo (dirección paralela al vector superficie de la cara lateral del hilo). La llamaremos dirección radial,  $\mathbf{E} = E\hat{r}$ .

4. Para calcular el campo eléctrico, dado la simetría del problema, aplicamos ley de Gauss haciendo uso de una superficie gaussiana cilíndrica,  $S$ , que tendrá la misma longitud que el hilo,  $l$ , radio la distancia a la que queremos calcular el campo,  $r$ , y será coaxial con el hilo.

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}.$$

5. Vemos que para aplicar la ley de Gauss, tendremos que calcular previamente el flujo eléctrico a través de cada una de las superficies que forman la geometría gaussiana (dos bases y una superficie lateral). Recordemos que la superficie gaussiana puede ser la superficie imaginaria que mejor se adapte a nuestro problema.

### (II) Resolución del problema

En primer lugar, calculamos el flujo eléctrico neto en la superficie gaussiana. Para ello, tengamos en cuenta que  $\mathbf{E} = E\hat{r}$ .

$$d\mathbf{S}_1 = dS_1 \hat{k} \Rightarrow \Phi_1 = \int_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_1 = 0,$$

$$d\mathbf{S}_2 = -dS_2 \hat{k} \Rightarrow \Phi_2 = \int_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_2 = 0,$$

$$d\mathbf{S}_3 = dS_3 \hat{r} \Rightarrow \Phi_3 = \int_{S_3} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_3 = E \int_{S_3} dS_3 = E2\pi rl.$$

Por tanto, el flujo neto a través de la superficie gaussiana es:

$$\Phi = \sum_{i=1}^3 \Phi_i = \Phi_3 = E2\pi rl.$$

A continuación, aplicamos la ley de Gauss:

$$\Phi = E2\pi rl = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q_{int}}{2\pi rl\varepsilon_0}.$$

Y teniendo en cuenta que estamos trabajando con una densidad lineal de carga,  $q_{int} = \lambda l$ , el campo eléctrico queda:

$$E = \frac{\lambda l}{2\pi rl\varepsilon_0} = \frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0} = 2k\frac{\lambda}{r}.$$

En la última igualdad se ha utilizado la relación entre constante de Coulomb y permitividad del vacío,  $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ .

**Sol** El campo eléctrico generado por un hilo infinito de longitud  $l$  cargado con densidad de carga lineal positiva  $\lambda$  es

$$E = \frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0} = 2k\frac{\lambda}{r} \xrightarrow{\mathbf{E}=E\hat{r}} \mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0}\hat{r} = 2k\frac{\lambda}{r}\hat{r}.$$

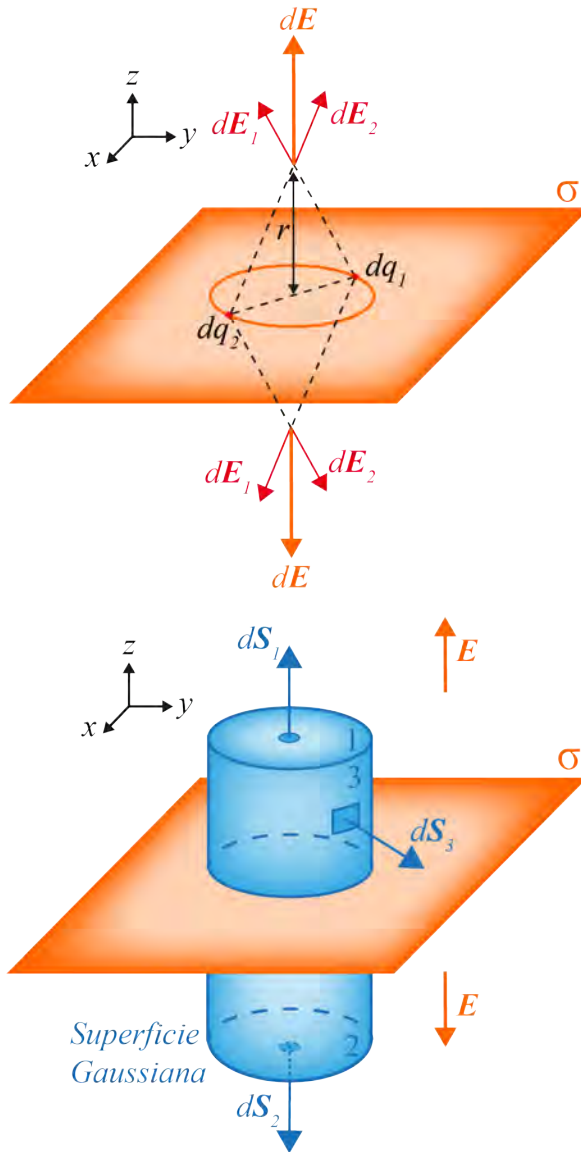
**!** Si el hilo no fuese infinito, el problema no tendría la simetría necesaria para aplicar la ley de Gauss y habría que calcular el campo eléctrico mediante integración directa, ecuación (1.9). La aproximación de hilo infinito se puede aplicar siempre que  $l \gg r$ .

**Cuestión 2.5 — Campo eléctrico de un plano infinito.** Encuentre el campo eléctrico que crea en el espacio un plano infinito cargado uniformemente con densidad de carga superficial positiva  $\sigma$ .

*Solución:*

**(I) Análisis del problema**

1. Un plano puede considerarse infinito siempre que sus dimensiones sean mucho mayores que la distancia a la que se calcula el campo.
2. Al tratarse de un plano infinito podemos considerar que el campo es el mismo en todos los puntos del espacio diferenciando entre las posiciones superiores e inferiores al plano.



3. Al tratarse de una carga distribuida de manera uniforme y dada la simetría del problema, podemos considerar que el campo tiene dirección normal al plano. En nuestro caso, el campo tendrá dirección  $z$  positiva si nos encontramos por encima del plano y negativa si estamos por debajo,

$$\mathbf{E} = \begin{cases} E \hat{k} & \text{si } z > 0 \\ -E \hat{k} & \text{si } z < 0. \end{cases}$$

4. Para calcular el campo eléctrico, dado la simetría del problema, aplicamos ley de Gauss haciendo uso de una superficie gaussiana cilíndrica,  $S$ , con bases paralelas al plano.

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}.$$

5. Vemos que para aplicar la ley de Gauss, tendremos que calcular previamente el flujo eléctrico a través de cada una de las superficies que forman la geometría gaussiana (dos bases y una superficie lateral).

## (II) Resolución del problema

En primer lugar, calculamos el flujo eléctrico neto en la superficie gaussiana. Para ello, tengamos en cuenta que:

1. la dirección del campo es positiva en  $z$  si estamos por encima del plano,  $\mathbf{E} = E \hat{k}$ , y negativa en  $z$  si estamos por debajo,  $\mathbf{E} = -E \hat{k}$ ,
2. las superficies de las dos bases del cilindro son iguales,  $S_1 = S_2 = S$ .

$$d\mathbf{S}_1 = dS_1 \hat{k} \Rightarrow \Phi_1 = \int_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_1 = E \int_{S_1} dS_1 = ES,$$

$$d\mathbf{S}_2 = -dS_2 \hat{k} \Rightarrow \Phi_2 = \int_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_2 = E \int_{S_2} dS_2 = ES,$$

$$d\mathbf{S}_3 = dS_3 \hat{r} \Rightarrow \Phi_3 = \int_{S_3} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_3 = 0.$$

Por tanto, el flujo neto a través de la superficie gaussiana es:

$$\Phi = \sum_{i=1}^3 \Phi_i = \Phi_1 + \Phi_2 = 2ES.$$

A continuación, aplicamos la ley de Gauss:

$$\Phi = 2ES = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q_{int}}{2S\varepsilon_0}.$$

Y teniendo en cuenta que estamos trabajando con una densidad superficial de carga,  $q_{int} = \sigma S$ , el campo eléctrico queda:

$$E = \frac{\sigma S}{2S\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

**Sol** El campo eléctrico generado en el espacio por un plano infinito cargado con densidad de carga superficial positiva  $\sigma$  es

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \Rightarrow \mathbf{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{k} & \text{si } z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{k} & \text{si } z < 0. \end{cases}.$$

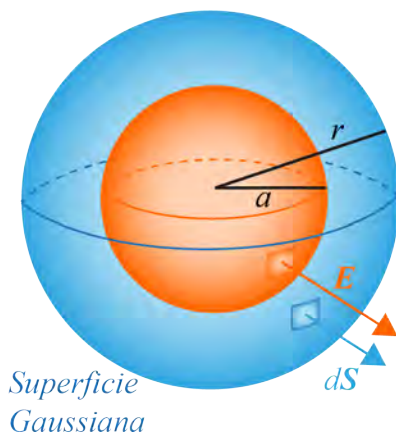
**!** Notar que el campo eléctrico generado por un plano infinito no depende de la distancia al plano.

**Cuestión 2.6 — Campo eléctrico de una esfera.** Encuentre el campo eléctrico que crea en el espacio una esfera cargada uniformemente en todo su volumen con carga  $Q > 0$ .

*Solución:*

En este caso podemos distinguir campo (a) fuera y (b) en el interior de la esfera:

**(a) Campo fuera de la esfera,  $r > a$**

**(I) Análisis del problema**

1. Al tratarse de una esfera con carga uniforme en todo su volumen, tenemos una simetría esférica y podemos aplicar ley de Gauss.

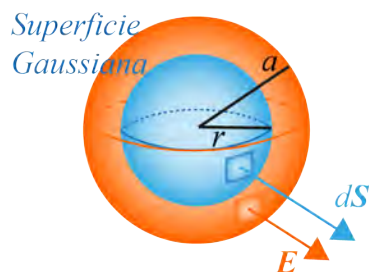
2. Dada la simetría del problema, podemos considerar que la magnitud del campo es la misma en todos los puntos del espacio que sean equidistantes al centro de la esfera. El campo tendrá dirección radial,  $\mathbf{E} = E\hat{r}$ .

3. Para aplicar la ley de Gauss, consideramos una superficie gaussiana esférica de radio  $r > a$ . Esta distancia coincidirá con el punto del espacio donde queremos calcular el campo eléctrico.

**(II) Resolución del problema**

Aplicamos ley de Gauss teniendo en cuenta que la carga interna de la esfera es  $q_{int} = Q$  y que la superficie de una esfera de radio  $r$  es  $S = 4\pi r^2$ :

$$\Phi = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \oint_S dS = E4\pi r^2 \stackrel{\text{L.Gauss}}{=} \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = k \frac{Q}{r^2}.$$

**(b) Campo en el interior de la esfera,  $r < a$** **(I) Análisis del problema**

1. Se puede considerar el mismo análisis del apartado anterior al tratarse de la misma simetría ( $\mathbf{E} = E\hat{r}$ )

2. Ahora consideramos una superficie gaussiana esférica de radio  $r < a$ . Por tanto, en esta caso, la carga interior que encierra la superficie gaussiana dependerá del punto en el que se mida el campo y será siempre menor que  $Q$  (o igual si estamos en la superficie de la esfera).

**(II) Resolución del problema**

En primer lugar, en este caso debemos tener en cuenta que la carga interna de la esfera gaussiana depende de la distancia,  $r$ , a la que se mide el campo, y que el volumen de una esfera de radio,  $r$ , es  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ .

$$q_{int} = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Aplicamos ley de Gauss:

$$\Phi = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \oint_S dS = E 4\pi r^2 \stackrel{\text{L. Gauss}}{=} \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}.$$

Y, para expresar el resultado en función de la carga total de la esfera  $Q$ , tengamos ahora en cuenta que la densidad de carga de la esfera cargada de radio  $a$  es  $\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3}$ . Despejando esta densidad de campo en el valor de magnitud de campo obtenido previamente se tiene que:

$$E = \frac{\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3} r}{3\varepsilon_0} = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3} = k \frac{Qr}{a^3}.$$

**Sol** El campo eléctrico generado en el espacio por un plano infinito cargado con densidad de carga superficial positiva  $\sigma$  es

$$E = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = k \frac{Q}{r^2} & \text{si } r > a \\ \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3} = k \frac{Qr}{a^3} & \text{si } r < a. \end{cases} \Rightarrow \mathbf{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{r} = k \frac{Q}{r^2} \hat{r} & \text{si } r > a \\ \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3} \hat{r} = k \frac{Qr}{a^3} \hat{r} & \text{si } r < a. \end{cases}$$

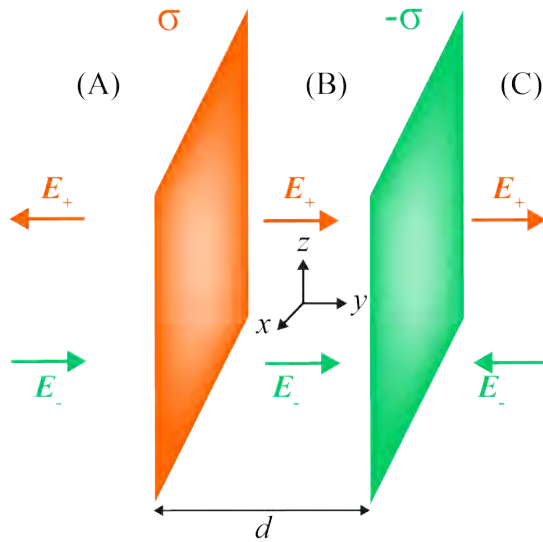
**!** Notar que el campo eléctrico generado por una esfera con carga  $Q$  uniforme para  $r > a$  es igual al campo que crearía una carga puntual de valor  $Q$  a la misma distancia.

**Cuestión 2.7 — Campo eléctrico planos paralelos.** Considere dos planos infinitos paralelos, separados por una distancia  $d$  y cargados con densidades de carga uniforme  $\sigma$  y  $-\sigma$  respectivamente. Evalúe el campo eléctrico en el espacio entre los planos y fuera de ellos.

*Solución:*

**(I) Análisis del problema**

Suponiendo que la distancia entre planos  $d$  es mucho menor que las dimensiones de los planos, podemos considerar ambos planos como infinitos.



El campo creado por un plano infinito cargado con densidad superficial uniforme  $\sigma$  es:

$$\mathbf{E}_+ = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{j} & \text{si } y > y_0, \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{j} & \text{si } y < y_0. \end{cases}$$

Análogamente, el campo creado por un plano infinito cargado con densidad superficial uniforme  $-\sigma$  será:

$$\mathbf{E}_- = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{j} & \text{si } y > y_0, \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{j} & \text{si } y < y_0. \end{cases}$$

Donde  $y_0$  es la posición del plano.

## (II) Resolución del problema

Supongamos que el plano con carga positiva se localiza en  $y_0 = -d/2$  y que el cargado negativamente está en  $y_0 = d/2$ .

El campo creado por ambos planos será la suma del campo creado por cada plano por separado,  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-$ . Distinguimos tres regiones en el cálculo del campo:

$$(A) \ y < -d/2 : \Rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{j} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{j} = 0.$$

$$(B) \ -d/2 < y < d/2 : \Rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{j} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{j} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{j}.$$

$$(C) \ y > d/2 : \Rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{j} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{j} = 0.$$

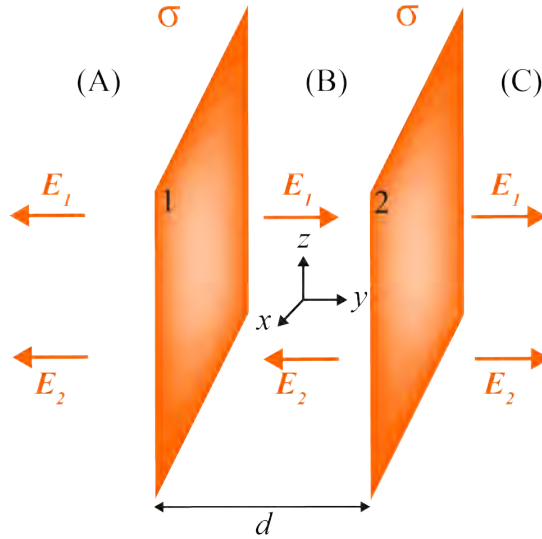
**Sol** El campo eléctrico generado por dos planos infinitos con densidades de carga  $\sigma$  y  $-\sigma$  es nulo en todo el espacio salvo entre placas, donde el campo es:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{j}.$$

**Cuestión 2.8 — Campo eléctrico planos paralelos de igual carga.** Repita la cues-

tión anterior con ambos planos cargados con igual densidad de carga  $\sigma$ . ¿Cambiaría el resultado si ambos planos están cargados con densidad de carga  $-\sigma$ ?

*Solución:*



### (I) Análisis del problema

Suponiendo que la distancia entre planos  $d$  es mucho menor que las dimensiones de los planos, podemos considerar ambos planos como infinitos.

En este caso solo necesitamos saber el campo creado por un plano infinito cargado con densidad superficial uniforme  $\sigma$ :

$$\mathbf{E}_+ = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{j} & \text{si } y > y_0, \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{j} & \text{si } y < y_0. \end{cases}$$

Donde  $y_0$  es la posición del plano.

### (II) Resolución del problema

Supongamos que el plano 1 se localiza en  $y_0 = -d/2$  y que el plano 2 está en  $y_0 = d/2$ .

El campo creado por ambos planos será la suma del campo creado por cada plano por separado,  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ . Distinguiamos tres regiones en el cálculo del campo:

$$(A) \ y < -d/2 : \Rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{j} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{j} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{j}.$$

$$(B) \ -d/2 < y < d/2 : \Rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{j} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{j} = 0.$$

$$(C) \ y > d/2 : \Rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{j} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{j} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{j}.$$

**Sol** El campo eléctrico generado por dos planos infinitos con densidades de carga  $\sigma$  es:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{j} & \text{si } y < -d/2, \\ 0 & \text{si } -d/2 < y < d/2, \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{j} & \text{si } y > d/2. \end{cases}$$

Para el caso en el que ambos planos tengan densidad de carga  $-\sigma$ , el campo será de igual magnitud pero en sentido contrario al mostrado para dos planos con densidad de carga  $\sigma$ :

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{j} & \text{si } y < -d/2, \\ 0 & \text{si } -d/2 < y < d/2, \\ -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{j} & \text{si } y > d/2. \end{cases}$$

**Cuestión 2.9 — Ley Gauss - Ley Coulomb.** ¿Cuál es una ley más general la ley de Coulomb o la ley de Gauss?

*Sugerencia: a partir de la ley de Gauss, calcule el campo eléctrico producido por una carga puntual  $q$  en un punto que está a una distancia  $r$  de ella.*

**Sol** La ley de Gauss es más general que la ley de Coulomb. Para probarlo, vamos a demostrar que la ley de Coulomb puede obtenerse a partir de la ley de Gauss.

*-Demostración-*

Supongamos que tenemos una carga puntual positiva,  $q$ . Podemos calcular el campo eléctrico generado por dicha carga aplicando ley de Gauss con una superficie gaussiana esférica de radio  $r$  envolviendo a la carga puntual.

$$\Phi = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \oint_S dS = E 4\pi r^2 = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = k \frac{q}{r^2}.$$

Por simetría podemos afirmar que el campo eléctrico tendrá simetría radial, por tanto

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{r} = k \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (\text{Ley de Coulomb})$$

Vemos, por tanto, cómo es posible obtener la ley de Coulomb a partir de la ley de Gauss aplicada a una carga puntual.

**Cuestión 2.10 — Carga en un conductor en equilibrio.** Use la ley de Gauss para demostrar que, en un conductor en equilibrio electrostático, la carga eléctrica se encuentra en su superficie.

**Sol** Recordemos que el campo eléctrico es nulo en el interior de un material en equilibrio electrostático.

Supongamos un conductor con forma aleatoria en equilibrio electrostático. Si aplicamos la ley de Gauss a una superficie gaussiana  $S$  cerrada y que se encuentra en el interior del material conductor obtendremos que

$$\Phi = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \xrightarrow{E=0} q_{int} = 0.$$

Esto se cumple para toda superficie gaussiana que esté dentro del conductor por tanto, podemos concluir que no existe carga en el interior del conductor. Ante esta situación, solo es posible que la carga se acumule en la superficie del metal.

**Cuestión 2.11 — Jaula de Faraday.** Ver cómo plantearlo

**Cuestión 2.12** El campo eléctrico en la superficie de un conductor perfecto es siempre perpendicular a ésta. Use este resultado para demostrar que fuera de dicha la magnitud del campo eléctrico es  $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ . Donde  $\sigma$  es la densidad de carga superficial del conductor.

## 2.6 Problemas

### Ley de Gauss

**Problema 2.1 — Flujo eléctrico y carga neta en un cubo.** Un cubo de lado 1 m porta dos cargas en su interior:  $q_1 = +1\mu\text{ C}$  y  $q_2 = -1\mu\text{ C}$ . La posición de  $q_1$  es 20 cm encima del centro del cubo, mientras que  $q_2$  está en el centro de dicho hexaedro.

- ¿Cuál es el flujo eléctrico a través del cubo?
- Y si eliminamos la carga  $q_2$  y colocamos solamente la primera carga  $q_1$  a 1.25 m encima del centro del cubo, ¿cuál sería flujo eléctrico? Justifique en ambos casos su respuesta.

*Solución:*

a)

Según la ley de Gauss, el flujo de campo eléctrico a través de cualquier superficie gaussiana es igual a la carga eléctrica neta que encierra dicha superficie dividida por la constante dieléctrica, ecuación (2.3).

La carga neta que encierra el cubo en su interior es  $q_{int} = q_1 + q_2 = 0$ , por tanto, el flujo eléctrico en el interior del cubo es  $\Phi = 0$ .

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = 0.$$

b)

Si ahora eliminamos  $q_2$ , la carga neta será distinta de cero. Independientemente, de dónde se coloque  $q_1$ , el flujo eléctrico será

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{q_1}{\varepsilon_0} = \frac{1 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2} = 1.13 \cdot 10^5 \text{ Nm}^2.$$

### Revisar resultados

**Sol** El flujo eléctrico es nulo en la situación en la que hay dos cargas en el interior del cubo, ya que en este caso la carga neta es cero.

El flujo eléctrico es  $1.13 \cdot 10^5 \text{ Nm}^2$  cuando únicamente la carga  $q_1$  está en el interior del cubo (independientemente de su localización).

### Problema 2.2 — exercise.



- 3.1 Energía potencial eléctrica
- 3.2 Diferencia de potencial
- 3.3 Campo eléctrico y potencial
- 3.4 Cuestiones
- 3.5 Problemas



## 3. Potencial Eléctrico

### 3.1 Energía potencial eléctrica

Cuando una carga  $q$  se mueve de un punto  $A$  a otro  $B$  dentro de un campo eléctrico  $\mathbf{E}$ , experimenta una fuerza eléctrica  $\mathbf{F}$  y realiza un **trabajo** que se define como

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}, \quad (3.1)$$

donde  $d\mathbf{r}$  es un desplazamiento infinitesimal realizado por  $q$  en el trayecto de  $A$  a  $B$ .

La fuerza eléctrica es una fuerza conservativa y, por tanto, tiene asociada una **energía potencial** que se define como la energía que posee una carga eléctrica debido a su posición en un campo eléctrico. Esta energía puede expresarse como el trabajo necesario para mover una carga  $q$  desde un punto  $A$  a otro  $B$  en el seno de un campo eléctrico  $\mathbf{E}$ , cambiado de signo.

$$\Delta U = U_B - U_A = -W = -q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}. \quad (3.2)$$

La unidad de trabajo y de energía potencial en el SI es el julio, J.

### Relación Energía Potencial-Trabajo

En el caso en el que una carga  $q$  se mueve dentro de un campo eléctrico  $\mathbf{E}$  de un punto  $A$  a otro  $B$ , el trabajo sobre la carga es  $W = -\Delta U = U_A - U_B$ . En esta situación podemos distinguir:

- Si  $U_A > U_b$  tendremos una pérdida de energía potencial  $\Delta U < 0$  que es el trabajo necesario para llevar a la carga de  $A$  hacia  $B$ ,  $W > 0$ . Tenemos una "caída" de energía.
- Si  $U_A < U_b$  tendremos una ganancia de energía potencial  $\Delta U > 0$  que equivale a la fuerza externa necesaria para realizar el trabajo necesario para incrementar la energía del sistema,  $W < 0$ . Tenemos una "subida" de energía.

## 3.2 Diferencia de potencial

Se define la **diferencia de potencial eléctrico** (o simplemente **potencial**) como el trabajo por unidad de carga que realiza una fuerza eléctrica al mover una carga  $q$  entre los puntos  $A$  y  $B$  en un campo eléctrico  $E$ .

$$\Delta V = V_B - V_A = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}. \quad (3.3)$$

Como podemos ver en la expresión anterior, la diferencia de potencial eléctrico está directamente relacionada con la energía potencial eléctrica a partir de la expresión

$$\Delta U = q\Delta V. \quad (3.4)$$

La unidad de potencial eléctrico es el julio partido por culombio, J/C, que en el *SI* recibe el nombre de voltio, V.

⚠ De la ecuación (3.3) se puede deducir que las unidades de campo eléctrico son voltio por metro, V/m. Estas unidades equivalen a newton por coulombio, N/C, vista en el Tema 1.

⚠ No confundir diferencia de energía potencial eléctrico,  $\Delta U$ , con diferencia de potencial eléctrico,  $\Delta V$ . Mientras que la diferencia de potencial no depende de la carga testigo  $q$  y es una propiedad del espacio, la diferencia potencial eléctrico sí depende de la carga testigo y de la posición en la que se ubica.

### 3.2.1 Potencial de una carga puntual

A partir del campo creado por una carga puntual  $q_0$  dado en la ecuación (1.7) y de la definición de potencial eléctrico dada en la ecuación (3.3), se puede obtener el potencial eléctrico debido a una carga puntual:

$$V = \frac{k}{q_0} r. \quad (3.5)$$

Y la energía potencial eléctrica cuando una carga testigo  $q$  se coloca a una distancia  $r$  de  $q_0$  como:

$$U(r) = qV(r) = k \frac{q_0 q}{r}. \quad (3.6)$$

⚠ Esta energía potencial se puede interpretar como el trabajo necesario para desplazar la carga testigo  $q$  desde  $r$  hasta el infinito (muy alejada de la carga fuente  $q_0$ ).

### Principio de superposición de potenciales eléctricos

En un sistema de  $n$  cargas puntuales, el potencial eléctrico total es la suma los potenciales debidos a cada una de las cargas por separado

$$V = \sum_{i=1}^n \frac{k}{q_i} r_i. \quad (3.7)$$

donde  $r_i$  es la distancia de cada carga fuente al punto donde se calcula el potencial y  $q_i$  son cada una de las cargas fuentes.

#### 3.2.2 Potencial de distribución de carga

El potencial creado por una distribución de carga continua  $dq$  viene dado por la siguiente expresión

$$V = k \int \frac{dq}{r} \quad (3.8)$$

donde el valor de diferencial de carga dependerá de si se trabaja con una distribución lineal ( $dq = \lambda dl$ ), superficial ( $dq = \sigma dS$ ) o volumétrica ( $dq = \rho dV$ ).

### 3.3 Campo eléctrico y potencial

En la ecuación (3.3) se obtiene el valor del potencial a partir del campo eléctrico. Con la operación inversa, se demuestra que el campo eléctrico es igual a menos el gradiente del potencial eléctrico:

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\left( \frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k} \right). \quad (3.9)$$

### 3.4 Cuestiones

#### Energía potencial eléctrica

**Cuestión 3.1 — Circulación del campo eléctrico.** Sabiendo que dada una magnitud vectorial  $\mathbf{F}$ , se define la circulación de  $\mathbf{F}$  sobre una curva cerrada  $C$  como  $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , calcule la circulación del campo eléctrico sobre una trayectoria cerrada,  $C$ .

*Solución:*

Para obtener la circulación del campo eléctrico a lo largo de la trayectoria  $C$ , supongamos el movimiento de una carga  $q$  en un campo eléctrico  $E$  en un camino cerrado (origen  $A$  - final  $A$ ) y calculemos su variación de energía potencial:

$$\left. \begin{aligned} \Delta U &= -q \int_A^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -q \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}, \\ \Delta U &= U_A - U_A = 0 \end{aligned} \right\} \xLeftrightarrow{q \neq 0} \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

**Sol** La circulación del campo eléctrico sobre una trayectoria cerrada es nula,

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

**Cuestión 3.2 — Sistema ligado.** Un sistema formado por dos cargas puntuales tiene una energía potencial negativa, ¿qué se puede deducir sobre el signo de dichas cargas? ¿Cuál es el significado físico de que la energía sea negativa?

De la ecuación (3.6) sabemos que la energía potencial entre dos cargas puntuales  $q_1$  y  $q_2$  es:

$$U(r) = k \frac{q_1 q_2}{r}.$$

Para que la energía potencial en el sistema sea negativa, se tiene que cumplir que ambas cargas sean de signos opuestos:

$$U(r) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad q_1 q_2 < 0.$$

**Sol** Ambas cargas tienen signo opuesto.

Los sistemas físicos evolucionan hacia los sistemas de mínima energía. Por tanto, en este caso, tenemos un sistema estable ya que las cargas se atraen entre sí y tienden a permanecer juntas. En este caso, el trabajo realizado por el campo eléctrico para llevar las cargas desde el infinito hasta su posición actual es positivo. Esto significa que el campo eléctrico realiza trabajo para acercar las cargas, liberando energía en el proceso. Esto es lo que se conoce como un sistema ligado, en el que habría que aplicar un trabajo negativo para llevarlas al infinito y separarlas.

**Cuestión 3.3 — Carga en la dirección del campo.** Si una carga se desplaza una corta distancia en la dirección de un campo eléctrico, ¿su energía potencial electrostática se incrementa o se reduce?

**Sol**

Si trabajamos con una carga positiva,  $q > 0$ , se tiene que  $\Delta U < 0$ , es decir, una carga positiva que se mueve en la dirección de un campo eléctrico uniforme pierde energía potencial.

Si trabajamos con una carga negativa,  $q < 0$ , se tiene que  $\Delta U > 0$ , es decir, una carga negativa que se mueve en la dirección de un campo eléctrico uniforme requiere de una fuerza externa que incremente su energía potencial.

Para más detalles ver la cuestión 3.4.

## Potencial eléctrico

**Cuestión 3.4 — electrón-voltio.** Obtenga la equivalencia en julios de un electrón-voltio. *Nota: un electrón-voltio (eV) es una unidad de energía que se define como el trabajo realizado para trasladar la carga de un electrón entre dos puntos bajo una diferencia de potencial eléctrico de 1 V.*

*Solución:*

Para obtener la equivalencia electrón-voltios a julios, calculamos el trabajo que realiza un electrón al moverse entre dos puntos bajo una diferencia de potencial  $\Delta V = 1 \text{ V}$ :

$$W = e \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \stackrel{ec(3.3)}{=} -e\Delta V = -(-1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C})1 \text{ V} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ CV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

**Sol** La equivalencia en julios de un electrón-voltio es

$$1\text{eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot \text{J}$$

**Cuestión 3.5 —  $\Delta V$  y  $\Delta U$  en un campo eléctrico uniforme.** a) Justifique por qué las líneas de campo eléctrico se orientan en la dirección donde disminuye el potencial eléctrico.

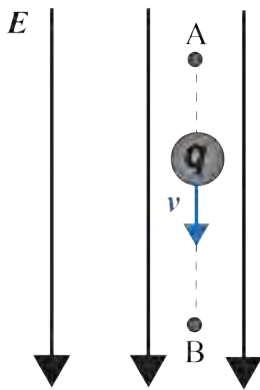
b) Analice el comportamiento de una carga positiva al desplazarse en un campo eléctrico uniforme. ¿Qué sucede con su energía potencial?

c) Explique por qué es necesario aplicar una fuerza externa para mover una carga negativa en la misma dirección que un campo eléctrico uniforme.

*Nota: Para todos los casos puede suponer una carga  $q$  que se mueve entre dos puntos  $A$  y  $B$  separados por una distancia  $r$  bajo un campo eléctrico uniforme  $E$ .*

*Solución:*

Sea una carga  $q$  que se mueve una distancia  $r$  en una dirección paralela a un campo uniforme  $E$ . Bajo esta situación tendremos que el ángulo entre campo eléctrico y vector de desplazamiento de la carga es  $\theta = 0$ .



El potencial eléctrico de dicha carga puede obtenerse a partir de la ecuación (3.2):

$$\Delta V = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_A^B E \cos \theta dr = -E \int_A^B dl = -Er.$$

Podemos comprobar que  $\Delta V < 0$ , ya que  $E > 0$  y  $r > 0$  al tratarse del módulo de  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{r}$ , respectivamente. Es decir, el punto  $B$  tiene menor potencial eléctrico que  $A$ .

En la situación anterior, la variación de energía potencial es

$$\Delta U = q\Delta V = -qEr.$$

**Sol**

a) El potencial eléctrico de una carga que, dentro de un campo eléctrico, se mueve entre  $A$  y  $B$  es negativo. Esto explica que las líneas de campo se orientan hacia direcciones decrecientes del campo eléctrico.

b) Si trabajamos con una carga positiva,  $q > 0$ , se tiene que  $\Delta U < 0$ , es decir, una carga positiva que se mueve en la dirección de un campo eléctrico uniforme pierde energía potencial.

- c) Si trabajamos con una carga negativa,  $q < 0$ , se tiene que  $\Delta U > 0$ , es decir, una carga negativa que se mueve en la dirección de un campo eléctrico uniforme requiere de una fuerza externa que incremente su energía potencial.

**Cuestión 3.6 — Electrones y protones bajo potenciales eléctricos.** Se coloca un electrón y un protón en una región donde existan zonas de alto y bajo potencial eléctrico. Analiza y explica hacia dónde se desplazará cada partícula, considerando que los sistemas físicos tienden naturalmente a minimizar su energía.

*Solución:*

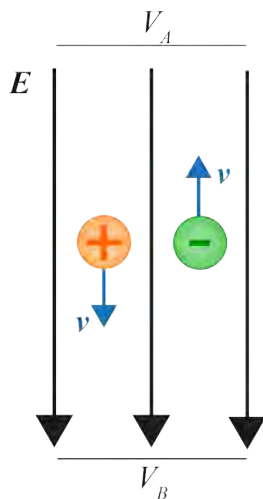
### (A) Análisis de la cuestión

Los sistemas físicos tienden a minimizar su energía. Por tanto, cuando una partícula se desplaza desde  $A$  hacia  $B$  de manera natural, se cumple que  $U_B < U_A$ . Esto implica que  $\Delta U = U_B - U_A > 0$ . Así, la condición para que un sistema físico tienda a minimizar su energía es que  $\Delta U < 0$ .

### (B) Resolución de la cuestión

Estudiamos la variación de energía potencial de un electrón y de un protón en una región donde existe un potencial eléctrico:

- Para un electrón,  $q < 0$ :



$$\Delta U = q\Delta V \rightarrow \begin{cases} \text{si } \Delta V > 0 & \Rightarrow \Delta U < 0, \\ \text{si } \Delta V < 0 & \Rightarrow \Delta U > 0. \end{cases}$$

Un electrón se moverá hacia las zonas de mayor potencial eléctrico, es decir, en sentido contrario al campo eléctrico.

- Para un protón,  $q > 0$ :

$$\Delta U = q\Delta V \rightarrow \begin{cases} \text{si } \Delta V > 0 & \Rightarrow \Delta U > 0, \\ \text{si } \Delta V < 0 & \Rightarrow \Delta U < 0. \end{cases}$$

Un protón se moverá hacia las zonas de menor potencial eléctrico, es decir, en el mismo sentido que el campo eléctrico.

**Sol** Los electrones se desplazan desde las regiones de menor potencial eléctrico hacia las de mayor potencial para reducir su energía potencial. En contraste, los protones se mueven desde las regiones de mayor potencial hacia las de menor potencial.

**Cuestión 3.7 — Potencial eléctrico a partir del campo.** Determine el potencial eléctrico en función de la variable  $z$  para un campo eléctrico  $\mathbf{E} = E \hat{k}$ . Nota: Asuma que  $V(z = 0) = 0$ .

*Solución:*

Conocido el campo eléctrico, podemos determinar el valor del potencial a partir de la ecuación (3.2), teniendo en cuenta que se pide en función de la variable  $z$  ( $d\mathbf{r} = dz \hat{k}$ ):

$$\Delta V = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_0^z E \hat{k} \cdot dz \hat{k} = -E \int_0^z dz = -Ez.$$

**Sol** Dado un campo eléctrico  $\mathbf{E} = E \hat{k}$ , el potencial eléctrico es

$$V(z) = -Ez.$$

**Cuestión 3.8 — Potencial eléctrico carga puntual.** A partir del campo eléctrico de una carga puntual y de la definición de potencial eléctrico, demuestre matemáticamente el valor del potencial debido a una carga puntual  $q_0$ .

*Solución:*

Del Tema 1 sabemos que el campo eléctrico producido por una carga puntual  $q_0$  a una distancia  $r$  viene dado por la ecuación (1.7). Además en este tema hemos visto que el potencial eléctrico se puede calcular a partir de la ecuación (3.3). Combinando ambas expresiones, podemos obtener el valor del potencial en  $r$  debido a una carga puntual  $q_0$ .

$$\Delta V = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \stackrel{ec.(1.7)}{=} - \int_A^B \left( k \frac{q_0}{r^2} \hat{r} \right) \cdot dr \hat{r} = -kq_0 \int_A^B \frac{1}{r^2} dr = -kq_0 \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

Considerando el punto  $A$  como el infinito ( $r_A \rightarrow \infty$ ) y el punto  $B$  como aquel en el que se desea calcular el potencial  $r_B = r$ , se tiene que  $V_A = V(r \rightarrow \infty) = 0$  y que  $V_B = v(r)$ . Por tanto, el potencial debido a la carga puntual se puede calcular como:

$$\Delta V = V_B - V_A = kq_0 \frac{1}{r} \xrightarrow{V_A=0} V(r) = kq_0 \frac{1}{r}$$

**Sol**

El potencial debido a una carga puntual  $q_0$  es

$$V(r) = kq_0 \frac{1}{r}$$

**Cuestión 3.9 — Potencial constante bajo un campo eléctrico.** Dada una región del espacio donde existe un campo eléctrico, ¿en qué dirección podemos desplazarnos sin que el potencial eléctrico cambie?

La relación entre campo eléctrico y potencial viene dada por la ecuación (3.9):

$$\Delta V = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}.$$

Si el potencial eléctrico no cambia tendremos que,

$$\Delta V = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{E} \perp d\mathbf{r}.$$

**Sol**

Debemos desplazarnos en la dirección perpendicular al campo para que el potencial eléctrico no cambie durante el desplazamiento.

**Cuestión 3.10 — Puntos equipotenciales en un conductor.** Pruebe que todos los puntos en la superficie de un conductor en equilibrio tienen el mismo potencial.

**Sol**

Sabemos que en el interior de un conductor en equilibrio electrostático el campo eléctrico es nulo. Si realizamos un desplazamiento entre dos puntos de la superficie del conductor,  $A$  y  $B$ , pasando por el interior del conductor, se cumplirá que:

$$\Delta V = V_B - V_A = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \stackrel{\mathbf{E}=0}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta V = V_B - V_A = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B = V_A. \quad \square$$

## Campo eléctrico y potencial

**Cuestión 3.11 — Campo eléctrico a partir del potencial.** En cierta región del espacio hay un potencial que viene dado por la expresión  $V(x) = 100 - \alpha x + \beta y^2$  V. Determine el campo eléctrico que existe en dicha región del espacio.

*Solución:*

Conocido el campo eléctrico en una región del espacio, sabemos que podemos determinar el valor del campo eléctrico a partir de la ecuación (3.9):

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k}\right) = -\left(-\alpha \hat{i} + 2\beta \hat{j} + 0 \hat{k}\right) = \alpha \hat{i} - 2\beta \hat{j} \text{ V/m.}$$

**Sol**

Dado un potencial  $V(x) = 100 - \alpha x + \beta y^2$  V en una región del espacio, el campo eléctrico en dicha región es

$$\mathbf{E} = \alpha \hat{i} - 2\beta \hat{j} \text{ V/m.}$$

**Cuestión 3.12 — Potencial de un conductor en equilibrio electrostático.** Sabiendo que en un conductor en equilibrio electrostático el campo eléctrico en su interior es nulo, ¿cómo es el potencial eléctrico dentro del conductor?

*Solución:*

Haciendo uso de la ecuación que relación potencial con campo eléctrico, ecuación (3.9):

$$\mathbf{E} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad E_{x_i} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad V = cte.$$

**Sol**

En el interior de un conductor en equilibrio electrostático el potencial eléctrico es constante.

## 3.5 Problemas

### Potencial eléctrico

**Problema 3.1 — Civil War.** Durante un experimento en sus laboratorios, *Industrias Stark* ha descubierto una nueva partícula subatómica denominada "guerrerrón" ( $q_g = -3.2 \cdot 10^{-19}$  C). Esta partícula tiene un comportamiento inusual cuando se combina con el *pacheconio* ( $q_{ph} = 3.2 \cdot 10^{-19}$  C). Para estas dos partículas, calcule:

- El potencial eléctrico creado por el *pacheconio* a una distancia  $r = 5$  nm.
- La energía potencial eléctrica del *guerrerrón* cuando se sitúa a 5 nm del *pacheconio*.

*Solución:*

- Podemos calcular el potencial eléctrico del *pacheconio* a partir de la ecuación (3.5):

$$V = k \frac{q_{ph}}{r} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \frac{3.2 \cdot 10^{-19} \text{ C}}{5 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 0.32 \text{ V}.$$

- Para calcular la energía potencial del *guerrerrón* cuando se encuentra a 5 nm del *pacheconio* utilizamos la ecuación (3.6):

$$U = k \frac{q_{ph} q_g}{r} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \frac{3.2 \cdot 10^{-19} \text{ C} (-3.2 \cdot 10^{-19} \text{ C})}{5 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = -1.02 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

**Sol**

El potencial eléctrico creado por el *pacheconio* a 5 nm es 0.32 V.

La energía potencial eléctrica cuando el *guerrerrón* se localiza a 5 nm del *pacheconio* es  $-1.02 \cdot 10^{-19}$  J.

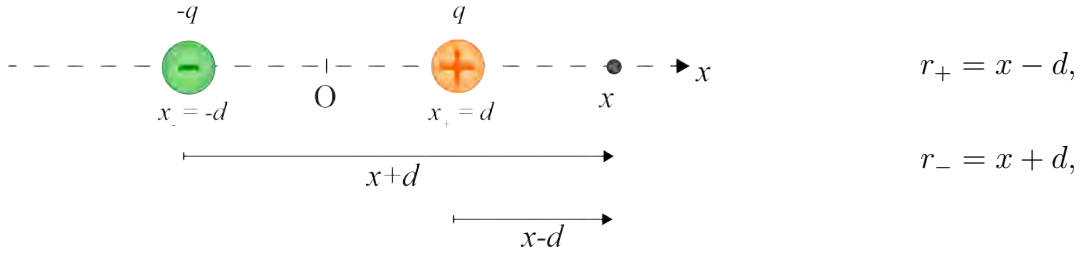
Revisar problema y resultados

**Problema 3.2 — Potencial de un dipolo eléctrico.** Suponga un dipolo formado por dos cargas de igual magnitud pero de signo contrario separadas una distancia  $d$ .

- Calcule el potencial eléctrico de un dipolo en un punto sobre su eje que está a una distancia  $x$ .
- Calcule el campo eléctrico a una distancia  $x$  creado por el dipolo.

*Nota: Suponga que el punto donde se calcula tanto el potencial como el campo eléctrico es mucho mayor que la distancia que separa las cargas del dipolo,  $x \gg d$ .*

*Solución:*



a)

1. En este problema, llamaremos  $V_+$  y  $V_-$  a los potenciales generados por las cargas puntuales  $q_+$  y  $q_-$ , respectivamente. Se pueden obtener a partir de la ecuación del potencial eléctrico para cargas puntuales (3.5):

$$V_+ = k \frac{q_+}{r_+} = k \frac{q}{x - d},$$

$$V_- = k \frac{q_-}{r_-} = -k \frac{q}{x + d}.$$

2. Aplicando el principio de superposición de potenciales eléctricos:

$$V = V_+ + V_- = kq \left( \frac{1}{x - d} - \frac{1}{x + d} \right) = kq \frac{x + d - x - d}{(x - d)(x + d)} = kq \frac{2d}{x^2 - d^2}.$$

3. Como se tiene que  $l \gg d$ , el resultado se puede aproximar por:

$$V \approx k \frac{2qd}{x^2}.$$

b)

Conocido el potencial eléctrico, podemos determinar el campo eléctrico en  $l$  haciendo uso de la ec. (3.9):

$$\mathbf{E} = \nabla V \quad \Rightarrow \quad E_x = -\frac{dV}{dx} \approx -k \frac{4qd}{x^3}.$$

Por tanto, el campo eléctrico será:

$$\mathbf{E} \approx -k \frac{4qd}{x^3} \hat{i}.$$



El potencial eléctrico creado por el dipolo en  $x$  es  $V \approx \frac{2kqd}{x^2}$ .

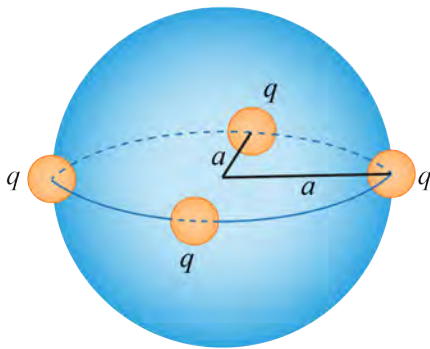
El campo eléctrico creado por el dipolo en  $x$  es  $\mathbf{E} \approx \frac{4kqd}{x^3} \hat{i}$ .

**Problema 3.3 — Teracristalización.** Un orbe de *teracristal* es una esfera de radio  $a = 90$  cm que encierra en su interior el poder de la cristalización. Para ello requiere de varias cargas de  $5 \mu\text{C}$  que actúan como fuentes de energía y que se disponen a lo largo del ecuador de dicha esfera en intervalos de  $90^\circ$ .

- Calcule el potencial eléctrico en el centro de la esfera.
- Calcule el potencial eléctrico en el polo norte de la esfera.

*Solución:*

a)

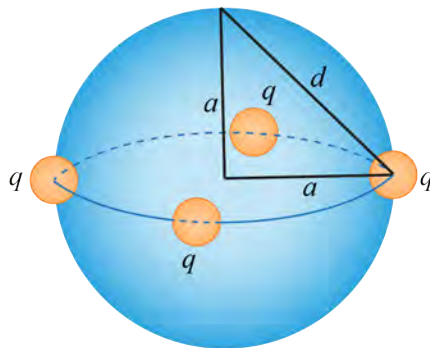


- Para todas las cargas  $r = a$ .
- Aplicando el principio de superposición:

$$V = \sum_{i=1}^4 V_i = \sum_{i=1}^4 k \frac{q}{r} = 4k \frac{q}{a} =$$

$$= 4 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \frac{5 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{90 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 2 \cdot 10^5 \text{ V}.$$

b)



- Para todas las cargas

$$r = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

- Aplicando el principio de superposición:

$$V = \sum_{i=1}^4 V_i = \sum_{i=1}^4 k \frac{q}{r} = 4k \frac{q}{a\sqrt{2}} =$$

$$= 4 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \frac{5 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{90 \cdot 10^{-2} \text{ m} \sqrt{2}} = 1.4 \cdot 10^5 \text{ V}.$$

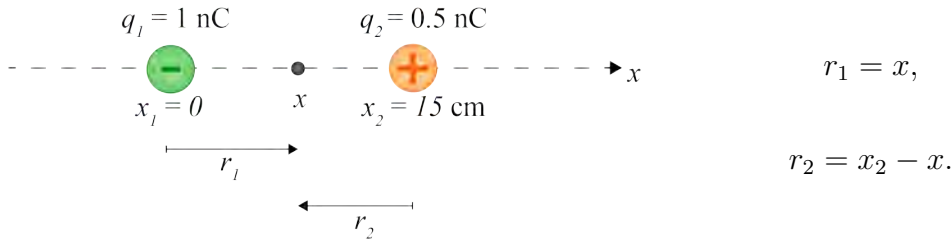
**Sol**

El potencial eléctrico creado en el centro de la esfera es  $2 \cdot 10^5 \text{ V}$ .

El potencial eléctrico creado en el polo norte de la esfera es  $1.4 \cdot 10^5 \text{ V}$ .

**Problema 3.4 — Potencial debido a dos cargas puntuales.** Se dispone de dos cargas a lo largo del eje  $x$ :  $q_1 = 1 \text{ nC}$  y  $q_2 = 0.5 \text{ nC}$  situadas en el origen y en  $x = 15 \text{ cm}$  respectivamente. Calcule el punto del eje  $x$  situado entre las cargas en el que el potencial creado por ambas cargas es mínimo.

*Solución:*



Sean  $V_1$  y  $V_2$  los potenciales creados por  $q_1$  y  $q_2$  respectivamente. El potencial creado en  $x$  por ambas cargas se puede calcular a partir del principio de superposición:

$$V = V_1 + V_2 = k \frac{q_1}{r_1} + k \frac{q_2}{r_2} = k \left( \frac{q_1}{x} + \frac{q_2}{x_2 - x} \right).$$

El punto  $x$  entre  $x_1$  y  $x_2$  en el que el potencial se hace mínimo puede calcularse resolviendo un problema de optimización para  $x$ .

$$\frac{dV}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} \left[ k \frac{q_1}{x} + k \frac{q_2}{x_2 - x} \right] = -k \frac{q_1}{x^2} + k \frac{q_2}{(x_2 - x)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_2 - x)^2 = \frac{q_2}{q_1} x^2 \Rightarrow \left( \frac{q_2}{q_1} - 1 \right) x^2 + 2x_2 x - x_2^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left( \frac{0.5}{1} - 1 \right) x^2 + 2 \cdot 15 \cdot 10^{-2} x - (15 \cdot 10^{-2})^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -0.5x^2 + 30 \cdot 10^{-2} x - 225 \cdot 10^{-4} = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0.51 \text{ m} = 51 \text{ cm}, \\ 0.08 \text{ m} = 8 \text{ cm}. \end{cases}$$

$q_1$  se encuentra en el origen y  $q_2$  en  $x_2 = 15 \text{ cm}$ , por tanto, el punto entre cargas que hace mínimo el potencial es  $x = 8 \text{ cm}$ .



El punto en el que el potencial es mínimo es  $x = 8 \text{ cm}$ .

**Problema 3.5 — Potencial de una esfera conductora.** Calcule el potencial en el interior y el exterior de una esfera conductora de radio  $a$  y carga total  $q$  distribuida de manera uniforme por su superficie.

*Solución:*

Si la carga está distribuida de manera uniforme por toda la superficie podemos suponer que se trata de un conductor en equilibrio electrostático. En esa situación, sabemos de la sección 2.4 que el campo eléctrico en el interior de un conductor en equilibrio electrostático es nulo. En el exterior el campo eléctrico será igual al que crea una esfera uniforme (o una carga puntual) de valor  $q$  (cuestión 2.5):

$$\mathbf{E} = \begin{cases} 0 & \text{si } r < a, \\ k \frac{Q}{r^2} \hat{r} & \text{si } r > a. \end{cases}$$

### (I) Potencial eléctrico para $r < a$

Para calcular el potencial en el interior de la esfera tomamos un camino radial desde un punto a una distancia  $r < a$  del centro de la esfera (origen) hasta el infinito (final).

$$\Delta V = V(\infty) - V(r) \stackrel{ec.(3.9)}{=} - \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

Calculamos primero la parte integral de la ecuación anterior, donde tenemos que tener en cuenta que  $\mathbf{E} = E\hat{r}$  y  $d\mathbf{r} = dr\hat{r}$ :

$$\begin{aligned} \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} &\stackrel{\mathbf{E} \parallel d\mathbf{r}}{=} \int_r^\infty E dr = \int_r^a E dr + \int_a^\infty E dr = 0 + \int_a^\infty k \frac{Q}{r^2} dr = \\ &= kQ \int_a^\infty \frac{1}{r^2} dr = kQ \left[ \frac{1}{r} \right]_a^\infty = kQ \left[ 0 - \frac{1}{a} \right] = k \frac{Q}{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a}. \end{aligned}$$

Por tanto, se tiene que

$$\Delta V = V(\infty) - V(r) \stackrel{V(\infty)=0}{=} -V(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a} \Rightarrow V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a} \quad \text{si } r < a.$$

### (II) Potencial eléctrico para $r > a$

Para calcular el potencial en el exterior de la esfera tomamos un camino radial desde un punto a una distancia  $r > a$  del centro de la esfera (origen) hasta el infinito (final).

$$\Delta V = V(\infty) - V(r) \stackrel{ec.(3.9)}{=} - \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

De nuevo, calculamos primero la parte integral de la ecuación anterior, donde tenemos que tener en cuenta que  $\mathbf{E} = E\hat{r}$  y  $d\mathbf{r} = dr\hat{r}$ :

$$\begin{aligned} \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} &\stackrel{\mathbf{E} \parallel d\mathbf{r}}{=} \int_r^\infty E dr = \int_r^\infty k \frac{Q}{r^2} dr = \\ &= kQ \int_r^\infty \frac{1}{r^2} dr = kQ \left[ \frac{1}{r} \right]_r^\infty = kQ \left[ 0 - \frac{1}{r} \right] = k \frac{Q}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}. \end{aligned}$$

Por tanto, se tiene que

$$\Delta V = V(\infty) - V(r) \stackrel{V(\infty)=0}{=} -V(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \Rightarrow V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad \text{si } r > a.$$

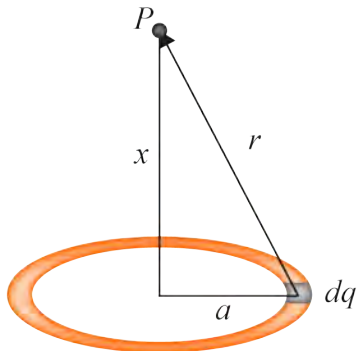


El potencial de una esfera conductora de radio  $a$  y carga  $Q$  es

$$V(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a} & \text{si } r < a, \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} & \text{si } r > a. \end{cases}$$

**Problema 3.6 — Potencial eléctrico anillo.** Calcule el potencial creado por un anillo de radio  $a = 7$  cm con carga lineal uniforme  $Q = 0.5$  nC a una distancia  $x = 24$  cm sobre el eje del anillo. Considerando un anillo de radio  $a$  y con carga uniforme  $Q$ , calcule el potencial eléctrico en un punto  $P$  sobre el eje del anillo.

*Solución:*



Consideramos el anillo como una distribución lineal de carga. Además, tenemos en cuenta que la distancia de cada  $dq$  es siempre la misma y que  $r$  es la hipotenusa del triángulo cuyos catetos son  $a$  (el radio del anillo) y  $x$  (la distancia del centro del anillo al punto de medición del potencial). Bajo estas premisas, podemos calcular el potencial en  $P$  usando la ecuación (3.8):

$$V = k \int \frac{dq}{r} = k \int \frac{dq}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{k}{\sqrt{x^2 + a^2}} \int dq = k \frac{Q}{\sqrt{x^2 + a^2}},$$

donde se utiliza que  $a$  y  $x$  son constantes en todo el anillo para sacarlas fuera de la integral.

A partir de esta expresión podemos obtener el potencial creado por el anillo de radio  $a = 7$  cm con carga  $Q = 0.5$  nC a una distancia  $x = 24$  cm sobre el eje del anillo:

$$V = k \frac{Q}{\sqrt{x^2 + a^2}} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \frac{0.5 \cdot 10^{-9} \text{ C}}{\sqrt{(24^2 + 7^2)(10^{-2})^2 \text{ m}^2}} = \frac{9}{5 \cdot 10^{-1}} \text{ V} = 18 \text{ V}.$$



El anillo crea un potencial de 18 V a 24 cm de distancia sobre su eje.

**Problema 3.7 — Potencial de un plano infinito.** Teniendo en cuenta el campo eléctrico que produce un plano infinito cargado uniformemente calculado en la cuestión 2.5, determine el potencial producido por dicho plano a ambos lados. *Nota: Suponga el potencial en el plano conocido,  $V_0$ .*

En la cuestión 2.5 determinamos que el campo eléctrico para un plano infinito (situado en  $x=0$ ) es:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{i} & \text{si } x < 0, \\ \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{i} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Para mayor comodidad en los cálculos llamaremos  $E \equiv \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ .

### (I) Potencial eléctrico para $x > 0$

Para calcular el potencial en los puntos positivos de  $x$  tomamos un camino perpendicular al plano desde un punto 0 en el plano (origen) hasta una distancia  $x > 0$  del plano (final).

$$\Delta V = V(x) - V(0) \stackrel{ec.(3.9)}{=} - \int_0^x \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

Calculamos primero la parte integral de la ecuación anterior, donde tenemos que tener en cuenta que  $\mathbf{E} = E \hat{i}$  y  $d\mathbf{r} = dx \hat{i}$ :

$$\int_0^x \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \stackrel{\mathbf{E} \parallel d\mathbf{r}}{=} \int_0^x E dx = Ex$$

Por tanto, se tiene que

$$\Delta V = V(x) - V(0) \stackrel{V(0)=V_0}{=} V(x) - V_0 = -Ex \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(x) = V_0 - Ex = V_0 - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} x \quad \text{si } x > 0.$$

## (II) Potencial eléctrico para $x < 0$

Para calcular el potencial en los puntos negativos de  $x$  tomamos un camino perpendicular al plano desde un punto a una distancia  $x < 0$  en el plano (origen) hasta un punto 0 en el plano (final). **Por qué desde  $x$  hasta 0 y no al revés?**

$$\Delta V = V(0) - V(x) \stackrel{ec.(3.9)}{=} - \int_x^0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

De nuevo, calculamos primero la parte integral de la ecuación anterior, donde tenemos que tener en cuenta que  $\mathbf{E} = -E \hat{i}$  y  $d\mathbf{r} = dx \hat{i}$ :

$$\int_x^0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \stackrel{\mathbf{E} \parallel (-d\mathbf{r})}{=} - \int_x^0 E dx = -Ex$$

Por tanto, se tiene que

$$\Delta V = V(0) - V(x) \stackrel{V(0)=V_0}{=} V_0 - V(x) = -(-Ex) = Ex \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(x) = V_0 + Ex = V_0 + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} x \quad \text{si } x < 0.$$



El potencial producido por un plano infinito situado en  $x = 0$  es

$$V(x) = V_0 - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} |x| = \begin{cases} V_0 + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} x & \text{si } x < 0, \\ V_0 - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$





- 4.1 Corriente eléctrica
- 4.2 Resistencia eléctrica
- 4.3 Potencia eléctrica
- 4.4 Resistencia en circuitos eléctricos
- 4.5 Cuestiones
- 4.6 Problemas



## 4. Corriente Eléctrica

### 4.1 Corriente eléctrica

Se entiende por **corriente eléctrica** al movimiento de partículas cargadas que ocurre en el interior de un conductor cuando, fuera del equilibrio electrostático, se aplica sobre él un campo eléctrico constante,  $\mathbf{E}$ , de tal forma que las partículas cargadas libres de su interior sienten la acción de una fuerza eléctrica,  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ . La magnitud física empleada para cuantificar este movimiento de cargas es la **intensidad de corriente eléctrica**,  $I$ .

$$i(t) = \frac{dQ(t)}{dt} \quad (4.1)$$

Esta magnitud representa la cantidad de carga,  $dQ(t)$ , que atraviesa una superficie,  $S$ , en un tiempo determinado,  $dt$ , Figura (4.1). Si la cantidad de carga que atraviesa la superficie por unidad de tiempo es constante, se puede escribir:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad (4.2)$$

La unidad de intensidad de corriente en el *SI* es el culombio partido por segundo, C/s, que recibe el nombre de amperio, A (el amperio es una de las unidades base del *SI*).

Por convención histórica, se toma el sentido de la corriente como el del movimiento de las partículas cargadas positivamente. Aunque realmente sabemos que quien se mueve son las partículas cargadas negativamente, los electrones.

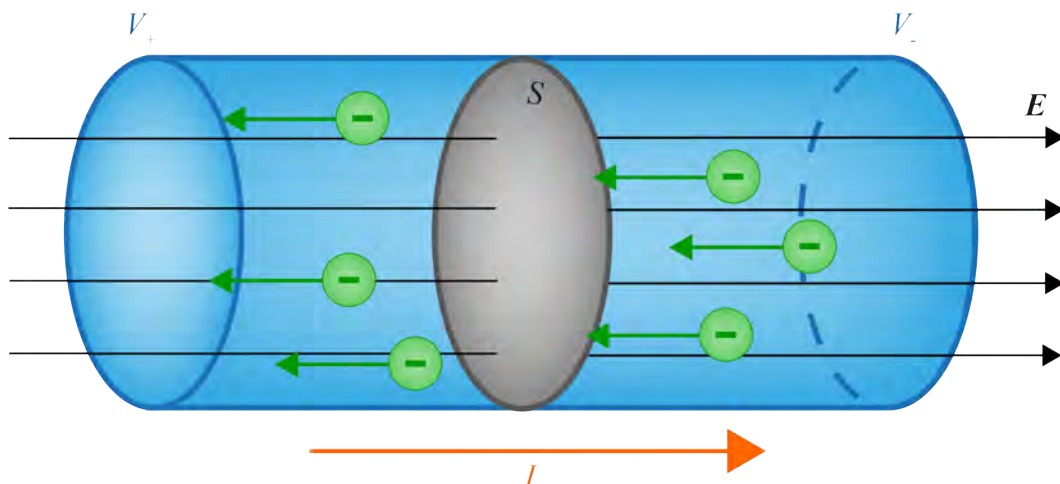


Figura 4.1: Representación de la corriente eléctrica. Movimiento de partículas cargadas en el interior de un conductor bajo un campo eléctrico.

⚠ La corriente eléctrica es una magnitud escalar (no es un vector), aunque se hable de dirección o sentido de la corriente.

## 4.2 Resistencia eléctrica

Supongamos un cilindro conductor como el de la figura 4.1. Como vimos en la sección anterior, si sobre este conductor aplicamos un campo eléctrico, se producirá un movimiento de cargas que ocasiona una corriente eléctrica. Además, el campo eléctrico aplicado conlleva la aparición de una diferencia de potencial entre los extremos del conductor<sup>1</sup>. Para un conductor, se define la **caída de potencial**,  $V$ , entre los extremos del conductor como la diferencia entre el extremo a mayor potencial y el de menor,  $V = V_+ - V_-$ . Se puede comprobar experimentalmente que esta caída de potencial es directamente proporcional a la intensidad de corriente,  $I$ , que fluye en el conductor:

$$V = IR \quad (4.3)$$

La ecuación (4.3) se conoce como **Ley de Ohm**. En ella, la constante de proporcionalidad  $R$  recibe el nombre de **resistencia** y nos da información sobre la oposición que presenta el conductor al paso de corriente cuando se le aplica una diferencia de potencial a sus extremos. La unidad de resistencia en el sistema internacional es el voltio partido amperio,  $V/A$ , que recibe el nombre de ohmio,  $\Omega$ .

⚠ Importante no confundir diferencia de potencial,  $\Delta V = V_{final} - V_{inicial}$ , con la caída de potencial,  $V = V_+ - V_-$ .

<sup>1</sup>Recordemos que el campo eléctrico apunta hacia potenciales decrecientes.

## Resistencia de conductores

Podemos calcular la resistencia del conductor mostrado en la figura 4.1 a partir de la siguiente ecuación

$$R = \rho \frac{L}{S}, \quad (4.4)$$

donde  $L$  es la longitud del conductor,  $S$  es su sección eficaz y  $\rho$  su **resistividad**, una propiedad característica del material. Merece la pena destacar otra propiedad característica de los conductores, la **conductividad**,  $\sigma$ , que se define como la inversa de la resistividad

$$\sigma = \frac{1}{\rho}, \quad (4.5)$$

Las unidad de resistividad es el ohmio por metro,  $\Omega\text{m}$ , y las de conductividad su inversa<sup>2</sup>,  $\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ .

## Resistencia y Temperatura

La resistencia es una propiedad que depende de la temperatura. Para la mayoría de metales se demuestra la siguiente relación de la resistencia en función de la temperatura:

$$R(T) = R_0 [1 + \alpha (T - T_0)], \quad (4.6)$$

donde  $R_0$  es la resistencia del material a la temperatura de referencia  $T_0$  Y  $\alpha$  es el coeficiente de temperatura, una propiedad del material.

## 4.3 Potencia eléctrica

La potencia existente en un conductor con una resistencia  $R$  se interpreta como la energía consumida y transformada en calor por el conductor. Se trata de una medida indirecta de cómo se opone el conductor al paso de corriente y se calcula de la siguiente forma:

$$P = VI \xrightarrow{V=IR} P = I^2 R = \frac{V^2}{R}. \quad (4.7)$$

La unidad de potencia en el  $SI$  es el julio partido segundo,  $\text{J/s}$ , que recibe el nombre de vatio,  $\text{W}$ .

---

<sup>2</sup>A la unidad inversa del ohmio,  $\Omega^{-1}$ , se le conoce como siemens,  $\text{S}$ .

- ! Todas las formas de la ecuación (4.7) son equivalentes y se emplearán en función de los parámetros que conozcamos del problema:  $V$ ,  $I$  o  $R$ .

## 4.4 Resistencia en circuitos eléctricos

Como hemos visto la resistencia eléctrica cuantifica la oposición que un conductor hace al paso de corriente cuando se le aplica una diferencia de potencial. Esta es una aplicación de gran utilidad en electrónica. El dispositivo diseñado para esta aplicación es llamado **resistor** o **resistencia** y se representa como se muestra en la figura 4.2.

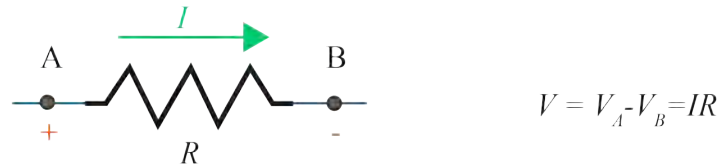


Figura 4.2: Símbolo de la resistencia eléctrica para los circuitos eléctricos.

- ! En una resistencia, la caída de potencial es positiva al movernos en el sentido de la corriente ya que  $V_A > V_B$ . Esto nos indica que la corriente pierde energía por unidad de carga al pasar por una resistencia.

## 4.5 Cuestiones

### Potencia eléctrica

**Cuestión 4.1 — Relación entre potencia disipada y resistencia.** Considere dos conductores bajo la misma caída de potencial. Si el segundo conductor disipa el triple de potencia que el primero, ¿cuál de los dos tiene mayor resistencia?

*Solución:*

Podemos determinar cual de los dos conductores tiene mayor resistencia haciendo uso de la ecuación (4.7):

$$P = VI \quad \xrightarrow{V=IR} \quad P = \frac{V^2}{R}.$$

A partir de esta relación podemos determinar la potencia que disipa cada conductor y, posteriormente, obtener cada resistencia:

$$\left. \begin{array}{l} P_1 = \frac{V}{R_1}, \\ P_2 = \frac{V}{R_2} \end{array} \right\} \xrightarrow{3P_1=P_2} 3\frac{V}{R_1} = \frac{V}{R_2} \Rightarrow 3R_2 = R_1.$$

**Sol** Para que el segundo conductor disipe el triple de potencia que el primero, la resistencia del primer conductor tendrá que ser el triple que la del primer conductor.

**Cuestión 4.2 — Longitud de un conductor.** Dos conductores,  $a$  y  $b$ , que están hechos del mismo material tienen la misma resistencia eléctrica. No obstante, el conductor  $a$  tiene un diámetro el triple que el del conductor  $b$ , ¿cómo es la longitud del conductor  $b$  en relación con la longitud del conductor  $a$ ?

*Solución:*

Para determinar la relación entre longitudes de ambos conductores, tengamos en cuenta que ambos conductores están hechos del mismo material y, por tanto, tienen la misma resistividad,  $\rho$ . Además, son conductores de sección transversal circular con una relación de diámetros  $d_a = 3d_b$  y, por tanto, con una relación entre radios  $r_a = 3r_b$ . Con todos estos datos, podemos determinar la resistencia de ambos conductores a partir de la ecuación (4.4):

$$R_a = \rho \frac{l_a}{S_a} = \rho \frac{l_a}{\pi r_a^2},$$

$$R_b = \rho \frac{l_b}{S_b} = \rho \frac{l_b}{\pi r_b^2}.$$

A partir de estas relaciones, podemos determinar la relación entre longitudes teniendo en cuenta que la resistencia de ambos conductores es la misma:

$$R_a = R_b \Rightarrow \rho \frac{l_a}{\pi r_a^2} = \rho \frac{l_b}{\pi r_b^2} \Rightarrow \frac{l_a}{r_a^2} = \frac{l_b}{r_b^2} \xrightarrow{r_a=3r_b} \frac{l_a}{r_a^2} = \frac{l_b}{(3r_b)^2} \Rightarrow l_a = \frac{l_b}{9}.$$

**Sol** Si el conductor  $a$  tiene un diámetro tres veces mayor que el  $b$ , el conductor  $b$  será 9 veces más largo que el conductor  $a$ .

**Cuestión 4.3 — Corriente por una bombilla.** Considere una bombilla de filamento de las que antiguamente se usaban. ¿En qué momento circula una mayor cantidad de corriente a través del filamento: al instante de encenderse o después de un tiempo, cuando su brillo ya es constante?

*Nota: Suponga que el voltaje que se le suministra a la bombilla es constante.*

*Solución:*

Sabemos que la resistencia de un conductor depende de la temperatura, ecuación (4.6). Si suponemos que el voltaje que se le suministra a la bombilla es constante, por ley de Ohm, ecuación (4.3), se puede demostrar que la corriente que atraviesa la bombilla dependerá de la temperatura:

$$I = \frac{V}{R} \xrightarrow{R=R(T)} I = \frac{V}{R(T)} = I(T).$$

Es decir, la corriente será mayor con bajas temperaturas ya que es inversamente proporcional a la resistencia. Por tanto, para el caso de la bombilla, tendremos que la corriente es mayor cuando la temperatura sea baja.

**Sol** Al encender la bombilla, el filamento está frío con una baja resistencia (temperatura baja) y, por tanto, con una alta corriente. A medida que el filamento se calienta por efecto *Joule*, la resistencia del filamento comienza a aumentar y, por tanto, la corriente disminuye su valor. Concluimos, por tanto, que la corriente en la bombilla es mayor en el momento en el que es encendida.

**Cuestión 4.4 — Relación entre potencias de bombillas.** En una vivienda antigua encontramos dos bombillas distintas de potencia 60 W y 90 W.

- ¿Cuál de las dos presenta una resistencia más elevada?
- ¿Cuál permite el paso de una mayor cantidad de corriente?
- Si ambas bombillas están hechas de tungsteno y tienen la misma longitud, ¿en qué se diferencian los filamentos de una bombilla de ambas bombillas?

*Solución:*

- a) Si suponemos ambas bombillas conectadas a la misma diferencia de potencial:

$$P_{90} > P_{60} \Rightarrow \frac{V^2}{R_{90}} > \frac{V^2}{R_{60}} \Rightarrow R_{60} > R_{90}.$$

- b) Si suponemos de nuevo ambas bombillas conectadas a la misma diferencia de potencial:

$$P_{90} > P_{60} \Rightarrow VI_{90} > VI_{60} \Rightarrow I_{90} > I_{60}.$$

- c) Si ambas bombillas están hechas del mismo material de resistividad  $\rho$  y tienen la misma longitud  $l = l_{60} = l_{90}$ , sus filamentos se diferenciarán en los radios.

$$R_{60} > R_{90} \Rightarrow \rho \frac{l}{\pi r_{60}^2} > \rho \frac{l}{\pi r_{90}^2} \Rightarrow r_{90}^2 > r_{60}^2 \Rightarrow r_{90} > r_{60}.$$

**Sol** Si tenemos dos bombillas de 60 W y 90 W:

- la de 60 W presentará una mayor resistencia,
- la de 90 W permite el paso de una mayor corriente,
- el filamento de la de 90 W tiene mayor radio que la de 60 W.

## 4.6 Problemas

### Corriente eléctrica

**Problema 4.1 — Tubo de rayos catódicos.** Un tubo de rayos catódicos es una tecnología para visualizar imágenes que fue ampliamente utilizada en los monitores y televisores antiguos. Calcule cuántos electrones chocan contra la pantalla del tubo si tenemos un dispositivo donde circula una intensidad de corriente de 0.2 mA durante intervalos de 5 s.

*Solución:*

Para calcular el número de electrones que chocan contra la pantalla emplearemos la ecuación (1.1) del Tema 1, según la cual, el número de electrones dependerá de la carga total que tengamos en el tubo. Por tanto, previamente necesitamos conocer la carga que circula por el tubo. Podemos calcular esta carga a partir de la definición de corriente eléctrica, ecuación (4.2):

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \Rightarrow \Delta Q = I \Delta t = 0.2 \cdot 10^{-3} \text{ A} \cdot 5 \text{ s} = 10^{-3} \text{ C}.$$

Y aplicando la cuantización de la carga:

$$n_e = \frac{|\Delta Q|}{|e|} = \frac{10^{-3} \text{ C}}{1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = 6.25 \cdot 10^{15} \text{ electrones}.$$

**Sol** Chocan  $6.25 \cdot 10^{15}$  electrones contra la pantalla del tubo de rayos catódicos cuando tenemos una intensidad de corriente de 0.2 mA durante intervalos de 5 s.

### Resistencia eléctrica

**Problema 4.2 — Accidente casero.** Una operario arreglando un electrodoméstico toca accidentalmente un cable pelado expuesto a 200 V mientras sus manos están húmedas. Teniendo en cuenta que la resistencia eléctrica del cuerpo humano mojado puede ser de 600  $\Omega$ , determine la corriente eléctrica que atraviesa el cuerpo en dicha situación.

*Solución:*

Para calcular la corriente que atraviesa el cuerpo del operario podemos emplear la ley de Ohm, ecuación (4.3):

$$V = IR \Rightarrow I = \frac{V}{R} = \frac{200 \text{ V}}{600 \Omega} = 0.333 \text{ A} = 333 \text{ mA}.$$

**Sol** Cuando el operario toca el cable a 200 V, la corriente que atraviesa su cuerpo es 333 A<sup>3</sup>.

## Resistencia eléctrica

**Problema 4.3 — La resistividad del *Salasium*.** El *Salasium* es una aleación que forma un metal casi indestructible. Sabiendo que este metal tiene una resistividad de  $10^{-6} \Omega\text{m}$ , ¿qué longitud de aleación se necesita para obtener una resistencia de  $5 \Omega$  con un cable de *Salasium* de 0.8 mm de radio?

*Solución:*

Para calcular la longitud de la aleación de *Salasium* con una resistencia  $R = 5 \Omega$  y radio  $r = 0.8 \text{ mm}$  podemos utilizar la ecuación 4.4:

$$R = \rho \frac{L}{S} \Rightarrow L = \frac{RS}{\rho} = \frac{R(\pi r^2)}{\rho} = \frac{5 \Omega \pi (0.8 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2}{10^{-6} \Omega\text{m}} = 10.05 \text{ m}.$$

**Sol** Se necesita 10.05 m para obtener una resistencia de  $5 \Omega$  con un cable de *Salasium* de 0.8 mm de radio.

**Problema 4.4 — Termómetro resistivo.** Una manera de medir de manera precisa la temperatura es mediante las variaciones de resistencia con la temperatura. Determine la temperatura para un termómetro resistivo de cobre que tiene una resistencia de  $150 \Omega$ . Para ello considere que el cobre tiene una resistencia de  $120 \Omega$  a la temperatura de referencia de  $20^\circ\text{C}$  y que el coeficiente de temperatura del cobre es  $\alpha = 0.004041^\circ\text{C}^{-1}$ .

*Solución:*

Para determinar la temperatura del termómetro resistivo cuando el material tiene  $200 \Omega$  de resistencia, utilizamos la ecuación 4.6:

$$R(T) = R_0 [1 + \alpha (T - T_0)] = R(T_0) + \alpha R(T_0)T - \alpha R(T_0)T_0$$

<sup>3</sup>Corrientes superiores a 300 mA pueden provocar serios daños para el cuerpo humano como detención de la respiración, por lo que esta corriente es potencialmente mortal.

Podemos calcular el valor de la temperatura,  $T$ , a la que está el material con una resistencia,  $R(T) = 150 \, \Omega$  si despejamos  $T$  en la expresión anterior y tenemos en cuenta los datos que nos proporciona el enunciado para la temperatura de referencia,  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ , y resistencia a la temperatura de referencia,  $R(T_0) = 120 \, \Omega$ :

$$T = \frac{R(T) - R(T_0) + \alpha R(T_0)T_0}{\alpha R(T_0)} = 81.9^\circ\text{C}.$$

**Sol** La temperatura del termómetro resistivo a  $150 \, \Omega$  es  $81.9^\circ\text{C}$ .

## Potencia eléctrica

**Problema 4.5 — Potencia de una bombilla.** El filamento de una bombilla de tungsteno tiene una resistencia de  $240 \, \Omega$ . Calcule la potencia que disipa la bombilla por efecto Joule cuando está encendida y por ella circula una corriente de  $0.5 \, \text{A}$ .

*Solución:*

Conocida la resistencia del filamento,  $R = 240 \, \Omega$ , y la corriente que lo atraviesa  $I = 0.5 \, \text{A}$ , para determinar la potencia que se disipa en la bombilla por efecto Joule utilizamos la ecuación (4.7):

$$P = VI \quad \xRightarrow{V=IR} \quad P = I^2 R = (0.5 \, \text{A})^2 240 \, \Omega = 60 \, \text{W}.$$

**Sol** La bombilla de tungsteno disipa  $60 \, \text{W}$  cuando por ella circulan  $0.5 \, \text{A}$ .

**Problema 4.6 — Potencia de una bombilla de bajo consumo.** Una bombilla de bajo consumo de  $10 \, \text{W}$  puede generar la misma cantidad de luz que una bombilla incandescente de  $60 \, \text{W}$ . ¿Cuánto dinero se ahorra al utilizar la bombilla de bajo consumo durante 100 horas? Considere que el costo de la electricidad es de  $0.10 \, \text{€}$  por kWh.

*Nota:* Un kilovatio-hora es una unidad de energía, concretamente es la energía necesaria para mantener una potencia constante de  $1 \, \text{kW}$  durante una hora ( $1 \, \text{kWh} = 3.6 \cdot 10^6 \, \text{J}$ ).

*Solución:*

Calculemos la energía gastada por cada bombilla:

$$\text{Bombilla incandescente: } U_{inc} = P_{inc}t = 60 \, \text{W} \cdot 100 \, \text{h} = 6000 \, \text{Wh} = 6 \, \text{kWh}.$$

Bombilla bajo consumo:  $U_{bc} = P_{bc}t = 10 \text{ W } 100 \text{ h} = 1000 \text{ Wh} = 1 \text{ kWh}$ .

Por tanto, teniendo en cuenta que el costo de la electricidad es de  $0.10 \text{ €}$  por kWh, el ahorro es

$$U_{inc} - U_{bc} = 6 \text{ kWh} - 1 \text{ kWh} = 5 \text{ kWh} \Rightarrow \text{Ahorro} = 5 \text{ kWh } 0.10 \frac{\text{€}}{\text{kWh}} = 0.5 \text{ €}.$$

**Sol** Se ahorran  $0.5 \text{ €}$  al utilizar una bombilla de bajo consumo durante 100 h.

**Problema 4.7 — Potencia de un calefactor eléctrico.** Un calefactor eléctrico funciona con una potencia de  $1600 \text{ W}$  y opera a un voltaje de  $230 \text{ V}$ . Debido a un fallo en la resistencia calefactora, el usuario decide arreglarlo cortando una sección dañada y volviendo a conectar los extremos restantes (¡No intentes esto en casa!). Como resultado, la resistencia calefactora se reduce en un  $20\%$  de su longitud original. ¿Cuál será la nueva potencia del calefactor tras esta modificación?

*Solución:*

Consideremos la potencia y resistencia iniciales del calefactor como

$$P_0 = \frac{V^2}{R_0} = 1600 \text{ W}, \quad R_0 = \rho_0 \frac{l_0}{S_0}.$$

Tras estropearse el calefactor, el usuario decide reducir un  $20\%$  la longitud de la resistencia,  $l = 0.8l_0$ , dejando igual su sección transversal,  $S_0$ , y la resistividad del material,  $\rho_0$ . Ante esta situación, la resistencia y potencia del calefactor pasaran a ser:

$$R = \rho_0 \frac{l}{S_0} = \rho_0 \frac{0.8l_0}{S_0} = 0.8R_0 \Rightarrow P = \frac{V^2}{R} = \frac{V^2}{0.8R_0} = \frac{P_0}{0.8} = \frac{1600 \text{ W}}{0.8} = 2000 \text{ W}.$$

**Sol** Tras acortar un  $20\%$  la resistencia, la nueva potencia del calefactor pasa a ser  $2000 \text{ W}$ .

**Problema 4.8 — It's in the game.** Suponga que su consola y televisión tienen un gasto energético de  $100 \text{ W}$  y  $150 \text{ W}$ , respectivamente. Calcule cuánto dinero cuesta hacer al *Cádiz C.F.* campeón de Europa jugando al *FOFA* (famoso juego de fútbol).

Para ello tenga en cuenta que la compañía eléctrica le cobra 0.20 €/kWh, y que para semejante hazaña dedica 60 horas.

*Solución:*

El gasto energético de consola y televisión es 100 W y 150 W, respectivamente. Por tanto, el gasto conjunto de ambos aparatos funcionando simultáneamente es:

$$P = P_c + P_{TV} = 250 \text{ W}.$$

Si para hacer al *Cádiz C.F.* campeón de Europa empleamos 60 horas a 0.20 €/kWh, el gasto en dinero será:

$$U = Pt = 250 \text{ W} \cdot 60 \text{ h} = 15000 \text{ Wh} = 15 \text{ kWh} \quad \Rightarrow$$

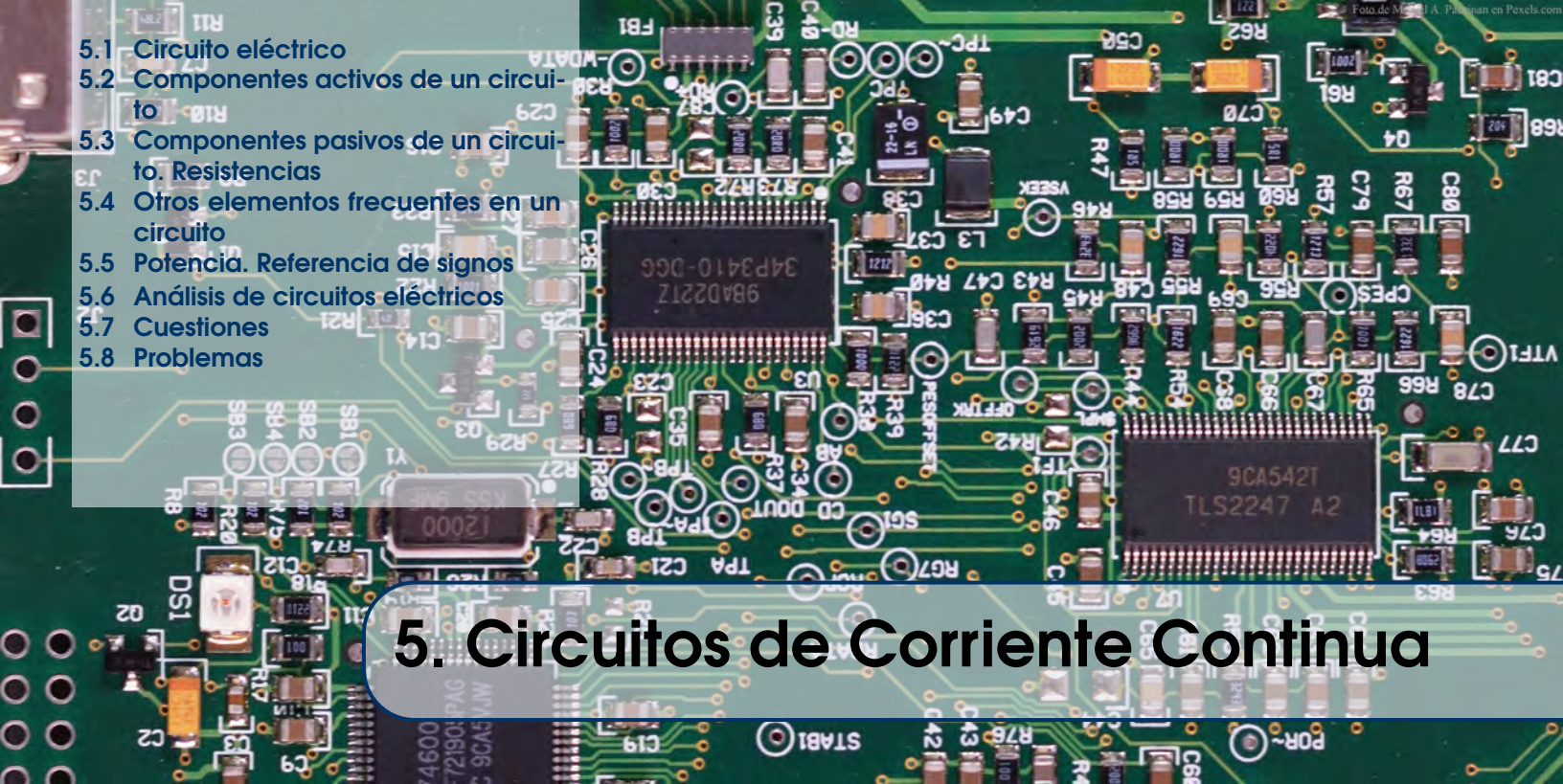
$$\text{Gasto} = 15 \text{ kWh} \cdot 0.20 \frac{\text{€}}{\text{kWh}} = 3 \text{ €}.$$



Hacer al *Cádiz C.F.* campeón de Europa supone un costo eléctrico de 3 €. Barato para semejante hazaña.





- 
- 5.1 Circuito eléctrico
  - 5.2 Componentes activos de un circuito
  - 5.3 Componentes pasivos de un circuito. Resistencias
  - 5.4 Otros elementos frecuentes en un circuito
  - 5.5 Potencia. Referencia de signos
  - 5.6 Análisis de circuitos eléctricos
  - 5.7 Cuestiones
  - 5.8 Problemas

## 5. Circuitos de Corriente Continua

### 5.1 Circuito eléctrico

Se define un **circuito eléctrico** como un conjunto de componentes (fuentes, resistencias, condensadores, etc.) conectados entre sí mediante **conductores ideales** que son caminos rectos de resistencia nula. Por tanto, los puntos de un circuito unidos mediante un mismo conductor ideal están al mismo potencial. En un circuito eléctrico podemos identificar distintos tipos de componentes:

- **Componentes activos:** aquellos capaces de generar energía eléctrica como los generadores o fuentes.
- **Componentes pasivos:** aquellos que no son capaces de generar energía eléctrica y la consumen. Ejemplos de componentes pasivos son las resistencias, condensadores o inductores.

Además podemos distinguir entre distintos tipos de circuitos en función del movimiento de las cargas en ellos:

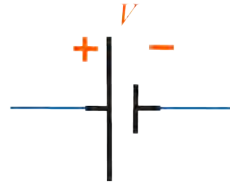
- **Circuitos de corriente continua,  $DC$ :** aquellos en los que la corriente tiene siempre la misma dirección.
- **Circuitos de corriente alterna,  $AC$ :** aquellos en los que tanto la magnitud como la dirección de la corriente varían de manera cíclica.

En este tema nos centramos en los circuitos de corriente continua en los que, además, la corriente eléctrica es constante en el tiempo.

### 5.2 Componentes activos de un circuito

### 5.2.1 Fuentes de tensión

Una fuente de tensión, o fuente de fuerza electromotriz (fem)<sup>1</sup>, es un dispositivo encargado de suministrar energía eléctrica en un circuito eléctrico. Por tanto, una fuente de tensión o de fem conectado a un circuito proporciona una variación de potencial constante en el circuito. El símbolo de una fuente de tensión en un circuito se muestra en la figura 5.1.



$$V \equiv \varepsilon = V_A - V_B \quad (5.1)$$

Figura 5.1: Símbolo de la fuente de tensión o de fem para los circuitos eléctricos.

⚠ Mientras no se diga lo contrario, consideraremos fuentes de tensión ideales. En ellas, la resistencia interna es nula por lo que son capaces de mantener la diferencia de potencial indicada por la fuente, independientemente del resto de elementos del circuito. Veremos más adelante que esto no ocurre con las fuentes de tensión reales.

Al contrario que las fuentes de tensión ideales, las fuentes reales no pueden mantener constante el voltaje suministrado, ya que el paso de corriente genera una disipación de energía dentro de la fuente. Este efecto puede modelarse agregando una resistencia interna en serie con la fuente de tensión.

### 5.2.2 Fuentes de corriente

Una fuente de corriente es un dispositivo encargado de suministrar energía eléctrica en un circuito eléctrico por medio de generar una corriente constante en el circuito. El símbolo de una fuente de corriente en un circuito se muestra en la figura 5.2. La dirección de la corriente viene indicada por la fuente de corriente.

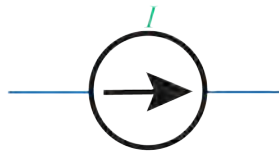


Figura 5.2: Símbolo de la fuente de corriente para los circuitos eléctricos.

<sup>1</sup>La fem,  $\varepsilon$ , es una magnitud que mide diferencia de potencial. Por tanto, su unidad en el *SI* es el voltio, V.

### 5.2.3 Fuentes dependientes

Las fuentes vistas hasta ahora se denominan fuentes independientes. En ellas la caída de tensión o la corriente se mantienen constantes independientemente del resto del circuito. Existen otro tipo de fuentes denominadas fuentes dependientes en las que su funcionamiento viene determinado por alguna de las magnitudes presentes en el circuito.

⚠ Otros tipos de componentes activos como los diodos y transistores se verán en temas posteriores.

#### Fuentes de tensión dependientes

En las fuentes de tensión dependientes, la caída de potencial de la fuente depende de otra magnitud del circuito. Podemos distinguir dos tipos: i) fuentes de tensión controladas por tensión (dependen de otra tensión del circuito) y ii) fuentes de tensión controladas por corriente (dependen de una de las corrientes del circuito). Podemos ver el símbolo de este tipo de fuentes en las figuras 5.3 a y b, respectivamente.

#### Fuentes de corriente dependientes

En las fuentes de corriente dependientes, la caída de intensidad de corriente de la fuente depende de otra magnitud del circuito. Podemos distinguir dos tipos: i) fuentes de corriente controladas por tensión (dependen de una tensión del circuito) y ii) fuentes de corriente controladas por corriente (dependen de una de las corrientes del circuito). Podemos ver el símbolo de este tipo de fuentes en las figuras 5.3 c y d, respectivamente.

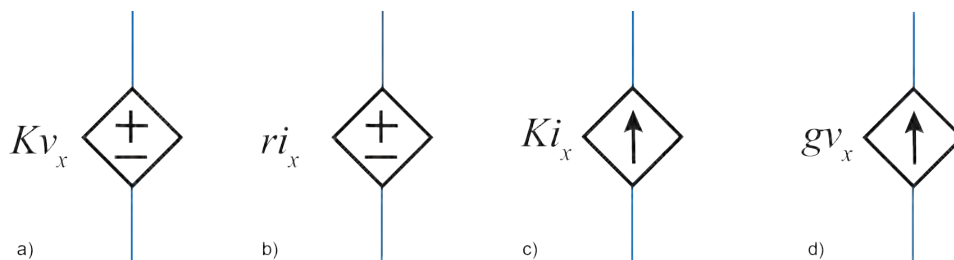


Figura 5.3: Símbolo de las fuente dependientes para los circuitos eléctricos.

⚠ En las fuentes dependientes las variables que acompañan a la magnitud dependiente son constantes de proporcionalidad.  $K$  es una constante adimensional comúnmente denominada como ganancia de la fuente;  $r$  es una constante con unidades de resistencia,  $\Omega$ , llamada resistencia de transferencia o transresistencia; y  $g$  es una constante con unidades de inverso de resistencia,  $\Omega^{-1} = S$ , que se denomina como conductancia de transferencia o transconductancia.

### 5.3 Componentes pasivos de un circuito. Resistencias

Dentro de los componentes pasivos de un circuito encontramos a las resistencias. Estos elementos pueden encontrarse formando combinaciones o asociaciones de ellas con un efecto igual al que produciría una única resistencia, denominada **resistencia equivalente**. Veamos que tipo de asociaciones podemos encontrar.

#### Resistencias en serie

Dos o más **resistencias** están en **serie** si por ellas pasa la misma corriente. En esta situación, podemos afirmar que en una asociación de  $n$  resistencias en serie, la resistencia equivalente es igual a la suma de las resistencias individuales.

$$R_{eq} = \sum_i^n R_i. \quad (5.2)$$

#### Resistencias en paralelo

Dos o más **resistencias** están en **paralelo** si entre sus extremos se establece la misma caída de potencial. En esta situación, podemos afirmar que en una asociación de  $n$  resistencias en paralelo, el inverso de la resistencia equivalente es igual a la suma de los inversos de las resistencias individuales.

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_i^n \frac{1}{R_i}. \quad (5.3)$$

⚠ Otros tipos de componentes pasivos como los condensadores e inductores se verán en temas posteriores.

### 5.4 Otros elementos frecuentes en un circuito

#### Tierra

Referencia respecto a la cual se describen los voltajes en un circuito. Este punto se toma usualmente como potencial de valor cero. Viene representado por el símbolo de la figura 5.4.a.

#### Interruptor

Un interruptor o conmutador (ideal) es un dispositivo que permite o no el paso de corriente en función de sus dos estados:

**Interruptor abierto**

Un interruptor abierto (corte/OFF) se modela como un camino de resistencia infinita o un circuito abierto. No permite el paso de corriente.

**Interruptor cerrado**

Un interruptor cerrado (conducción/ON) se modela como un camino de resistencia nula o un cortocircuito. Permite el paso de corriente.

Podemos ver el símbolo de un interruptor y sus estados en la figura 5.4.b.

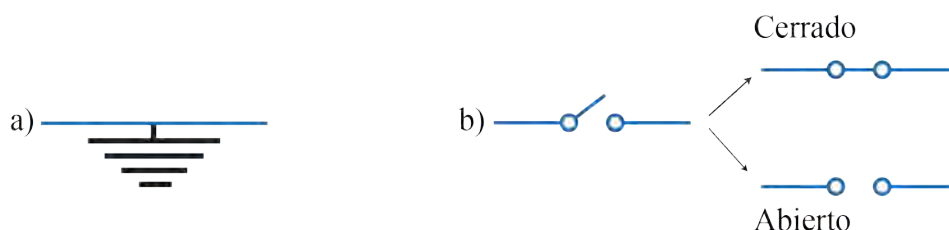


Figura 5.4: Símbolo de la fuente de corriente para los circuitos eléctricos.

## 5.5 Potencia. Referencia de signos

En todo componente de un circuito (pasivo o activo) por el que circula una corriente  $I$  aparece una caída de potencial  $V$  y, por tanto, un intercambio de energía cuyo ritmo de transferencia se puede cuantizar mediante la potencia,  $P = VI$ .

Si la corriente entra por la polaridad positiva de la caída de potencial, cualquier potencia positiva indica que el componente está absorbiendo energía, mientras que si la potencia es negativa indica que el elemento está entregando energía al circuito.

## 5.6 Análisis de circuitos eléctricos

En el análisis de circuitos eléctricos trataremos de determinar las variables de un circuito eléctrico (corrientes, caídas de potencias y potencias de los componentes que lo forman). La técnica más común con la que empezar el análisis de un circuito es buscar asociaciones de resistencias en serie o paralelo para simplificarlo con un circuito equivalente. Sin embargo, en muchas ocasiones los circuitos serán suficientemente complejos como para que se requiera una técnica extra o alternativa. El procedimiento común en estos casos es el de aplicar las reglas de Kirchhoff o buscar circuitos equivalentes mediante los teoremas de Thévenin o Norton. Veamos a continuación estas alternativas.

### 5.6.1 Reglas de Kirchhoff

Antes de la definición de las reglas de Kirchhoff es necesario definir los siguientes conceptos:

**Nudo:** Punto del circuito donde se conectan tres o más elementos de un circuito a través de un conductor ideal<sup>2</sup>.

**Rama:** Tramo del circuito que conecta dos nudos. Cada rama tendrá asociada una corriente de rama única.

**Malla:** Conjunto de componentes de un circuito que forman un camino cerrado desde un nudo hasta él mismo sin recorrer dos veces el mismo conductor.

#### Primera regla de Kirchhoff

La primera regla de Kirchhoff establece que en cualquier nudo de un circuito la suma de las corrientes que entran es igual a la suma de las corrientes que salen.

$$\sum_{\text{nudo}} I_{\text{ent}} = \sum_{\text{nudo}} I_{\text{sal}} \quad (5.4)$$

⚠ La primera regla de Kirchhoff es consecuencia directa de la ley de conservación de la carga.

#### Segunda regla de Kirchhoff

La segunda regla de Kirchhoff establece que la suma de las caídas de potencial a lo largo de una malla debe ser igual a cero.

$$\sum_{\text{malla}} V = 0 \quad (5.5)$$

⚠ La segunda regla de Kirchhoff es consecuencia directa de la ley de conservación de la energía.

---

<sup>2</sup>Los puntos del sistema donde se conectan dos elementos del sistema se conocerán como nudos secundarios.

## Pautas para aplicar las reglas de Kirchhoff

1. Identificamos los nudos, ramas y mallas del circuito. Además, fijamos el sentido en el que se recorre la malla.
2. Definimos tantas corrientes como ramas tenga el circuito. Estas serán las incógnitas a determinar. El sentido de las corrientes se asigna arbitrariamente.
3. Usando las reglas de Kirchhoff se establecen tantas ecuaciones como corrientes incógnita existan para establecer un sistema de ecuaciones. En este punto, en función del sentido en que se recorre la malla, estudiamos si las caídas de potencial en cada componente del circuito son positivas o negativas.
4. Si al resolver el sistema de ecuaciones se obtienen corrientes positivas significa que el sentido establecido inicialmente es correcto. Si alguna corriente es negativa, el sentido que se estableció para ella de manera aleatoria es opuesto al real. Debemos indicar los sentidos reales de todas las corrientes al final para resolver el circuito por completo.

### 5.6.2 Teorema de Thévenin

El **teorema de Thévenin** establece que cualquier circuito eléctrico formado por resistencias y fuentes (de tensión y de corriente), visto desde dos puntos  $A$  y  $B$ , puede ser sustituido por un circuito equivalente formado por una fuente de tensión cuyo valor es la **tensión equivalente Thévenin**,  $V_{Th}$ , y una resistencia en serie con la fuente cuyo valor es la **resistencia equivalente Thévenin**,  $R_{Th}$ . Las características que deben cumplir estos componentes son:

#### Tensión equivalente Thévenin

Es la caída de potencial entre los puntos  $A$  y  $B$  cuando entre ellos se establece un circuito abierto.

#### Resistencia equivalente Thévenin

Es la resistencia equivalente entre los puntos  $A$  y  $B$  cuando entre ellos se establece un circuito abierto y se anulan las fuentes<sup>3</sup>.

### 5.6.3 Teorema de Norton

El **teorema de Norton** establece que cualquier circuito eléctrico formado por resistencias y fuentes (de tensión y de corriente), visto desde dos puntos  $A$  y  $B$ , puede ser sustituido por un circuito equivalente formado por una fuente de corriente cuyo valor es la **corriente equivalente Norton**,  $I_N$ , y una resistencia en paralelo con la

---

<sup>3</sup>Anular las fuentes equivale a sustituir las fuentes de tensión por cortocircuitos y las fuentes de corriente por circuitos abiertos.

fuelle cuyo valor es la **resistencia equivalente Norton**,  $R_N$ . Las características que deben cumplir estos componentes son:

### Corriente equivalente Norton

Es la corriente que circula entre los puntos  $A$  y  $B$  cuando entre ellos se establece un cortocircuito.

### Resistencia equivalente Norton

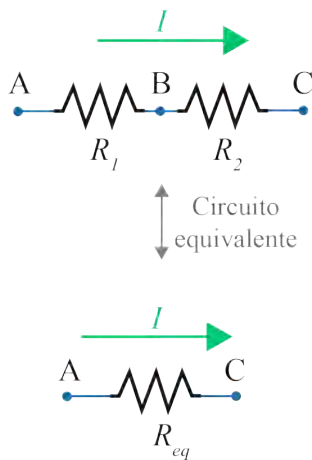
Es la resistencia equivalente entre los puntos  $A$  y  $B$  cuando entre ellos se establece un circuito abierto y se anulan las fuentes.

## 5.7 Cuestiones

### Componentes pasivos de un circuito. Resistencias

**Cuestión 5.1 — Resistencias en serie.** Demuestre que la asociación de dos resistencias en serie es igual a una resistencia equivalente cuyo valor equivale a la suma de ambas resistencias.

**Sol**



Antes de empezar con la asociación en serie debemos notar que la caída de potencial de las dos resistencias por separado es:

$$V_{R_1} = V_A - V_B = IR_1,$$

$$V_{R_2} = V_B - V_C = IR_2.$$

Teniendo esto en cuenta, sabemos que la corriente que atraviesa las resistencias de una asociación en serie es la misma.

Además, la caída de potencial en esta combinación se divide entre ambas resistencias y se puede calcular como:

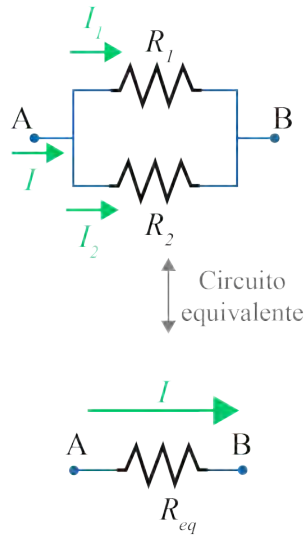
$$V = V_A - V_C = V_A - V_B + V_B - V_C.$$

En la última igualdad se ha sumado y restado el potencial de  $B$  con el objetivo de obtener las caídas de potencial en cada resistencia por separado. Desarrollando la igualdad anterior con la caída de potencial de las resistencias individuales se obtiene:

$$V = V_{R_1} + V_{R_2} = IR_1 + IR_2 = I(R_1 + R_2) = IR_{eq} \Rightarrow R_{eq} = R_1 + R_2. \quad \square$$

**Cuestión 5.2 — Resistencias en paralelo.** Demuestre que el inverso la resistencia equivalente de una asociación de dos resistencias en paralelo es igual a la suma de los inversos de las dos resistencias individuales.

**Sol**



En una asociación de dos resistencias en paralelo la corriente  $I$  que fluye desde el punto  $A$  se divide en dos corrientes,  $I_1$  e  $I_2$ , que pasan por  $R_1$  y  $R_2$ , respectivamente. Aplicando el principio de conservación de la carga, se tiene que cumplir que:

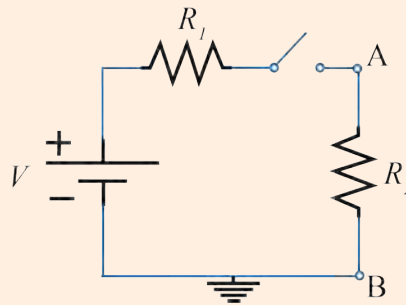
$$I = I_1 + I_2.$$

Además, aplicando en la ecuación anterior que en una asociación en paralelo las resistencias se encuentran bajo la misma caída de potencial,  $V = V_1 = V_2$ , junto con la ley de Ohm obtenemos:

$$I = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = V \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{R_{eq}} \Rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \quad \square$$

## Interruptor

**Cuestión 5.3 — Circuito con interruptor.** Determine el valor de  $V_{AB}$  en el circuito de la figura.



*Solución:*

Para obtener el valor de  $V_{AB}$  necesitamos considerar los dos estados del interruptor:

**Interruptor abierto:** El interruptor se modela como un circuito abierto por lo que no hay circulación de corriente en el circuito. En esta situación, no hay caída de potencial en  $R_1$ . Por tanto,  $V_A = V$ , y se tiene que:

$$V_{AB} = V_A - V_B \stackrel{V_B=0}{=} V.$$

**Interruptor cerrado:** El interruptor se modela como un cortocircuito. En esta situación, se puede calcular  $V_A$  a partir de un divisor de tensión:

$$V_{AB} = V_A - V_B \stackrel{V_B=0}{=} V \frac{R_2}{R_1 + R_2}. \quad (5.C.1)$$

En ambos casos se ha tenido en cuenta que  $B$  está conectado a tierra.

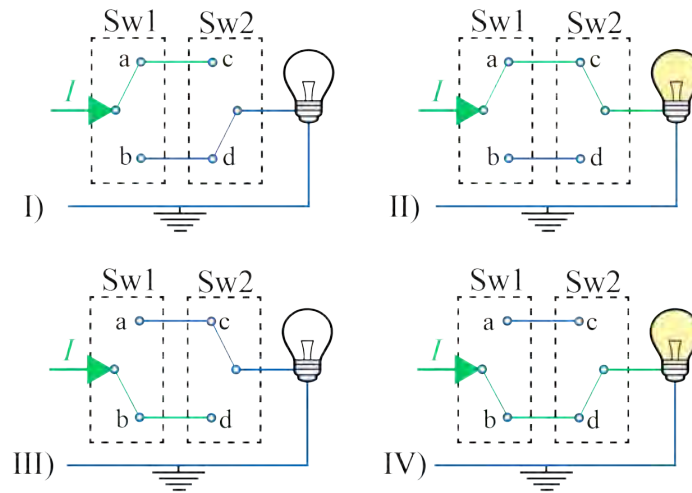
**Sol** La caída de tensión entre  $A$  y  $B$  es

$$V_{AB} = \begin{cases} V & \text{Interruptor abierto,} \\ V \frac{R_2}{R_1 + R_2} & \text{Interruptor cerrado.} \end{cases}$$

**Cuestión 5.4 — Instalación eléctrica.** En muchas instalaciones eléctricas en el hogar, se utilizan conmutadores múltiples que permiten controlar una misma luz desde dos interruptores distintos. Esto facilita encender y apagar la luz desde diferentes puntos. Realice un esquema que represente este tipo de circuito.

*Solución:*

En el caso de conmutadores múltiples que permitan controlar la luz desde dos interruptores distintos, necesitamos hacer uso de conmutadores de tres terminales. Estos son conmutadores especiales que cuentan con un terminal común y dos terminales de salida. La clave del funcionamiento de este esquema reside en el cableado de los conmutadores. El primer interruptor ( $Sw1$ ) tiene su terminal de entrada conectada a una fuente de alimentación que suministra energía, mientras que la entrada del segundo interruptor ( $Sw2$ ) está conectada a la lámpara. A su vez, los terminales de salida de ambos interruptores están conectados entre sí. Al pulsar los interruptores cambiaremos la posición de los conmutadores de manera que modificamos el camino que sigue la corriente desde la fuente hasta la lámpara. Si ambos interruptores están en la misma posición ( $a-c$  o  $b-d$  en la figura) la corriente fluirá hacia la lámpara, mientras que si uno de los interruptores cambia de posición ( $a-d$  o  $b-c$  en la figura) se corta el flujo de corriente hacia la lámpara.



## Potencia

**Cuestión 5.5 — Combinación para máxima potencia.** Dispone de tres resistores con igual resistencia  $R$  y una única fuente de tensión de valor  $V$ . ¿Cómo conectaría todos estos elementos para que se disipe la máxima potencia?

*Solución:*

La potencia eléctrica en una resistencia la podemos calcular a partir de la ecuación (4.7):

$$P = VI = \frac{V^2}{R}.$$

Según esta expresión, potencia y resistencia son inversamente proporcionales. Por tanto, si buscamos la combinación que nos disipa la mayor potencia, necesitamos que la resistencia total de la combinación de resistores sea mínima.

Con tres resistencias iguales, las combinaciones que podemos encontrar son las siguientes:

a) Todas las resistencias en serie:

$$R_a = 3R.$$

b) Todas las resistencias en paralelo:

$$R_b = \left(3\frac{1}{R}\right)^{-1} = \frac{R}{3}.$$

c) Dos resistencias en serie, en paralelo con la tercera resistencia:

$$R_c = \left( \frac{1}{2R} + \frac{1}{R} \right)^{-1} = \frac{2R^2}{3R} = \frac{2R}{3}.$$

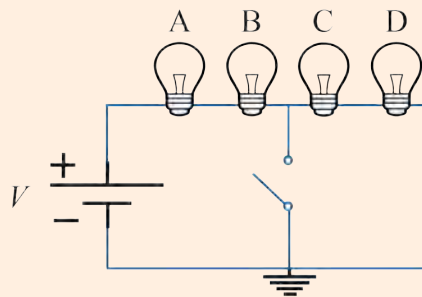
d) Dos resistencias en paralelo, en serie con la tercera resistencia:

$$R_d = \left( 2\frac{1}{R} \right)^{-1} + R = \frac{R}{2} + R = \frac{3R}{2}.$$

**Sol** Se concluye por tanto, que la combinación que da un valor menor de resistencia es cuando los tres resistores se combinan en paralelo,  $R_b = \frac{R}{3}$ , con una potencia disipada:

$$P_b = \frac{V^2}{R_b} = 3\frac{V^2}{R}.$$

**Cuestión 5.6 — *Lumos maxima*.** El siguiente circuito muestra cuatro bombillas idénticas conectadas a una batería. ¿Cómo emitirá más potencia luminosa el circuito con el interruptor cerrado o abierto?



*Solución:*

Para determinar cuando se emitirá más potencia luminosa debemos distinguir los dos estados del interruptor:

**Abierto:**

Con el interruptor abierto observamos que la corriente que fluye por las cuatro bombillas es la misma (están en serie). Considerando cada bombilla como una resistencia de valor  $R$  tendremos que la potencia total que se disipa en esta situación es:

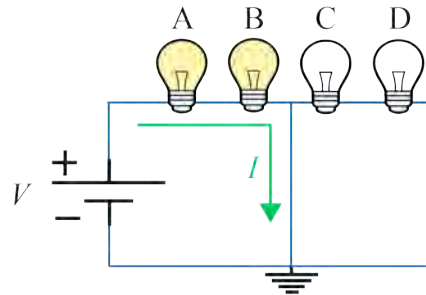
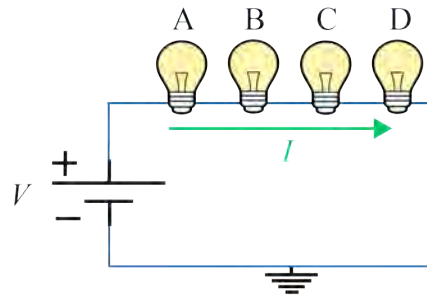
$$P_{Ab} = \frac{V^2}{R_{eq}} = \frac{V^2}{4R}.$$

### Cerrado:

Con el interruptor cerrado introducimos un cortocircuito que deja aisladas las bombillas  $C$  y  $D$ . La corriente que sale de la fuente de tensión fluye por las bombillas  $A$  y  $B$  y al llegar a la intersección sigue el camino de mínima resistencia (el cortocircuito), dejando la rama que tiene a las bombillas  $C$  y  $D$  sin corriente.

Por tanto, la potencia que se disipa en esta situación es debida únicamente a las bombillas  $A$  y  $B$  (que están en serie):

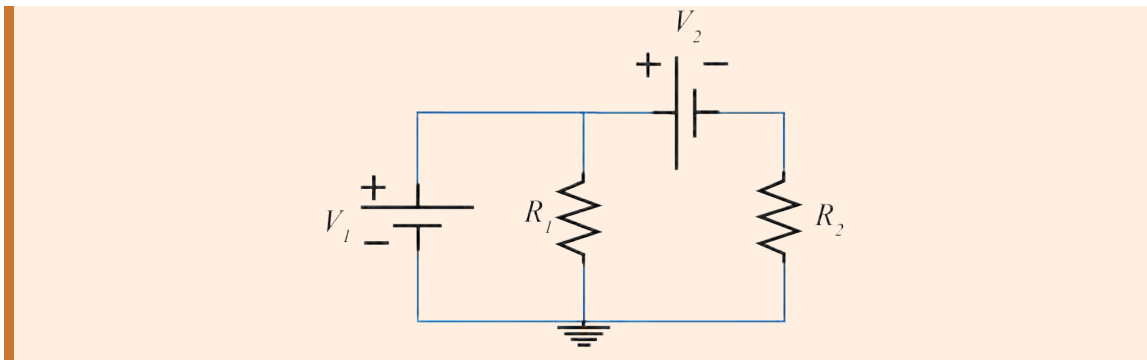
$$P_{Ce} = \frac{V^2}{R_{eq}} = \frac{V^2}{2R}.$$



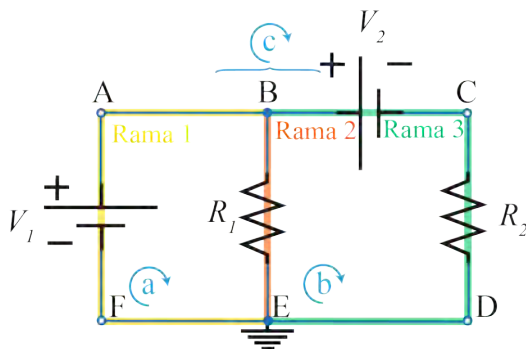
**Sol** Observamos que el circuito disipa mayor potencia y, por tanto, emite más luz, cuando el interruptor está cerrado y solo hay dos bombillas encendidas ( $A$  y  $B$ ). A pesar de tener solo dos bombillas encendidas, la corriente que fluye por ellas es mayor, lo cual implica una mayor potencia (luminosa en este caso) que cuando están las cuatro bombillas encendidas.

## Análisis de circuitos eléctricos

**Cuestión 5.7 — Nudos, Ramas y Mallas.** Identifique nudos, ramas y mallas en el circuito de la figura.



Sol

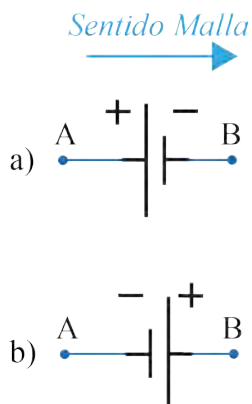


- Identificamos 2 nudos:  $B$  y  $E$ .
- Encontramos 3 ramas entre los nudos:
  - Rama 1: formada por  $EFAB$ .
  - Rama 2: formada por  $BE$ .
  - Rama 3: formada por  $BCDE$
- Existen 3 mallas:
  - Malla  $a$ : formada por  $ABEFA$ .
  - Malla  $b$ : formada por  $BCDEV$ .
  - Malla  $c$ : formada por  $ACDFA$ .

**Cuestión 5.8 — Fuerzas electromotrices en el análisis de circuitos.** Demuestre que al aplicar las reglas de Kirchhoff en el análisis de circuitos, las fuerzas electromotrices serán positivas,  $\varepsilon$ , si se recorren del terminal negativo al positivo. Por contra, serán negativas,  $-\varepsilon$ , si se recorren del terminal positivo al negativo.

Sol

Supongamos que recorremos una malla desde  $A$  hasta  $B$  y por el camino nos encontramos con una fuente de tensión. Bajo estas condiciones podemos calcular la caída de potencial y la diferencia de potencial en los dos casos de la figura:



a) Entramos por el terminal positivo:

Diferencia de potencial:  $\Delta V = V_B - V_A = \varepsilon$ ,  
 Caída de potencial:  $V \equiv \varepsilon = V_B - V_A = \Delta V = \varepsilon$ .

b) Entramos por el terminal negativo:

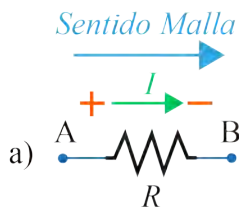
Diferencia de potencial:  $\Delta V = V_B - V_A = \varepsilon$ ,  
 Caída de potencial:  $V \equiv \varepsilon = V_A - V_B = -\Delta V = -\varepsilon$ .  $\square$

❗ Recordemos que la caída de potencial nos da la diferencia entre el punto a mayor tensión y el punto a menor, mientras que la diferencia de potencial nos da la diferencia en tensión entre el punto final y el punto inicial del recorrido.

**Cuestión 5.9 — Resistencias en el análisis de circuitos.** Demuestre que al aplicar las reglas de Kirchhoff en el análisis de circuitos, si una resistencia se atraviesa en la dirección de la corriente, la caída de potencial en ella es  $-IR$ . Por contra, si una resistencia se recorre en la dirección opuesta, la caída de potencial en ella es  $IR$ .

**Sol**

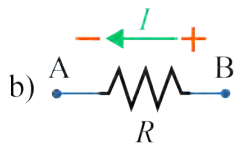
Supongamos que recorremos una malla desde  $A$  hasta  $B$  y por el camino nos encontramos con una fuente de resistencia. Bajo estas condiciones podemos calcular la caída de potencial y la diferencia de potencial en los dos casos de la figura:



a) Corriente paralela al recorrido de la malla:

Diferencia de potencial:  $\Delta V = V_B - V_A = IR$ ,

Caída de potencial:  $V \equiv \varepsilon = V_A - V_B = -\Delta V = -IR$ .

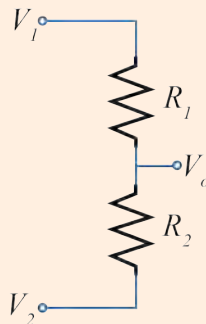


b) Corriente anti-paralela al recorrido de la malla:

Diferencia de potencial:  $\Delta V = V_B - V_A = IR$ ,

Caída de potencial:  $V \equiv \varepsilon = V_B - V_A = \Delta V = IR$ .  $\square$

**Cuestión 5.10 — Divisor de Tensión.** Determine el voltaje de salida,  $V_o$ , en función de  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $R_1$  y  $R_2$  si a)  $V_2 \neq 0$  V y b) a)  $V_2 = 0$  V.



*Solución:*

*Nota: El circuito representado en la figura es comúnmente denominado como divisor de tensión. Se trata de un circuito que reparte la tensión de una fuente en varias resistencias conectadas en serie.*

a) Para obtener el valor de  $V_o$ , supongamos que la corriente fluye de  $V_1$  a  $V_2$  con el objetivo de calcular la caída de tensión existente en  $R_2$  ( $V_{R_2} = V_2 - V_o = IR_2$ ) y despejar el valor de  $V_o$ . Para ello, necesitamos conocer previamente la corriente que pasa por la combinación en serie de resistencias. Esta corriente se puede obtener aplicando la segunda regla de Kirchhoff en el circuito de la figura:

$$V_1 - I(R_1 + R_2) - V_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{V_1 - V_2}{R_1 + R_2}$$

De manera que podemos obtener el valor de  $V_o$  vía la caída de potencial en  $R_1$  o en  $R_2$ :

$$V_{R_2} = V_2 - V_o = IR_2 \quad \Rightarrow \quad V_o = V_2 + IR_2 = V_2 + (V_1 - V_2) \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

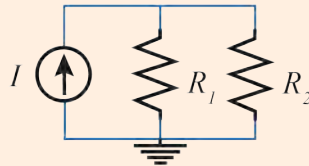
b) Si  $V_2 = 0$ , la tensión  $V_o$  es:

$$V_o = V_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

**Sol** En un divisor de tensión, la voltaje de salida es

$$V_o = \begin{cases} V_2 + (V_1 - V_2) \frac{R_2}{R_1 + R_2} & \text{si } V_2 \neq 0, \\ V_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} & \text{si } V_2 = 0. \end{cases}$$

**Cuestión 5.11 — Divisor de Corriente.** Determine la corriente que circula por la resistencia  $R_2$  en función de  $I$ ,  $R_1$  y  $R_2$ .



*Solución:*

*Nota: El circuito representado en la figura es comúnmente denominado como divisor de corriente. Se trata de un circuito que reparte la corriente de una fuente en varias resistencias conectadas en paralelo.*

Para obtener el valor de la corriente que circula por  $R_2$ ,  $I_2$  necesitamos conocer la caída de tensión que hay sobre dicha resistencia. Al estar  $R_1$  y  $R_2$  en paralelo se cumplirá que  $V_{R_1} = V_{R_2} = V_{Req}$ . Por tanto, el procedimiento más sencillo en este caso es hallar la caída de tensión a partir de la resistencia equivalente:

$$R_1 \parallel R_2 \Rightarrow R_{eq} = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \Rightarrow V_{Req} = I R_{eq}.$$

Conocido el valor de  $V_{Req}$  es directo obtener el valor de la corriente que pasa por  $R_2$ :

$$I_2 = \frac{V_{R_2}}{R_2} = \frac{V_{Req}}{R_2} = \frac{I R_{eq}}{R_2} = I \frac{R_1 R_2}{R_2(R_1 + R_2)} = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

**Sol** En un divisor de corriente, la corriente que circula por  $R_2$  es

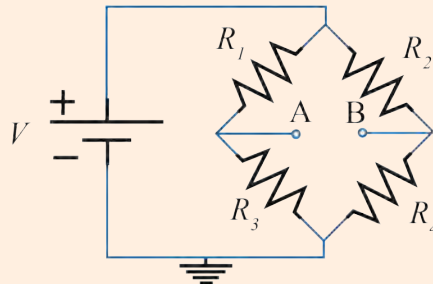
$$I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

**Cuestión 5.12 — Puentes de Wheatstone.** a) Determine el valor de  $V_{AB}$  en el circuito de la figura.

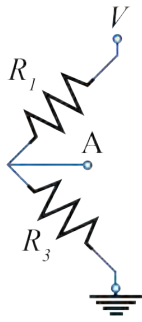
b) Demuestre que si  $V_A = V_B$  se cumple  $R_2 R_3 = R_1 R_4$ .

c) Calcule  $V_{AB}$  a  $100^\circ\text{C}$  cuando  $R_4$  está hecha de *Salasium*, un material cuya resistencia varía con la temperatura. Para ello utilice que el *Salasium* tiene una resistencia conocida de  $100\ \Omega$  a  $0^\circ\text{C}$  y un coeficiente de temperatura  $\alpha = 0.004^\circ\text{C}^{-1}$ .

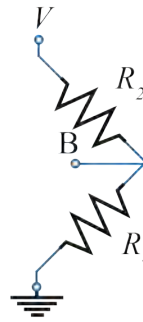
*Datos apartado c:*  $V = 10\ \text{V}$ ,  $R_1 = R_2 = 1\ \text{k}\Omega$ ,  $R_3 = 100\ \Omega$



a) En el puente de Wheatstone observamos dos divisores de tensión. Uno formado por las resistencias  $R_1$  y  $R_3$ , y el otro formado por  $R_2$  y  $R_4$ . De esta forma, el cálculo de  $V_A$  y  $V_B$  es directo aplicando la expresión del divisor de tensión:



$$V_A = V \frac{R_3}{R_1 + R_3}.$$



$$V_B = V \frac{R_4}{R_2 + R_4}.$$

Por tanto, el valor  $V_{AB}$  es:

$$V_{AB} = V_A - V_B = V \left( \frac{R_3}{R_1 + R_3} - \frac{R_4}{R_2 + R_4} \right).$$

b) Se dice que cuando  $V_A = V_B$  el puente está en equilibrio. Bajo esta condición se cumple que:

$$V_A = V_B \Rightarrow V \frac{R_3}{R_1 + R_3} = V \frac{R_4}{R_2 + R_4} \Rightarrow R_3(R_2 + R_4) = R_4(R_1 + R_3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_2 R_3 + R_3 R_4 = R_1 R_4 + R_3 R_4 \Rightarrow R_2 R_3 = R_1 R_4. \quad \square$$

c) Según nos indica el enunciado, en el puente de Wheatstone si incluye en  $R_4$  una resistencia variable con la temperatura. Para ello, determinar el valor de  $V_{AB}$ , primero debemos calcular el valor de la resistencia de *Salasium* a  $100^\circ\text{C}$ . Para ello emplearemos la ecuación (4.6):

$$R(T = 100^\circ\text{C}) = R(T = 0^\circ\text{C})(1 + \alpha(T - T_o)) = 100 \, \Omega(1 + 0.004^\circ\text{C}^{-1}(100^\circ\text{C})) = 140 \, \Omega.$$

Y, por tanto, a la salida del puente de Wheatstone hay una tensión:

$$V_{AB} = V \left( \frac{R_3}{R_1 + R_3} - \frac{R_4}{R_2 + R_4} \right) = 10 \, \text{V} \left( \frac{100}{1000 + 100} - \frac{140}{1000 + 140} \right) = -0.32 \, \text{V}.$$

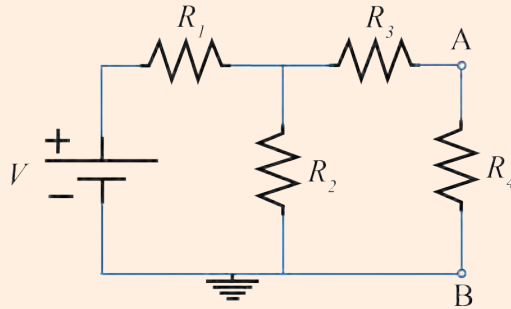
**Sol** El puente de Wheatstone genera a la salida una tensión

$$V_{AB} = V \left( \frac{R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_4}{R_2 + R_4} \right).$$

Cuando el puente está en equilibrio ( $V_A = V_B$ ) se cumple que  $R_2 R_3 = R_1 R_4$ .

Si se sustituye la  $R_4$  por una resistencia variable, el potencial a la salida será  $V_{AB} = -0.32 \, \text{V}$ .

**Cuestión 5.13 — Equivalentes Thévenin y Norton.** En el circuito de la figura, determine los equivalentes a) Thévenin y b) Norton entre los extremos  $A$  y  $B$ .

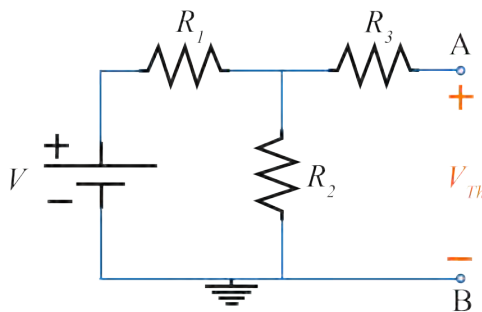


*Solución:*

a) Sabemos que el equivalente Thévenin del circuito se calcula mediante una fuente de tensión,  $V_{Th}$ , conectada en serie con una resistencia,  $R_{th}$ .

#### Fuente de tensión Thévenin

Para calcular la tensión de Thévenin,  $V_{Th}$ , calculamos la caída de tensión entre los extremos  $A$  y  $B$ ,  $V_{AB}$ , cuando entre ellos se establece un circuito abierto.

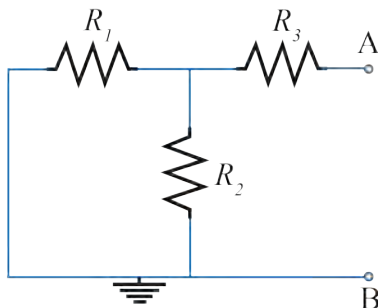


Para ello tengamos en cuenta que al estar el circuito abierto la corriente que atraviesa a  $R_3$  es nula. Por tanto,  $V_{AB}$  coincidirá con la caída de tensión existente en  $R_2$  que se puede obtener fácilmente si nos damos cuenta que en este caso tenemos un divisor de tensión:

$$V_{Th} = V_{AB} \stackrel{I_3=0}{=} V_{R_2} = V \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

#### Resistencia Thévenin

Para calcular la resistencia de Thévenin,  $R_{Th}$ , calculamos la resistencia equivalente entre los extremos  $A$  y  $B$ , cuando entre ellos se establece un circuito abierto.



Para ello tengamos en cuenta que tenemos una asociación de resistencias en la que  $R_1$  y  $R_2$  están en paralelo. A su vez, ambas están en serie con  $R_3$ :

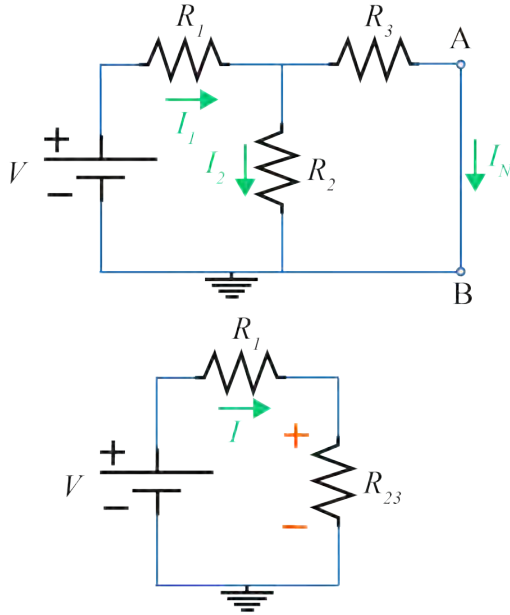
$$R_{Th} = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1} + R_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3$$

b) Sabemos que el equivalente Norton del circuito se calcula mediante una fuente de

corriente,  $I_N$ , conectada en paralelo con una resistencia,  $I_N$ .

### Fuente de corriente Norton

Para calcular la corriente de Norton,  $I_N$ , calculamos la corriente que circula entre los extremos  $A$  y  $B$ , cuando entre ellos se establece un cortocircuito. Para ello tengamos en cuenta que la corriente que circula entre  $A$  y  $B$  es la misma que atraviesa a  $R_3$ . Por tanto, podemos calcular esta corriente a partir de la ley de Ohm en  $R_3$ .



Para ello, antes necesitamos conocer la caída de potencial en  $R_3$  o, equivalente, en  $R_2$ , ya que al estar ambas resistencias en paralelo se cumple que  $V_{R_{23}} = V_{R_2} = V_{R_3}$ . Calculamos, por tanto, la resistencia equivalente,  $R_{23}$ :

$$R_{23} = \left( \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \right).$$

Y a partir del circuito equivalente, observamos que  $V_{R_{23}}$  se puede calcular como un divisor de tensión:

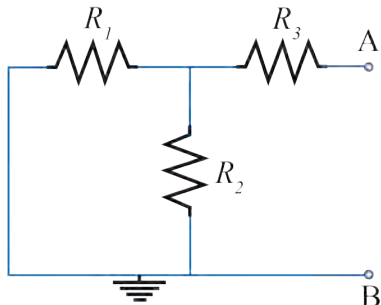
$$V_{R_{23}} = V \frac{R_{23}}{R_1 + R_{23}} = V \frac{R_{23}}{R_1 + R_{23}} \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}.$$

Dado que  $V_{R_{23}} = V_{R_3}$ , aplicando ley de Ohm, podemos obtener el valor de la corriente Norton,  $I_N$ :

$$I_N = \frac{V_{R_3}}{R_3} = V \frac{R_{23}}{R_1 + R_{23}} \frac{R_2}{R_2 + R_3}.$$

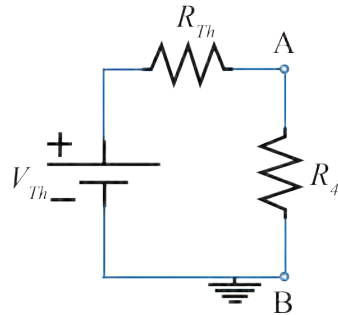
### Resistencia Norton

Para calcular la resistencia de Norton,  $R_N$ , calculamos la resistencia equivalente entre los extremos  $A$  y  $B$ , cuando entre ellos se establece un circuito abierto.



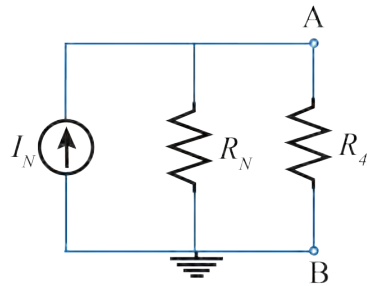
Para ello tengamos en cuenta que tenemos una asociación de resistencias en la que  $R_1$  y  $R_2$  están en paralelo. A su vez, ambas están en serie con  $R_3$ :

$$R_N = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1} + R_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3$$

**Sol****Equivalente Thévenin del circuito**

$$V_{Th} = V \frac{R_2}{R_1 + R_2},$$

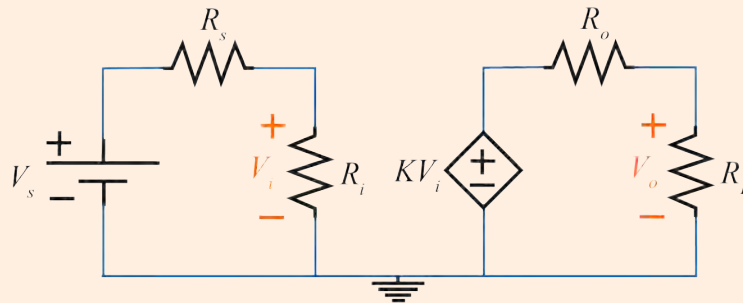
$$R_{Th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3.$$

**Equivalente Norton del circuito**

$$I_N = V \frac{R_{23}}{R_1 + R_{23}} \frac{R_2}{R_2 + R_3},$$

$$R_N = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3.$$

**Cuestión 5.14 — Amplificador de tensión.** El circuito de la figura muestra el modelo equivalente de un amplificador de tensión. Este tipo de circuito devuelve en la resistencia de carga,  $R_L$ , una tensión amplificada respecto de la que se presenta en la fuente,  $V_s$ . Determine el valor del voltaje en la resistencia de carga,  $V_o$ , en función de  $V_s$ ,  $R_s$ ,  $R_i$ ,  $R_o$  y  $R_L$ .

*Solución:*

En el modelo equivalente de un amplificador de tensión observamos que existen dos divisores de tensión. Uno en la entrada en las resistencias  $R_s$  y  $R_i$ , y otro en la salida en las resistencias  $R_o$  y  $R_L$ . Por tanto, para calcular el voltaje en  $R_L$  tenemos que aplicar dos veces la expresión hallada en la cuestión 5.10 para un divisor de tensión:

En la entrada tendremos que la tensión en la resistencia  $R_i$  es:

$$V_i = V_s \frac{R_i}{R_s + R_i}.$$

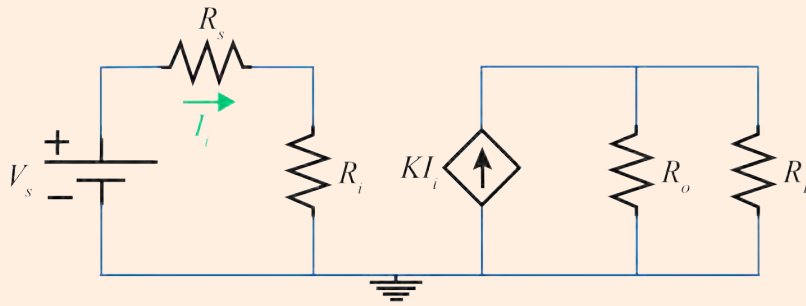
Usando esta relación, podemos calcular el valor de la tensión en la resistencia de carga,  $R_L$ :

$$V_o = KV_i \frac{R_L}{R_o + R_L} = KV_s \frac{R_i}{R_s + R_i} \frac{R_L}{R_o + R_L}.$$

**Sol** La tensión en la resistencia de carga,  $R_L$ , es:

$$V_o = KV_s \frac{R_i}{R_s + R_i} \frac{R_L}{R_o + R_L}.$$

**Cuestión 5.15 — Amplificador de corriente.** El circuito de la figura muestra el modelo equivalente de un amplificador de corriente. Este tipo de circuito devuelve en la resistencia de carga,  $R_L$ , una corriente amplificada respecto de la que se presenta en la fuente,  $I_i$ . Determine el valor de la corriente en la resistencia de carga,  $I_o$ , en función de  $I_i$ ,  $R_s$ ,  $R_i$ ,  $R_o$  y  $R_L$ .



*Solución:*

En el modelo equivalente de un amplificador de corriente observamos que existe un divisor de corriente en la salida en las resistencias  $R_o$  y  $R_L$ . En la entrada tenemos dos resistencias en serie,  $R_s$  y  $R_i$ . Por tanto, para calcular la corriente en  $R_L$  aplicamos ley de Ohm en la entrada y la expresión hallada en la cuestión 5.11 para un divisor de corriente:

En la entrada, la corriente en la resistencia  $R_i$  es:

$$I_i = \frac{V_s}{R_s + R_i}.$$

Usando esta relación, podemos calcular el valor de la corriente en la resistencia de carga,  $R_L$ :

$$I_o = KI_i \frac{R_L}{R_o + R_L} = K \frac{V_s}{R_s + R_i} \frac{R_L}{R_o + R_L}.$$

**Sol** La corriente en la resistencia de carga,  $R_L$ , es:

$$I_o = K \frac{V_s}{R_s + R_i} \frac{R_L}{R_o + R_L}.$$

## 5.8 Problemas

### Componentes activos de un circuito

**Problema 5.1 — Fuente de tensión.** Suponga un circuito eléctrico en el que se tiene una fuente de tensión de 2 V conectada a una resistencia de 4  $\Omega$ . Calcule la corriente eléctrica que circula por el circuito.

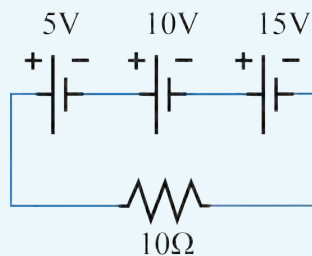
*Solución:*

La corriente eléctrica que circula por el circuito puede obtenerse aplicando la ley de Ohm, ecuación (4.3):

$$I = \frac{V}{R} = \frac{2}{4} = 0.5 \text{ A.}$$

**Sol** La corriente que circula por el circuito que tiene una fuente de tensión de 2 V y una resistencia de 4  $\Omega$  es 0.5 A.

**Problema 5.2** Calcule la corriente que circula por el circuito de la figura.



*Solución:*

Podemos considerar las tres fuentes de tensión asociadas en serie como una única fuente de valor la suma de todas ellas:

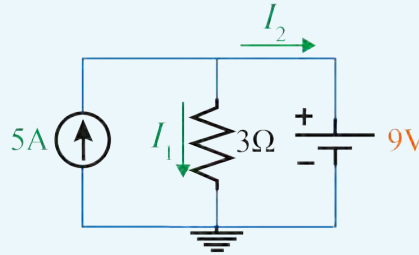
$$V = 5 \text{ V} + 10 \text{ V} + 15 \text{ V} = 30 \text{ V.}$$

Por tanto, la corriente eléctrica que circula por el circuito puede obtenerse aplicando la ley de Ohm, ecuación (4.3):

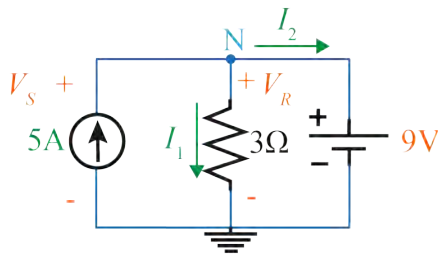
$$I = \frac{V}{R} = \frac{30}{10} = 3 \text{ A.}$$

**Sol** La corriente que circula por el circuito es 3 A.

**Problema 5.3 — Fuente de corriente.** En el circuito de la figura, determine la caída de potencial en la fuente de corriente y el valor de las corrientes  $I_1$  e  $I_2$ .



*Solución:*



La resistencia y la fuente de tensión están conectados por conductores ideales. Por tanto, se encuentra ante la misma caída de potencial,  $V_R = V = 9\text{ V}$ , por lo que podemos calcular la corriente que atraviesa a la resistencia,  $I_1$ , aplicando la ley de Ohm:

$$I_1 = \frac{V_R}{R} = \frac{9}{3} = 3\text{ A}.$$

De igual manera, la fuente de corriente está conectada a la resistencia y a la fuente de tensión mediante conductores ideales. Por tanto, la fuente de tensión tiene la misma caída de potencial entre sus extremos:

$$V_S = V = 9\text{ V}.$$

Para determinar el valor de la corriente  $I_2$  aplicamos el principio de conservación de la carga, según el cual la carga no se acumula en ningún punto del circuito. Es decir, la carga que entra por un nudo o punto del circuito tiene que ser igual a la que sale de él. Si nos centramos en el nudo  $N$ , vemos que hay dos corrientes salientes,  $I_1$  e  $I_2$ , y una corriente entrante, 5 A. Aplicando conservación de la carga en el nudo  $N$  se obtiene:

$$I_1 + I_2 = 5\text{ A} \quad \Rightarrow \quad I_2 = 5\text{ A} - I_1 = 5\text{ A} - 3\text{ A} = 2\text{ A}.$$

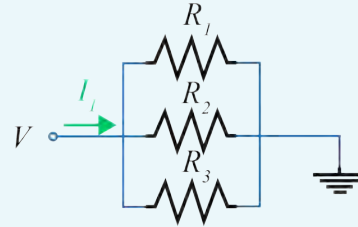
**Sol** La caída de potencial en la fuente de corriente es 9 V.

Las corrientes en la resistencia y en la fuente de tensión son 3 A y 2 A, respectivamente.

## Componentes pasivos de un circuito. Resistencias

**Problema 5.4 — Asociación de resistencias.** En el circuito de la figura, determine:

- La resistencia equivalente.
- La corriente que circula por cada una de las resistencias.
- La potencia disipada en cada una de las resistencias.

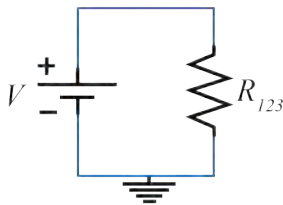


Datos:  $V = 6 \text{ V}$ ,  $R_1 = 2 \Omega$ ,  $R_2 = 3 \Omega$  y  $R_3 = 6 \Omega$

*Solución:*

*Nota:* La representación del circuito es una manera alternativa de presentar una fuente de tensión de valor  $V$ .

- a) *Circuito equivalente:*  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  están bajo la misma caída de potencial. Por tanto, las tres resistencias están en paralelo y podemos calcular su resistencia equivalente,  $R_{123}$ .



$$R_{123} = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)^{-1} = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right)^{-1} \Omega = 1 \Omega.$$

- b) Al estar las tres resistencias en paralelo, la caída de potencial en ellas es igual. Coincide que la caída de potencias en cada resistencia es igual a la de la fuente de tensión:  $V = V_{R_1} = V_{R_2} = V_{R_3} = 6 \text{ V}$ . Para hallar la corriente que pasa por cada resistencia, aplicamos ley de Ohm.

$$I_{R_1} = \frac{V_{R_1}}{R_1} = \frac{6 \text{ V}}{2 \Omega} = 3 \text{ A}.$$

$$I_{R_2} = \frac{V_{R_2}}{R_2} = \frac{6 \text{ V}}{3 \Omega} = 2 \text{ A}.$$

$$I_{R_3} = \frac{V_{R_3}}{R_3} = \frac{6 \text{ V}}{6 \Omega} = 1 \text{ A}.$$

- c) Conocidos los valores de corriente, tensión y resistencia el cálculo de la potencia disipada en cada resistor es directo.

$$P_{R_1} = V_{R_1} I_{R_1} = 6 \text{ V } 3 \text{ A} = 18 \text{ W}.$$

$$P_{R_2} = V_{R_2} I_{R_2} = 6 \text{ V } 2 \text{ A} = 12 \text{ W}.$$

$$P_{R_3} = V_{R_3} I_{R_3} = 6 \text{ V } 1 \text{ A} = 1 \text{ W}.$$

**Sol** Tenemos un circuito con tres resistencias en paralelo cuya resistencia equivalente es  $1 \Omega$ .

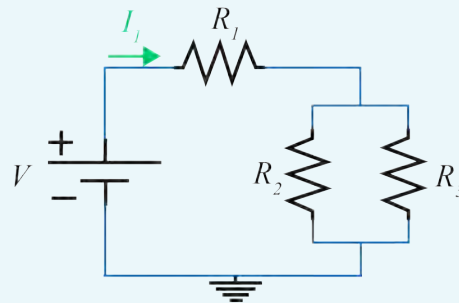
Las corrientes que circulan por las resistencias  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  son 3 A, 2 A y 1 A, respectivamente. Igualmente, las potencias que se disipan en dichas resistencias son 18 W, 12 W y 1 W, respectivamente.

## Análisis de circuitos eléctricos

**Problema 5.5 — Análisis del circuito.** En el circuito de la figura, determine:

- La resistencia equivalente.
- La corriente que circula por cada una de las resistencias.
- La potencia disipada en cada una de las resistencias.

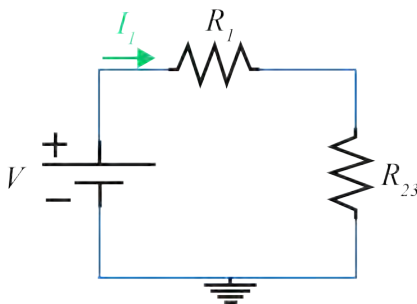
*Datos:*  $V = 4 \text{ V}$ ,  $R_1 = 2 \Omega$ ,  $R_2 = 3 \Omega$  y  $R_3 = 6 \Omega$



*Solución:*

a)

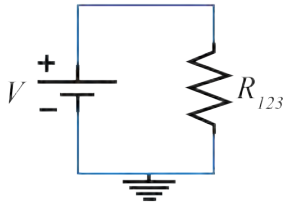
*Circuito equivalente 1:*



En el circuito de la figura  $R_2$  y  $R_3$  están bajo la misma caída de potencial. Por tanto, ambas resistencias están en paralelo y podemos calcular el circuito equivalente de la izquierda con resistencia equivalente,  $R_{23}$ :

$$R_{23} = \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)^{-1} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 2 \Omega.$$

*Circuito equivalente 2:*



Observamos ahora que  $R_1$  y  $R_{23}$  tienen la misma corriente. Por tanto, ambas resistencias están en serie y podemos calcular el circuito equivalente de la izquierda con resistencia equivalente,  $R_{123}$  :

$$R_{123} = R_1 + R_{23} = 4 \Omega.$$

b)  $R_1$  y  $R_{23}$  están en serie. Por tanto, la corriente por ellas y por su resistencia equivalente,  $R_{123}$ , es la misma. Podemos obtener esta corriente aplicando la ley de Ohm sobre el circuito equivalente 2:

$$I_1 = \frac{V}{R_{123}} = \frac{4 \text{ V}}{4 \Omega} = 1 \text{ A}.$$

$R_2$  y  $R_3$  están en paralelo, por tanto, están bajo la misma caída de potencial. Utilizaremos esta propiedad para determinar la corriente que las atraviesa. La caída de potencial de ambas resistencias,  $V_{R_2} = V_{R_3}$ , puede obtenerse aplicando la segunda ley de Kirchhoff sobre el circuito original:

$$2\text{RK: } V - V_{R_1} - V_{R_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{R_2} = V - V_{R_1} = V - I_1 R_1 = 4 \text{ V} - 1 \text{ A } 2 \Omega = 2 \text{ V}.$$

Conocidas la caída de potencial existente en  $R_2$  y en  $R_3$ , determinamos las corrientes que las atraviesan mediante la ley de Ohm:

$$I_2 = \frac{V_{R_2}}{R_2} = \frac{2 \text{ V}}{3 \Omega} = 6 \text{ A}, \quad I_3 = \frac{V_{R_3}}{R_3} = \frac{2 \text{ V}}{6 \Omega} = 12 \text{ A},$$

c) Conocidos los valores de corriente, tensión y resistencia el cálculo de la potencia disipada en cada resistor es directo.

$$P_{R_1} = V_{R_1} I_{R_1} = 2 \text{ V } 1 \text{ A} = 2 \text{ W}.$$

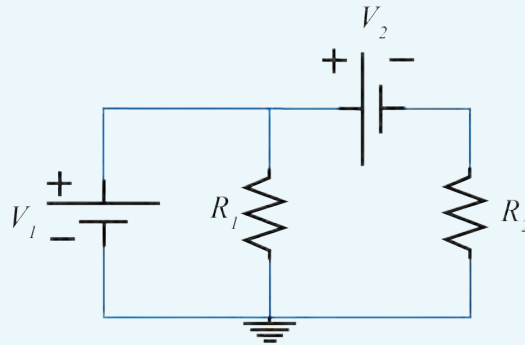
$$P_{R_2} = V_{R_2} I_{R_2} = 2 \text{ V } 6 \text{ A} = 12 \text{ W}.$$

$$P_{R_3} = V_{R_3} I_{R_3} = 2 \text{ V } 12 \text{ A} = 24 \text{ W}.$$

**Sol** Tenemos un circuito con dos resistencias en paralelo y otra en serie cuya resistencia equivalente total es  $4\ \Omega$ .

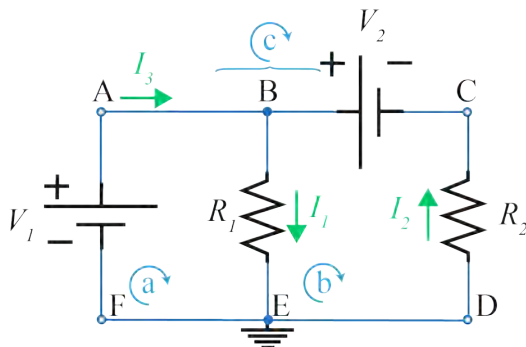
Las corrientes que circulan por las resistencias  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  son 1 A, 6 A y 12 A, respectivamente. Igualmente, las potencias que se disipan en dichas resistencias son 2 W, 12 W y 24 W, respectivamente.

**Problema 5.6 — Corrientes de rama.** Calcule las corrientes de rama del circuito de la figura. Datos:  $V_1 = 10\text{ V}$ ,  $V_2 = 5\text{ V}$ ,  $R_1 = 2\ \Omega$  y  $R_2 = 5\ \Omega$ .



*Solución:*

Este problema empezó a resolverse en la cuestión 5.7. En ella vimos que este circuito tiene tres ramas, por tanto, tendremos tres corrientes de rama y necesitaremos tres ecuaciones para hallarlas que podemos obtener a partir de las reglas de Kirchhoff.



1) En el circuito tenemos:

- 2 Nudos: B y E.
- 3 Ramas: EFAB, BE y BCDE.
- 3 Mallas:
  - a: ABEFA,
  - b: BCDEB,
  - c: ACDF A.

2) Tenemos tres ramas y, por tanto, tres corrientes de rama cuyo sentido establecemos de manera arbitraria como se muestra en la figura.

3) Reglas de Kirchhoff para establecer tres ecuaciones linealmente independientes:

$$\left. \begin{array}{ll} 1\text{RK.B:} & I_2 + I_3 = I_1, & (1) \\ 2\text{RK.a:} & V_1 = I_1 R_1 & (2) \\ 2\text{RK.b:} & -V_2 + I_2 R_2 + I_1 R_1 = 0. & (3) \end{array} \right\}$$

Los valores de las corrientes  $I_1$  e  $I_2$  los obtenemos directamente de las ecuaciones (2) y (3) respectivamente:

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1} = \frac{10 \text{ V}}{5 \Omega} = 5 \text{ A},$$

$$I_2 = \frac{V_2 - I_1 R_1}{R_2} \stackrel{(2)}{=} \frac{V_2 - V_1}{R_2} = \frac{5 \text{ V} - 10 \text{ V}}{5 \Omega} = -1 \text{ A},$$

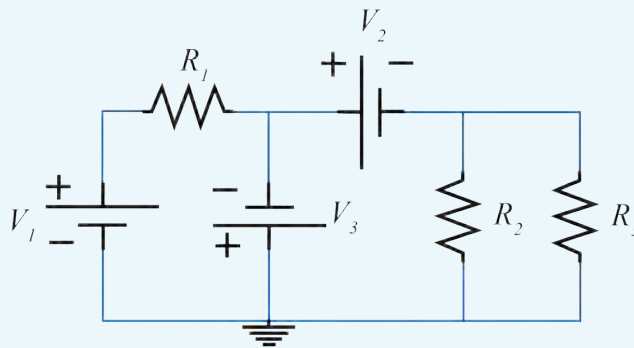
Y, el valor de  $I_3$  se calcula a partir de la expresión (1):

$$I_3 = I_1 - I_2 \Rightarrow I_3 = 5 \text{ A} - (-1 \text{ A}) = 6 \text{ A}.$$

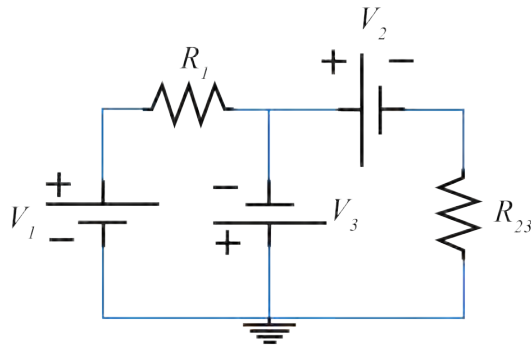
4) Las corrientes  $I_1$  e  $I_3$  tienen direcciones correctas. La corriente  $I_2$  es negativa y, por tanto, fluirá en el sentido contrario al establecido al principio del problema.

**Sol** Las corrientes de rama del circuito son  $I_1 = 5 \text{ A}$ ,  $I_2 = 1 \text{ A}$  e  $I_3 = 6 \text{ A}$ . Hay que tener en cuenta que  $I_2$  fluye en el sentido contrario al elegido al resolver el ejercicio.

**Problema 5.7 — Corrientes en el circuito.** Calcule las corrientes que pasan por las resistencias  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  en el circuito de la figura. *Datos:*  $V_1 = 12 \text{ V}$ ,  $V_2 = 6 \text{ V}$ ,  $V_3 = 3 \text{ V}$ ,  $R_1 = 3 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 2 \text{ k}\Omega$  y  $R_3 = 1 \text{ k}\Omega$ .



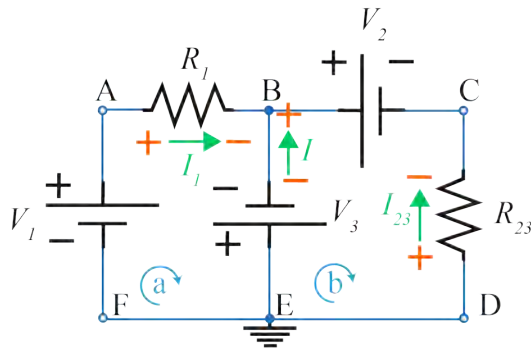
*Circuito equivalente:*



Observamos que  $R_2$  y  $R_3$  tienen el mismo potencial,  $V_{R_3} = V_{R_4}$ . Se encuentran, por tanto, en paralelo y su resistencia equivalente es:

$$R_{23} = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{1} \right)^{-1} \text{ k}\Omega = \frac{2}{3} \text{ k}\Omega.$$

A continuación, para calcular las corrientes, aplicamos las reglas de Kirchhoff:



1) En el circuito equivalente tenemos:

- 2 Nudos: B y E.
- 3 Ramas: EFAB, BE y BCDE.
- 3 Mallas:
  - a: ABEFA,
  - b: BCDEB,
  - c: ACDFEA.

2) Tenemos tres ramas y, por tanto, tres corrientes de rama cuyo sentido establecemos de manera arbitraria como se muestra en la figura.

3) En este caso, si prestamos atención solo nos hacen falta dos ecuaciones para obtener las corrientes que se piden en el problema:

$$2\text{RK.a: } V_1 - I_1 R_1 + V_3 = 0 \Rightarrow I_1 = \frac{V_1 + V_3}{R_1} = \frac{12 \text{ V} + 3 \text{ V}}{3 \text{ k}\Omega} = 5 \text{ mA}.$$

$$2\text{RK.b: } -V_2 + I_{23} R_{23} - V_3 = 0 \Rightarrow I_{23} = \frac{V_2 + V_3}{R_{23}} = \frac{6 \text{ V} + 3 \text{ V}}{\frac{2}{3} \text{ k}\Omega} = \frac{27}{2} \text{ mA}.$$

Para hallar las corrientes que pasan por las resistencias  $R_2$  y  $R_3$ , obtenemos primero, a partir de las 2RK en la malla b, la caída de potencial en la resistencia equivalente,  $R_{23}$ .

$$-V_2 + V_{23} - V_3 = 0 \Rightarrow V_{23} = V_2 + V_3 = 6 \text{ V} + 3 \text{ V} = 9 \text{ V}.$$

Al estar  $R_2$  y  $R_3$  en paralelo se cumple que  $V_{23} = V_{R_2} = V_{R_3} = 9 \text{ V}$  y podremos calcular la corriente que pasa por ellas a partir de la ley de Ohm.

$$I_2 = \frac{V_{R_2}}{R_2} = \frac{9 \text{ V}}{2 \text{ k}\Omega} = 4.5 \text{ mA},$$

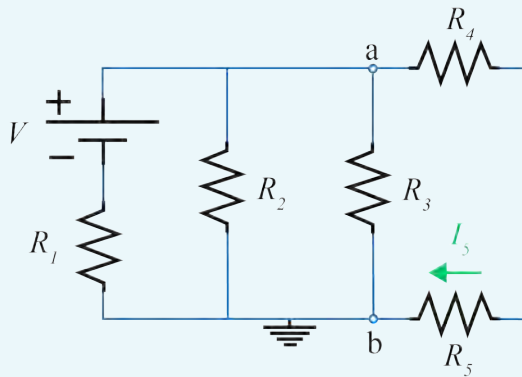
$$I_3 = \frac{V_{R_3}}{R_3} = \frac{9 \text{ V}}{1 \text{ k}\Omega} = 9 \text{ mA},$$

4) Todas las corrientes calculadas tienen direcciones correctas.

**Sol** Las corrientes que pasan por las resistencias  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  del circuito son  $I_1 = 5 \text{ mA}$ ,  $I_2 = 4.5 \text{ mA}$  e  $I_3 = 9 \text{ mA}$ , respectivamente.

⚠ En este ejercicio se ha utilizado que  $\frac{1 \text{ V}}{1 \text{ k}\Omega} = \frac{1 \text{ V}}{10^3 \Omega} = 10^{-3} \text{ A} = 1 \text{ mA}$ .

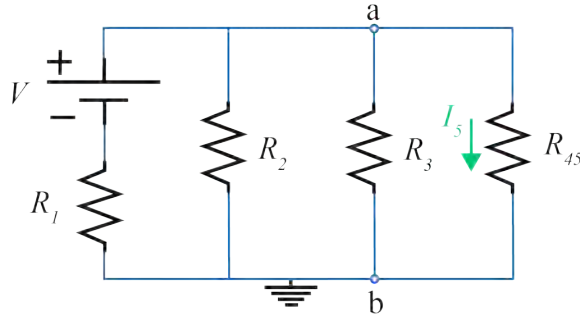
**Problema 5.8 — Análisis del circuito.** Calcule la corriente que atraviesa la resistencia  $R_5$ , la diferencia de potencial entre  $a$  y  $b$  y la potencia consumida por  $R_1$  en el circuito de la figura. Datos:  $V = 25 \text{ V}$ ,  $R_1 = 4 \Omega$ ,  $R_2 = 2 \Omega$  y  $R_3 = R_4 = R_5 = 3 \Omega$ .



Lo primero que observamos en este circuito es que existen varias asociaciones entre resistencias que se pueden realizar para abordar el análisis del circuito de manera más sencilla.

*Circuito equivalente:*

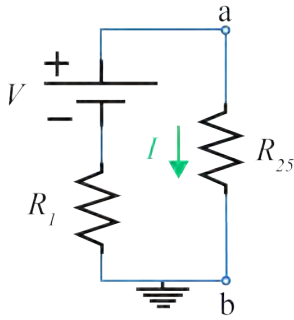
(I)



Observamos que  $R_4$  y  $R_5$  tienen la misma corriente,  $I_5$ , y se encuentran, por tanto, en serie. Su resistencia equivalente,  $R_{45}$ , es:

$$R_{45} = 3 \, \Omega + 3 \, \Omega = 6 \, \Omega.$$

(II)



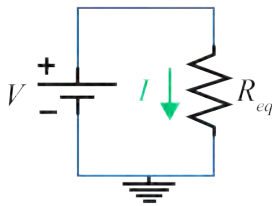
La corriente que pasa por la resistencia equivalente,  $R_{45}$ , seguirá siendo  $I_5$  y se podrá calcular fácilmente aplicando ley de Ohm. Para ello, antes necesitamos conocer el valor de  $V_{ab}$ .

Para calcular  $V_{ab}$ , tenemos en cuenta  $R_2$ ,  $R_3$  y  $R_{45}$  están bajo esta caída de potencial, y por tanto, se encuentran en paralelo. Su resistencia equivalente,  $R_{25}$ , es:

$$R_{25} = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right)^{-1} \, \Omega = 1 \, \Omega.$$

La caída de potencial es la misma en las resistencias en paralelo y en su equivalente,  $V_{R_2} = V_{R_3} = V_{R_{45}} = V_{R_{25}} = V_{ab}$ , y se puede calcular si determinamos el valor de la corriente,  $I$ , que pasa por la resistencia equivalente  $R_{25}$ .

(III)



Para determinar el valor de  $I$ , observamos que las resistencias  $R_1$  y  $R_{25}$  están bajo esta corriente y, por tanto, en serie. Su resistencia equivalente,  $R_{eq}$ , es:

$$R_{eq} = 4 \, \Omega + 1 \, \Omega = 5 \, \Omega.$$

Aplicando ley de Ohm en (III) sobre  $R_{eq}$ , podemos hallar el valor de  $I$ .

$$I = \frac{V}{R_{eq}} = \frac{25 \, \text{V}}{5 \, \Omega} = 5 \, \text{A}.$$

El valor de  $V_{ab}$  lo podemos obtener aplicando ley de Ohm sobre la resistencia equivalente  $R_{25}$ .

$$V_{ab} = IR_{23} = 5 \text{ A } 1 \Omega = 5 \text{ V}.$$

Conocido  $V_{ab}$  podemos calcular el valor de la corriente en  $R_5$ .

$$I_5 = \frac{V_{R_5}}{R_{45}} = \frac{V_{ab}}{R_{45}} = \frac{5 \text{ V}}{6 \Omega} = \frac{5}{6} \text{ A}.$$

Y la potencia consumida por  $R_1$  la calculamos a partir de la corriente  $I$ .

$$P_{R_1} = I^2 R_1 = (5 \text{ A})^2 4 \Omega = 100 \text{ W}.$$



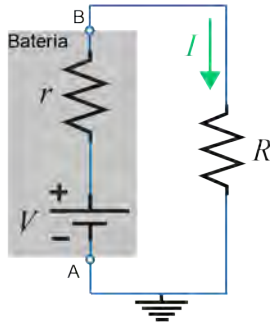
La corriente que pasa por la resistencia  $R_5$  es  $5/6 \text{ A}$ , la diferencia de potencial entre  $a$  y  $b$  es  $5 \text{ V}$  y la potencia consumida por  $R_1$  es  $100 \text{ W}$ .

**Problema 5.9 — Fuentes de tensión reales.** Suponga que la batería de un smartphone tiene un voltaje nominal de  $V = 5 \text{ V}$  con una resistencia interna de  $r = 0.05 \Omega$ .

- Encuentre el valor del voltaje entre los bornes de la batería y la corriente que circula por el circuito cuando la batería se conecta con el smartphone que se modela como una resistencia de  $R = 10 \Omega$ .
- Calcule la potencia entregada por la batería al smartphone. ¿Qué potencia se disipa en la resistencia interna de la batería?
- Con el paso del tiempo, la resistencia interna de la batería aumenta llegando  $r' = 3 \Omega$  al final de su vida útil. Calcule la potencia entregada por la batería al smartphone y la que se disipa en la resistencia interna en este caso.

*Solución:*

- Suponemos un circuito de la figura en el que tenemos una fuente de tensión  $V$  conectada en serie a dos resistencias,  $R$  y  $r$ . Los puntos  $A$  y  $B$  indican los bornes de la batería, de manera que la caída de tensión  $V_{AB}$  indica el voltaje que suministra la fuente real al dispositivo.



Podemos calcular la corriente existente en el circuito aplicando la ley de Ohm:

$$I = \frac{V}{R + r} = \frac{5 \text{ V}}{10 \Omega + 0.05 \Omega} = 0.498 \text{ A} = 498 \text{ mA}.$$

El voltaje existente entre los bornes será  $V_{AB}$ :

$$V_{AB} = V - Ir = IR = 5 \text{ V} - 0.498 \text{ A} \cdot 0.05 \Omega = 4.98 \text{ V}.$$

b) La potencia entregada por la batería al smartphone puede calcularse como:

$$P_R = VI = I^2 R = (0.498 \text{ A})^2 10 \Omega = 2.5 \text{ W}.$$

La potencia disipada en la resistencia interna de la fuente puede calcularse como:

$$P_r = VI = I^2 r = (0.498 \text{ A})^2 0.05 \Omega = 0.012 \text{ W} = 12 \text{ mW}.$$

c) Si la resistencia interna aumenta de valor tendremos una nueva corriente circulando por el circuito:

$$I' = \frac{V}{R + r'} = \frac{5 \text{ V}}{10 \Omega + 3 \Omega} = 0.385 \text{ A} = 385 \text{ mA}.$$

Esto provoca que el voltaje que sale de la batería sea:

$$V_{AB} = V - Ir = IR = 5 \text{ V} - 0.385 \text{ A} \cdot 3 \Omega = 3.85 \text{ V}.$$

La potencia entregada por la batería al smartphone es:

$$P_R = VI = I^2 R = (0.385 \text{ A})^2 10 \Omega = 1.5 \text{ W}.$$

La potencia disipada en la resistencia interna de la fuente puede calcularse como:

$$P_r = VI = I^2 r = (0.385 \text{ A})^2 0.05 \Omega = 0.445 \text{ W} = 445 \text{ mW}.$$

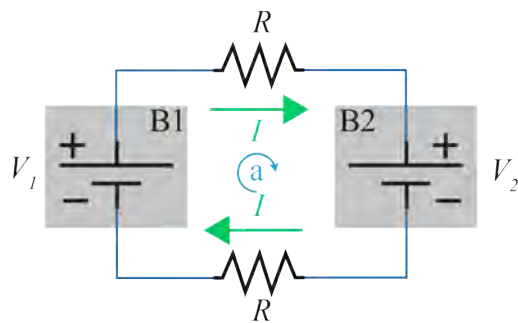


Cuando la batería aporta un voltaje de 4.98 V y la corriente que circula por el circuito es 498 mA. En estas condiciones, la batería entrega 2.5 W al smartphone, quedándose 12 mW en la fuente. Cuando la batería está al final de su vida útil, la corriente en el circuito baja a 385 mA, por lo que el voltaje que sale de la batería es 3.85 V. En esta situación, la batería entrega 1.5 W al smartphone, quedándose 445 mW en la fuente.

**Problema 5.10 — ¡Trata de arrancarlo Carlos!** Para recargar una batería de coche con poca energía, se conecta a otra batería en buen estado utilizando cables de arranque. a) ¿A qué terminal de la batería descargada debemos conectar el polo positivo de la batería cargada? b) Calcule la corriente de carga, para ello suponga que la batería en buen estado tiene una fuerza electromotriz (fem) de 12.6 V, la batería descargada 11.5 V y la resistencia de los cables es  $0.005 \Omega$ .

Para saber a qué terminal de la batería cargada conectamos la batería descargada, aplicamos segunda regla de Kirchhoff en las siguientes opciones para determinar la corriente que circularía por los cables de arranque en cada caso. Para ello consideremos que  $B1$  es la batería cargada con  $V_1 = 12.6 \text{ V}$ ,  $B2$  es la batería descargada con  $V_1 = 11.5 \text{ V}$ , y que los cables de carga no son conductores ideales y presentan una resistencia  $R = 0.005 \Omega$ .

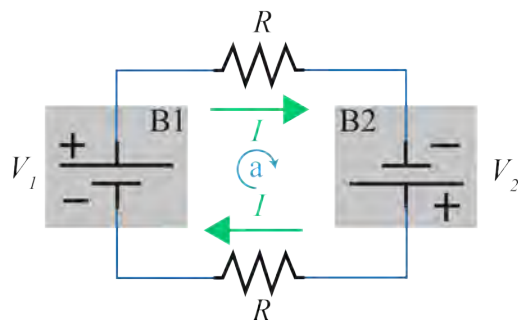
(I) Conectamos terminal positivo de  $B1$  con positivo de  $B2$  y negativo de  $B1$  con negativo de  $B2$ :



$$2R \text{ a: } V_1 - 2IR - V_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{V_2 - V_1}{2R} = \frac{12.6 \text{ V} - 11.5 \text{ V}}{2 \cdot 0.005 \Omega} = 110 \text{ A}.$$

(II) Conectamos terminal positivo de  $B1$  con el negativo de  $B2$  y el negativo de  $B1$  con negativo de  $B2$ :



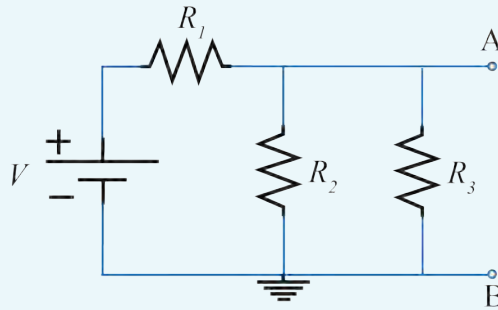
$$2R \text{ a: } V_1 - 2IR + V_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{V_2 + V_1}{2R} = \frac{12.6 \text{ V} + 11.5 \text{ V}}{2 \cdot 0.005 \Omega} = 2410 \text{ A}.$$

**Sol** Para no tener una corriente de carga excesivamente alta, debemos conectar el terminal positivo de  $B1$  con el positivo de  $B2$ , y el negativo de  $B1$  con el negativo de  $B2$ . En esta situación, la corriente de carga es 110 A.

**Problema 5.11 — Thévenin y Norton.** Dado el siguiente circuito, determina el circuito equivalente de Thévenin y Norton vistos desde los terminales  $A$ - $B$ .

*Datos:*  $V = 24 \text{ V}$ ,  $R_1 = 6 \Omega$ ,  $R_2 = 3 \Omega$ ,  $R_3 = 6 \Omega$ .

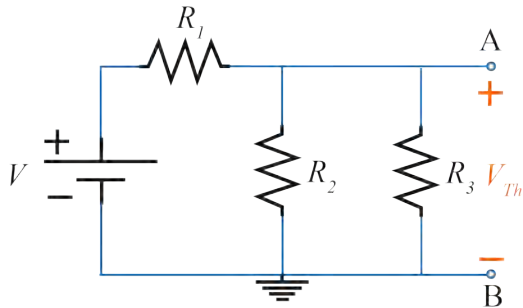


*Solución:*

a) Sabemos que el equivalente Thévenin del circuito se calcula mediante una fuente de tensión,  $V_{Th}$ , conectada en serie con una resistencia,  $R_{th}$ .

### Fuente de tensión Thévenin

Para calcular la tensión de Thévenin,  $V_{Th}$ , calculamos la caída de tensión entre los extremos  $A$  y  $B$ ,  $V_{AB}$ , cuando entre ellos se establece un circuito abierto.



Para ello tengamos en cuenta que la caída de tensión Thévenin es la misma que la que tenemos en  $R_2$  y  $R_3$ , ya que están en paralelo:

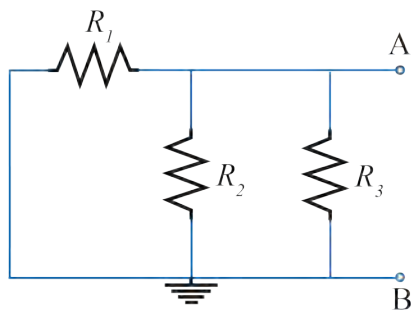
$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{3 \Omega \cdot 6 \Omega}{3 \Omega + 6 \Omega} = 2 \Omega.$$

Una vez calculada la resistencia equivalente nos damos cuenta de que existe un divisor de tensión en las resistencias  $R_1$  y  $R_{23}$  que nos proporciona directamente el resultado de  $V_{Th}$ :

$$V_{Th} = V_i \frac{R_{23}}{R_1 + R_{23}} = 24 \text{ V} \frac{2 \Omega}{6 \Omega + 2 \Omega} = 6 \text{ V}.$$

### Resistencia Thévenin

Para calcular la resistencia de Thévenin,  $R_{Th}$ , calculamos la resistencia equivalente entre los extremos  $A$  y  $B$ , cuando entre ellos se establece un circuito abierto. Además, debemos anular la fuentes, por tanto, la fuente de tensión pasará a ser un cortocircuito y la fuente de corriente un circuito abierto.



En esta situación observamos que  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  están bajo la misma caída de potencial y, por tanto, están en paralelo.

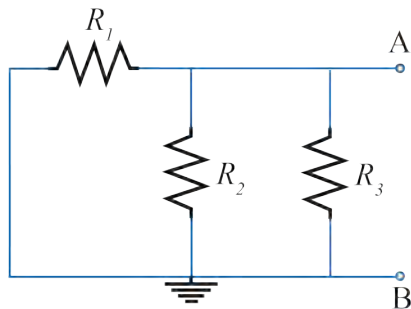
$$R_{Th} = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)^{-1} =$$

$$= \left( \frac{1}{6\ \Omega} + \frac{1}{3\ \Omega} + \frac{1}{6\ \Omega} \right)^{-1} = \frac{3}{2}\ \Omega.$$

b) Sabemos que el equivalente Norton del circuito se calcula mediante una fuente de corriente,  $I_N$ , conectada en paralelo con una resistencia,  $I_N$ .

### Fuente de corriente Norton

Para calcular la corriente de Norton,  $I_N$ , calculamos la corriente que circula entre los extremos  $A$  y  $B$ , cuando entre ellos se establece un cortocircuito.



En este caso observamos que la corriente al salir de  $R_1$  seguirá el camino de menor resistencia y, por tanto, seguirá su camino por el cortocircuito obviando las resistencias  $R_2$  y  $R_3$ . Es por este motivo que la corriente Norton coincide con la corriente que atraviesa a  $R_1$ :

$$I_N = \frac{V}{R_1} = \frac{24\ \text{V}}{6\ \Omega} = 6\ \text{V}.$$

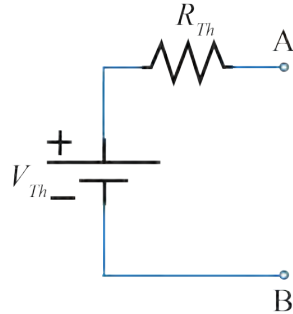
### Resistencia Norton

La resistencia de Norton se calcula de igual manera que la resistencia de Thévenin, hallada anteriormente:

$$R_N = \frac{3}{2}\ \Omega.$$

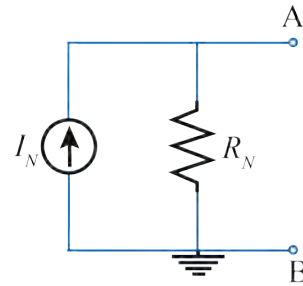


Equivalente Thévenin



$$V_{Th} = 6 \text{ V}, \quad R_{Th} = \frac{3}{2} \Omega.$$

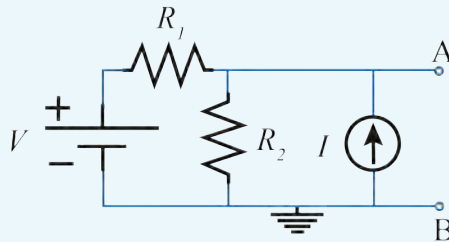
Equivalente Norton



$$I_N = 4 \text{ A}, \quad R_N = \frac{3}{2} \Omega.$$

**Problema 5.12 — Thévenin y Norton con fuente de corriente.** Dado el siguiente circuito, determina los circuitos equivalente de Thévenin y Norton vistos desde los terminales  $A$ - $B$ .

*Datos:*  $V = 10 \text{ V}$ ,  $I = 1 \text{ A}$  y  $R_1 = R_2 = 2 \Omega$ .

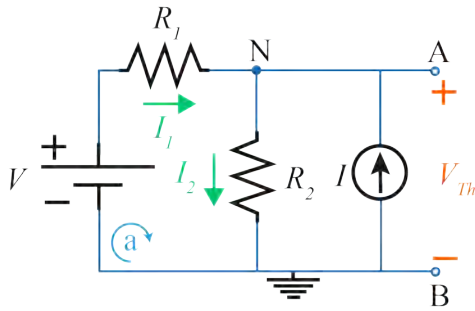


*Solución:*

a) Sabemos que el equivalente Thévenin del circuito se calcula mediante una fuente de tensión,  $V_{Th}$ , conectada en serie con una resistencia,  $R_{th}$ .

### Fuente de tensión Thévenin

Para calcular la tensión de Thévenin,  $V_{Th}$ , calculamos la caída de tensión entre los extremos  $A$  y  $B$ ,  $V_{AB}$ , cuando entre ellos se establece un circuito abierto.



Para ello tengamos en cuenta que la fuente de corriente y la resistencia  $R_2$  están en paralelo y que su caída de potencial es  $V_{Th}$ . Aplicando ley de Ohm sobre  $R_2$  se tendrá que:

$$V_{Th} = I_2 R_2 \Rightarrow I_2 = \frac{V_{Th}}{R_2}.$$

Para hallar la tensión de Thévenin aplicamos reglas de Kirchhoff:

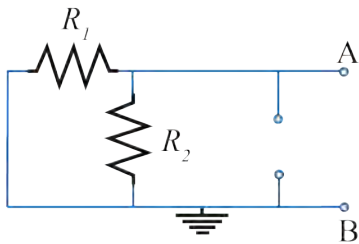
$$\text{1RK N: } I_1 + I = I_2 = \frac{V_{Th}}{R_2} \Rightarrow I_1 = \frac{V_{Th}}{R_2} - I,$$

$$\text{2RK a: } V - I_1 R_1 - V_{Th} = 0 \Rightarrow V - \left( \frac{V_{Th}}{R_2} R_1 - I R_1 \right) - V_{Th} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{Th} \left( \frac{R_1}{R_2} + 1 \right) = V + I R_1 \Rightarrow V_{Th} = \frac{V + I R_1}{R_1 + R_2} R_2 = \frac{10 \text{ V} + 1 \text{ A } 2 \Omega}{2 \Omega + 2 \Omega} 2 \Omega = 6 \text{ V}.$$

### Resistencia Thévenin

Para calcular la resistencia de Thévenin,  $R_{Th}$ , calculamos la resistencia equivalente entre los extremos  $A$  y  $B$ , cuando entre ellos se establece un circuito abierto. Además, debemos anular la fuentes, por tanto, la fuente de tensión pasará a ser un cortocircuito y la fuente de corriente un circuito abierto.



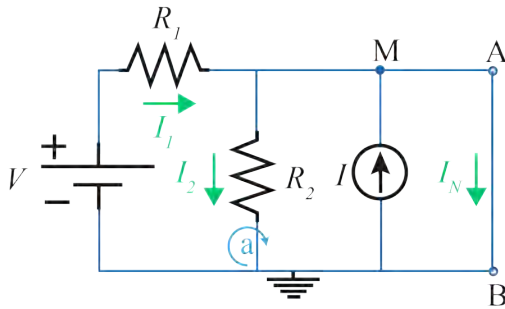
En esta situación vemos que  $R_1$  y  $R_2$  están bajo la misma caída de potencial y, por tanto, están en paralelo.

$$R_{Th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 1 \Omega.$$

b) Sabemos que el equivalente Norton del circuito se calcula mediante una fuente de corriente,  $I_N$ , conectada en paralelo con una resistencia,  $I_N$ .

### Fuente de corriente Norton

Para calcular la corriente de Norton,  $I_N$ , calculamos la corriente que circula entre los extremos  $A$  y  $B$ , cuando entre ellos se establece un cortocircuito.



Para ello tengamos en cuenta que al colocar un cortocircuito entre  $A$  y  $B$ , la corriente seguirá el camino de menos resistencia al salir de  $R_1$  y, por tanto, se hará nula la corriente que atraviesa a  $R_2$ .

Para hallar la corriente de Norton aplicamos reglas de Kirchhoff:

$$\begin{aligned} 2\text{RK a: } V &= I_1 R_1 \Rightarrow I_1 = \frac{V}{R_1}, \\ 1\text{RK M: } I_N &= I_1 + I = \frac{V}{R_1} + I = \frac{10\text{ V}}{2\ \Omega} + 1\text{ A} = 6\text{ A}. \end{aligned}$$

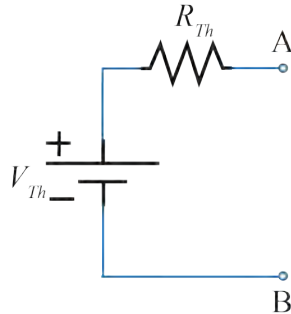
### Resistencia Norton

La resistencia de Norton se calcula de igual manera que la resistencia de Thévenin, hallada anteriormente:

$$R_N = 1\ \Omega.$$

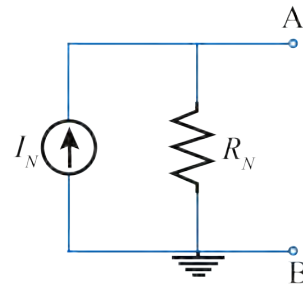


#### Equivalente Thévenin



$$V_{Th} = 6\text{ V}, \quad R_{Th} = 1\ \Omega.$$

#### Equivalente Norton



$$I_N = 6\text{ A}, \quad R_N = 1\ \Omega.$$

Revisar apuntes en Docencia Material Extra Apuntes Variados Tema5UCO.pdf para inspirar más problemas

Revisar libros Tipler, Serway y Tienda-Luna para inspirar más problemas





- 6.1 Capacidad
- 6.2 Energía almacenada en un condensador
- 6.3 Asociaciones de condensadores
- 6.4 Circuito RC
- 6.5 Cuestiones
- 6.6 Problemas

## 6. Condensadores

### 6.1 Capacidad

Un **condensador** es un dispositivo formado por dos conductores separados mediante un dieléctrico (un aislante). Este dispositivo se caracteriza por almacenar energía a partir del campo eléctrico que surge de la acumulación de carga que se produce en cada uno de los conductores cuando sobre ellos se aplica una diferencia de potencial. Por tanto, en un condensador el campo eléctrico entre conductores es proporcional a la acumulación de carga. De igual manera, la carga está directamente relacionada con la diferencia de potencial existente entre los conductores por lo que se puede demostrar la siguiente relación:

$$Q = CV, \quad (6.1)$$

donde  $C$  es una constante de proporcionalidad positiva conocida como **capacidad** que se define como la relación existente entre la carga eléctrica almacenada y la diferencia de potencial aplicado. Físicamente se interpreta como la habilidad que tiene un condensador para almacenar carga en función del voltaje aplicado y su magnitud depende de la forma, dimensiones y materiales del condensador. La unidad de capacidad en el *SI* es el culombio partido voltio,  $C/V$ , que recibe el nombre de faradio,  $F$ .

#### Condensador de placas paralelas

Uno de los condensadores más comunes es el de placas paralelas. Este condensador consiste en dos conductores planos y paralelos con área  $A$  separados por un material

dieléctrico una distancia  $d$ . Si las dimensiones de los conductores son mucho mayores que la separación entre ambos, la capacidad de este tipo de condensadores es

$$C = \kappa \frac{\varepsilon_0 A}{d}, \quad (6.2)$$

donde  $\kappa$  es la constante dieléctrica del material aislante entre conductores. Para el caso del aire esta constante vale  $\kappa = 1.00059 \approx 1$ .

### Condensador cilíndrico

La capacidad de un condensador que está formado por un pequeño conductor cilíndrico de radio  $a$  envuelto en una corteza cilíndrica de espesor despreciable y radio  $b > a$  es

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln \frac{b}{a}}. \quad (6.3)$$



Como vemos en las ecuaciones (6.2) y (6.3), la capacidad depende de las dimensiones y la forma del condensador. Es una propiedad intrínseca del tipo de condensador.

## 6.2 Energía almacenada en un condensador

La energía almacenada en un condensador con carga  $Q$  bajo una diferencia de potencial  $V$  es

$$U = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2. \quad (6.4)$$

## 6.3 Asociaciones de condensadores

### Condensadores en paralelo

Dos o más **condensadores** están en **paralelo** si entre sus extremos se establece la misma caída de potencial. En esta situación, podemos afirmar que en una asociación de  $n$  condensadores en paralelo, la capacidad equivalente es igual a la suma de las capacidades individuales.

$$C_{eq} = \sum_i^n C_i. \quad (6.5)$$

## Condensadores en serie

Dos o más **condensadores** están en **serie** si por ellos pasa la misma corriente. En esta situación, podemos afirmar que en una asociación de  $n$  condensadores en serie, el inverso de la capacidad equivalente es igual a la suma de los inversos de las capacidades individuales.

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_i^n \frac{1}{C_i}. \quad (6.6)$$

## 6.4 Circuito RC

### Carga de un condensador

$$i(t) = \frac{V}{R} - \frac{q(t)}{RC}.$$

$$i(t) = I_0 e^{-t/\tau}. \quad (6.7)$$

$$q(t) = Q_f (1 - e^{-t/\tau}). \quad (6.8)$$

Donde  $I_0 = V/R$  es la corriente inicial del circuito RC y  $Q_f = CV$  es la carga final del condensador.  $\tau$  es la constante de tiempo del circuito y cuantifica la rapidez con la que se carga el condensador.

$$\tau = RC. \quad (6.9)$$

⚠  $\tau$  indica el tiempo en el cual el condensador ha alcanzado un 63 % de su carga final.

### Descarga de un condensador

$$i(t) = \frac{q(t)}{RC}.$$

$$i(t) = I_0 e^{-t/\tau}. \quad (6.10)$$

$$q(t) = Q_f e^{-t/\tau}. \quad (6.11)$$

Donde  $I_0 = Q_0/RC$  es la corriente inicial del circuito  $RC$  y  $Q_0$  es la carga inicial del condensador.  $\tau$  es la constante de tiempo del circuito y cuantifica la rapidez con la que se descarga el condensador.



En este caso,  $\tau$  indica el tiempo tras el cual el condensador se ha descargado al 63 % de su carga inicial.

## 6.5 Cuestiones

### Capacidad

**Cuestión 6.1 — Capacidad de un condensador.** Se dispone de un condensador de capacidad  $C$  que almacena carga  $Q$  bajo una diferencia de potencial  $V$ . ¿Cambia la carga y la capacidad del condensador si se duplica la diferencia de potencial en el condensador?

Cambiar enunciado para que no sea igual que el actual. Triplicar carga o parecido.

*Solución:*

Inicialmente, se tiene, según la relación (6.1, que  $Q = CV$ . Si se duplica la diferencia de potencial,  $V' = 2V$ , se tendrá

$$Q' = CV' = 2CV = 2Q.$$

**Sol** Si se duplica la diferencia de potencial, se duplica la carga que se acumula en el condensador.

La capacidad es una propiedad que únicamente depende de las dimensiones y de los materiales del condensador. No influye en ella un cambio en la diferencia de potencial y, por tanto, permanecerá constante,  $C' = C$ .

**Cuestión 6.2 — Capacidad de un condensador de placas paralelas.** Obtenga la capacidad de un condensador de placas paralelas de área  $A$  que están separadas una distancia  $d$  y con aire entre ellas ( $\kappa_{\text{aire}} = 1$ ). *Nota: Suponga que las dimensiones de las placas son mucho mayores que la distancia existente entre ellas.*

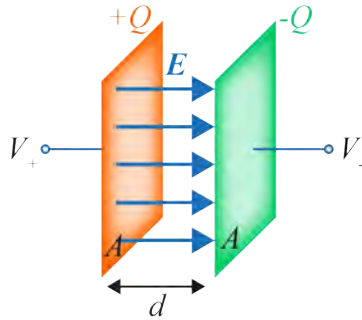
*Solución:*

Para obtener la capacidad de un condensador podemos hacer uso de la ecuación (6.1), donde vemos que, para calcular la capacidad, necesitamos previamente conocer la carga almacenada en el condensador y el potencial existente.

$$Q = CV \quad \Rightarrow \quad C = \frac{Q}{V}.$$

**Carga acumulada en el condensador:**

Si suponemos que las dimensiones de las placas son mucho mayores que la distancia existente entre ellas, podemos considerar cada placa del condensador como un plano infinito.



Además, sabemos que en un condensador cargado, una placa queda con carga positiva,  $+Q$ , mientras que la otra queda con carga negativa,  $-Q$ . De la cuestión 2.7 sabemos que la magnitud del campo eléctrico generado en el interior de dos placas cargadas con carga  $+Q$  y  $-Q$  es:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Teniendo en cuenta que estamos trabajando con planos cargados con densidad de carga superficial  $\sigma = \frac{Q}{A}$ , podemos obtener el valor de la carga acumulada en función del campo eléctrico:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{A\epsilon_0} \Rightarrow Q = EA\epsilon_0$$

### Potencial en el condensador:

De la cuestión 3.6 sabemos que la diferencia de potencial cuando una partícula se desplaza una distancia  $d$  en un campo eléctrico uniforme es:

$$V = Ed.$$

### Cálculo de la capacidad de un condensador de placas paralelas:

Conocida la carga acumulada y el potencial del condensador, podemos calcular la capacidad del condensador de placas paralelas:

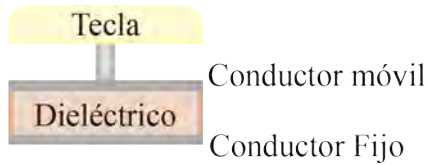
$$C = \frac{Q}{V} = \frac{EA\epsilon_0}{Ed} = \frac{A\epsilon_0}{d}.$$

**Sol** La capacidad de un condensador de placas paralelas que tiene en su interior aire como dieléctrico es

$$C = \frac{A\epsilon_0}{d}.$$

**Cuestión 6.3 — Teclado ordenador.** Los teclados antiguos de un ordenador funcionaban como condensadores de manera que una placa es móvil y la otra fija, con aire como dieléctrico entre ellas. Al presionar una tecla, el aislante de aire se comprime, reduciendo la distancia entre las placas. ¿Cómo afecta esto a la capacidad del condensador?

*Solución:*



Podemos considerar los botones de un teclado como pequeños condensadores de placas paralelas. Al presionar la tecla, un conductor móvil comprime el dieléctrico existente entre las placas del condensador por lo que se disminuye el espacio entre placas.

Como hemos visto en la cuestión 6.2, en un condensador de placas paralelas, la capacidad es inversamente proporcional a la distancia entre placas. Por tanto, en nuestra situación, al presionar los botones del teclado disminuimos la distancia entre conductores y la capacidad del condensador aumenta.

**Cuestión 6.4 — Capacidad de un condensador cilíndrico.** Obtenga la capacidad de un condensador cilíndrico formado por un alambre conductor de radio  $a$  y carga  $+Q$  y una corteza esférica concéntrica al alambre de radio  $b > a$  y carga  $-Q$ . *Nota: Considere la longitud del cilindro mucho mayor que  $a$  y  $b$ .*

*Solución:*

Para obtener la capacidad del condensador cilíndrico calculamos primero el campo eléctrico producido en el espacio entre conductores. Para ello tendremos en cuenta dos aspectos:



1. Si la longitud del condensador es mucho mayor que  $a$ , podemos suponer el alambre como un hilo infinito, cuyo campo eléctrico fue calculado en la cuestión 2.4.
2. Por ley de Gauss, es directo ver que el campo eléctrico entre conductores debido a la corteza cilíndrica es nulo.

Por tanto, el campo eléctrico en el espacio entre conductores es debido únicamente al alambre de radio  $a$ .

$$\mathbf{E} = 2k \frac{\lambda}{r} \hat{r} = 2k \frac{Q}{lr} \hat{r}.$$

Conocido el campo eléctrico, podemos determinar la diferencia de potencial establecida entre los conductores a partir de la ecuación 3.3, donde tendremos en cuenta que realizamos un desplazamiento paralelo al campo ( $d\mathbf{r} = dr\hat{r}$ ):

$$\Delta V = V_b - V_a = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_a^b 2k \frac{Q}{lr} dr = - \frac{2kQ}{l} \int_a^b \frac{dr}{r} = - \frac{2kQ}{l} \ln \left( \frac{b}{a} \right).$$

Y la caída de potencial en el condensador:

$$V = V_a - V_b = -\Delta V = \frac{2kQ}{l} \ln \left( \frac{b}{a} \right) \xrightarrow{ec.(6.1)} C = \frac{Q}{V} = \frac{l}{2k \ln \left( \frac{b}{a} \right)} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \left( \frac{b}{a} \right)}.$$

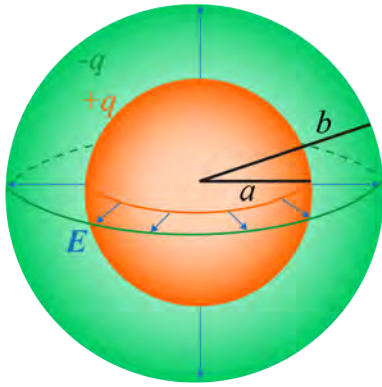
**Sol** La capacidad de un condensador cilíndrico formado por un alambre de radio  $a$  y una corteza cilíndrica concéntrica de radio  $b$  es

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \left( \frac{b}{a} \right)}.$$

**Cuestión 6.5 — Capacidad condensador esférico.** Determine la capacidad de un condensador esférico formado por un cascarón esférico de radio  $b$  y carga  $-q$  concéntrico a una esfera más pequeña de radio  $a$  y carga  $q$ .

*Solución:*

Para obtener la capacidad del condensador esférico calculamos primero el campo eléctrico producido en el espacio entre conductores. Para ello tendremos en cuenta dos aspectos:



1. El campo eléctrico debido a la esfera de radio  $a$  en el espacio entre conductores fue calculado en la cuestión 2.5.
2. Por ley de Gauss, es directo ver que el campo eléctrico entre conductores debido a la corteza esférica es nulo.

Por tanto, el campo eléctrico en el espacio entre conductores es debido únicamente a la esfera de radio  $a$ .

$$\mathbf{E} = k \frac{q}{r^2} \hat{r}.$$

Conocido el campo eléctrico, podemos determinar la diferencia de potencial establecida entre los conductores a partir de la ecuación 3.3, donde tendremos en cuenta que realizamos un desplazamiento paralelo al campo ( $d\mathbf{r} = dr\hat{r}$ ):

$$\Delta V = V_b - V_a = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_a^b k \frac{q}{r^2} dr = -kq \int_a^b \frac{dr}{r^2} = -kq \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

Y la caída de potencial en el condensador:

$$V = V_a - V_b = -\Delta V = kq \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = kq \frac{b-a}{ab}$$

$$\stackrel{ec.(6.1)}{\Rightarrow} C = \frac{Q}{V} = \frac{ab}{k(b-a)} = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}.$$

**Sol** La capacidad de un condensador cilíndrico formado por un alambre de radio  $a$  y una corteza cilíndrica concéntrica de radio  $b$  es

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}.$$

**Cuestión 6.6 — Asociación de condensadores idénticos.** Dispone de un grupo de condensadores idénticos que conectados en paralelo tienen una capacidad equivalente 81 veces mayor que cuando se conectan en serie. ¿De cuántos condensadores dispone?

*Solución:*

Para resolver la cuestión, supongamos que tenemos  $N$  condensadores idénticos conectados en paralelo. Su capacidad equivalente es:

$$C_{\parallel} = \sum_i^N C_i = NC.$$

Supongamos ahora que esos  $N$  condensadores se conectan en serie. Su capacidad equivalente es:

$$C_s = \left( \sum_i^N \frac{1}{C_i} \right)^{-1} = \left( N \frac{1}{C} \right)^{-1} = \frac{C}{N}.$$

Teniendo en cuenta que conectados en paralelo, tienen una capacidad equivalente 81 veces mayor que en serie, podemos determinar el número de condensadores que tenemos en la asociación:

$$C_{\parallel} = 81C_s \quad \Rightarrow \quad NC = 81 \frac{C}{N} \quad \Rightarrow \quad N^2 = 81 \quad \Rightarrow \quad N = 9.$$

**Sol** Disponemos de 9 condensadores idénticos.

## Energía almacenada en un condensador

**Cuestión 6.7 — Máxima energía.** En la práctica de laboratorio dispone de tres condensadores iguales y una batería, ¿cómo combinaría estos elementos para que se almacene la máxima energía posible?

Copiado de relación Clemente. Reescribir para editar libro

*Solución:*

Sabemos que la energía almacenada en un condensador se calcula a partir de la ecuación (6.4), donde vemos que, para una caída de potencial fija, la energía es directamente proporcional a la capacidad.

$$U = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2.$$

Por tanto, si queremos maximizar la energía, debemos buscar la combinación de condensadores que nos proporcione mayor valor de capacidad equivalente. Con tres condensadores iguales, las combinaciones que podemos encontrar son las siguientes:

a) Todos los condensadores en paralelo:

$$C_a = 3C.$$

b) Todos los condensadores en serie:

$$C_b = \left(3\frac{1}{C}\right)^{-1} = \frac{C}{3}.$$

c) Dos condensadores en paralelo, en serie con el tercer condensador:

$$C_c = \left(\frac{1}{2C} + \frac{1}{C}\right)^{-1} = \frac{2C^2}{3C} = \frac{2C}{3}.$$

d) Dos condensadores en serie, en paralelo con el tercer condensador:

$$C_d = \left(2\frac{1}{C}\right)^{-1} + C = \frac{C}{2} + C = \frac{3C}{2}.$$

**Sol** Se concluye que la combinación que da un valor mayor de capacidad es cuando los tres condensadores se combinan en paralelo,  $C_a = \frac{c}{3}$ . En este caso la energía almacenada será máxima:

$$U_a = \frac{1}{2}C_a V^2 = \frac{3}{2}CV^2.$$

**Cuestión 6.8 — Energía almacenada al cambiar  $V$ .** Si se triplica la diferencia de potencial de un condensador, ¿qué ocurre con la energía almacenada?

Copiado de relación Clemente. Reescribir para editar libro

*Solución:*

Supongamos que disponemos de un condensador de capacidad  $C$  bajo una diferencia de potencial  $V$ . Siguiendo la ecuación (6.4), la energía almacenada por el condensador en esta situación es:

$$U = \frac{1}{2}CV^2.$$

Si para el mismo condensador, triplicamos la diferencia de potencial a la que está sometido,  $V' = 3V$ , la energía almacenada pasará a ser:

$$U' = \frac{1}{2}CV'^2 = \frac{1}{2}C(3V)^2 = 9U.$$

**Sol** Si se triplica la diferencia de potencial de un condensador aumentamos la energía almacenada en un factor nueve.

**Cuestión 6.9 — Relación corriente-voltaje en un condensador.** a) Demuestre que la relación entre corriente y voltaje en un condensador es:

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}.$$

a) Demuestre que la relación entre voltaje y corriente en un condensador es:

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i dt.$$

*Solución:*

Supongamos que trabajamos con un condensador de capacidad  $C$ , bajo una diferencia de potencial  $v(t)$  y por el que circula una corriente  $i(t)$ . Tengamos además en cuenta que en un condensador la carga acumulada es proporcional a la caída de potencial que se aplica entre sus conductores, ecuación (6.1):

$$q(t) = Cv(t).$$

Para demostrar las relaciones corriente-voltaje y voltaje-corriente en un condensador, haremos uso de la definición de corriente dada en la ecuación (4.1) y de la relación carga-diferencia de potencial dada en la ecuación (6.1).

**a) Relación corriente-voltaje**

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \stackrel{ec.(6.1)}{=} \frac{d(Cv(t))}{dt} = C \frac{dv(t)}{dt}.$$

**b) Relación voltaje-corriente**

$$\begin{aligned} i(t) = \frac{dq(t)}{dt} &\Rightarrow dq(t) = i(t)dt \Rightarrow \int_{t_0}^t dq(t) = \int_{t_0}^t i(t)dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow q(t) - q(t_0) = \int_{t_0}^t i(t)dt \Rightarrow q(t) = q(t_0) + \int_{t_0}^t i(t)dt \stackrel{ec.(6.1)}{\Rightarrow} \\ &\stackrel{ec.(6.1)}{\Rightarrow} Cv(t) = Cv(t_0) + \int_{t_0}^t i(t)dt \Rightarrow v(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t)dt + v(t_0). \end{aligned}$$



Relación corriente-voltaje para  $C$ :

Relación voltaje-corriente para  $C$ :

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}.$$

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t)dt + v(t_0).$$

Reordenar cuestiones y problemas en este tema

**Cuestión 6.10 — Energía almacenada.** Demuestre que la energía almacenada en un condensador es  $U = \frac{1}{2}QV$ .



Supongamos el proceso de carga de un condensador de capacidad  $C$  que es capaz de almacenar una carga total  $Q$ . Para determinar la energía que almacena el condensador recurriremos a las ecuaciones (3.4) y (6.1):

$$dU = V dq \stackrel{ec.(6.1)}{=} \frac{q}{C} dq.$$

Integrando en ambos lados de la ecuación:

$$U = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C} \left[ \frac{q^2}{2} \right]_0^Q = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}.$$

Volviendo a utilizar la ecuación (6.1):

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow U = \frac{1}{2} QV. \quad \square$$

**Cuestión 6.11 — Energía almacenada de condensadores.** Determine la energía almacenada en función del campo eléctrico de:

- a) Un condensador de placas paralelas.
- b) Un condensador cilíndrico.
- c) Un condensador esférico.

*Solución:*

Podemos calcular la energía almacenada de cada condensador haciendo uso de la ecuación (6.4):

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}.$$

Por tanto, para calcular la energía almacenada necesitamos conocer previamente la carga  $Q$  y la capacidad  $C$ .

**a) Condensador de placas paralelas**

1. La capacidad de un condensador de placas paralelas fue determinada en la cuestión 6.2:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}.$$

2. La carga del condensador puede obtenerse a partir del campo eléctrico presente en el espacio entre conductores. Este campo eléctrico se puede obtener a partir de las cuestiones 2.5 y 6.2:

$$E = \frac{Q}{A\epsilon_0} \Rightarrow Q = EA\epsilon_0$$

Por tanto, la energía almacenada es:

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{(EA\epsilon_0)^2}{\epsilon_0 A/d} = \frac{1}{2} E^2 \epsilon_0 A d.$$

### b) Condensador cilíndrico

1. La capacidad de un condensador cilíndrico fue determinada en la cuestión 6.4:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}.$$

2. La carga del condensador puede obtenerse a partir del campo eléctrico presente en el espacio entre conductores. Este campo eléctrico se puede obtener a partir de las cuestiones 2.4 y 6.4:

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{lr} \Rightarrow Q = 2\pi\epsilon_0 E l r.$$

Por tanto, la energía almacenada es:

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{(2\pi\epsilon_0 E l r)^2}{\frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}} = \pi\epsilon_0 E^2 l r^2 \ln\left(\frac{a}{b}\right).$$

### c) Condensador esférico

1. La capacidad de un condensador cilíndrico fue determinada en la cuestión 6.5:

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}.$$

2. La carga del condensador puede obtenerse a partir del campo eléctrico presente en el espacio entre conductores. Este campo eléctrico se puede obtener a partir de las cuestiones 2.5 y 6.5:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \Rightarrow Q = 4\pi\epsilon_0 E r^2.$$

Por tanto, la energía almacenada es:

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{(4\pi\epsilon_0 E r^2)^2}{4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}} = \frac{1}{2} E^2 r^4 \frac{b-a}{ab}.$$

**Sol**

a) Condensador de placas paralelas:

$$U = \frac{1}{2} E^2 \epsilon_0 A d.$$

a) Condensador cilíndrico:

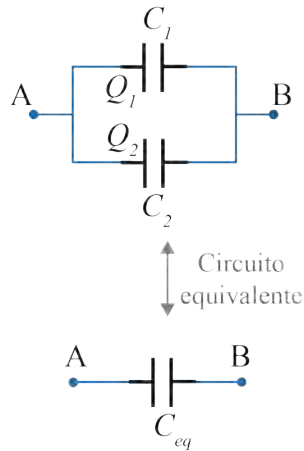
$$U = \pi \epsilon_0 E^2 l r^2 \ln \left( \frac{a}{b} \right).$$

a) Condensador esférico:

$$U = \frac{1}{2} E^2 r^4 \frac{b-a}{ab}.$$

## Asociaciones de condensadores

**Cuestión 6.12 — Condensadores en paralelo.** Demuestre que la asociación de dos condensadores en paralelo es igual a una capacidad equivalente cuyo valor equivale a la suma de las capacidades de ambos condensadores.

**Sol**

En una asociación en paralelo, los condensadores están bajo la misma caída de potencial y la carga en cada condensador es:

$$Q_{C_1} = C_1 V,$$

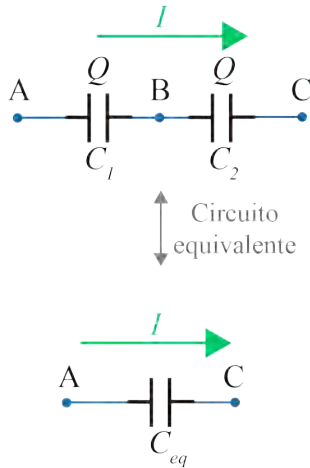
$$Q_{C_2} = C_2 V.$$

Teniendo esto en cuenta, la carga total en el sistema será la suma de las cargas de cada condensador por separado:

$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 V + C_2 V = (C_1 + C_2) V = C_{eq} V \Rightarrow C_{eq} = C_1 + C_2. \quad \square$$

**Cuestión 6.13 — Condensadores en serie.** Demuestre que el inverso de la capacidad equivalente de una asociación de dos condensadores en serie es igual a la suma de los inversos de las dos capacidades individuales.

**Sol**



En una asociación en serie, los condensadores están bajo la misma corriente eléctrica y, por tanto, la carga en cada condensador es igual. En este caso, la caída de potencial de los dos condensadores por separado es:

$$V_{C_1} = V_A - V_B = \frac{Q}{C_1},$$

$$V_{C_2} = V_B - V_C = \frac{Q}{C_2}.$$

La caída de potencial total de la asociación es:

$$V = V_A - V_C = V_A - V_B + V_B - V_C = V_{C_1} + V_{C_2} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = \frac{Q}{C_{eq}}$$

Por tanto, se concluye que:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \quad \square.$$

## 6.6 Problemas

### Capacidad

**Problema 6.1 — Condensador de placas paralelas.** a) Calcule la capacidad de un condensador de placas paralelas rectangular de lados  $a = 10$  cm y  $b = 15$  cm separadas una distancia de 5 mm.

b) Calcule la carga que se acumula en este condensador cuando está conectado a una diferencia de potencial de 15 V.

*Nota: Utilice aire como dieléctrico del condensador ( $\kappa_{\text{aire}} = 1$ ).*

*Solución:*

a) Dado que  $a$  y  $b$  son mucho mayores que  $d$ , podemos usar la aproximación de plano infinito. Por tanto, para calcular la capacidad del condensador de placas paralelas usamos la ecuación (6.2):

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} = \frac{\epsilon_0 ab}{d} = \frac{8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2 \cdot 10 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot 15 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{5 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 2.66 \cdot 10^{-11} \text{ F} = 26.6 \text{ pF}.$$

b) La carga que se acumula en el condensador se puede obtener a partir de la ecuación (6.1):

$$Q = CV = 26.6 \cdot 10^{-11} \text{ F} \cdot 15 \text{ V} = 7.97 \cdot 10^{-8} \text{ C} = 797 \mu\text{C}.$$



La capacidad de un condensador de placas paralelas de dimensiones  $10 \times 15 \text{ cm}^2$  separadas 5 mm por aire es  $C = 26.6 \text{ pF}$ .

Si este condensador se conecta a una diferencia de potencial de 15 V, se acumularán en él  $797 \mu\text{C}$  de carga.

Revisar problema y resultados

**Problema 6.2 — Contador Geiger.** En la detección de radiación ionizante se utiliza un dispositivo conocido como Contador Geiger. Este consiste en un tubo metálico de diámetro 2 cm y un alambre delgado de 1 mm de radio coaxial con el tubo. El espacio entre alambre y tubo está relleno de un material de rigidez dieléctrica de  $2 \cdot 10^6 \text{ V/m}$ . Determine la caída de potencial máxima que se puede aplicar entre el

alambre y el tubo antes de que el material dieléctrico se ionice y se convierta en conductor?

*Solución:*

Para determinar la caída de potencial máxima en el condensador cilíndrico de radio externo  $b = 1 \text{ cm}$  e interno  $a = 1 \text{ mm}$  podemos hacer uso de la ecuación (6.1).

$$Q = CV \Rightarrow V = \frac{Q}{C}.$$

Por tanto, necesitamos obtener el valor de  $Q$  en función del campo eléctrico  $E$  y el valor de la capacidad del condensador cilíndrico:

1. La capacidad del condensador cilíndrico puede obtenerse a partir de la ecuación (6.3):

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}.$$

2. El campo eléctrico en el espacio entre conductores del condensador cilíndrico puede obtenerse a partir de las cuestiones 2.4 y 6.4:

$$E = 2k \frac{Q}{rl} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 rl} \Rightarrow Q = E2\pi\epsilon_0 rl.$$

Teniendo en cuenta estos puntos, podemos determinar el valor de la caída de potencial en el condensador cilíndrico en función del valor del campo eléctrico:

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{E2\pi\epsilon_0 rl}{\frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}} = Er \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Y, teniendo en cuenta que buscamos la caída de potencial máxima, haremos uso de que el campo eléctrico máximo para que no produzca la ruptura del dieléctrico es  $2 \cdot 10^6 \text{ V/m}$  y de que el máximo valor del potencial ocurre cuando  $r$  es máximo, es decir,  $r_{max} = b$ . Por tanto, la caída de potencial máxima es:

$$V_{max} = E_{max} r_{max} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = 2 \cdot 10^6 \text{ V/m} \cdot 1 \cdot 10^{-2} \text{ m} \ln\left(\frac{1 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{1 \cdot 10^{-3} \text{ m}}\right) = 4.6 \cdot 10^4 \text{ V} = 46 \text{ kV}.$$

**Sol** La caída de potencial máxima antes de que se alcance la ruptura dieléctrica es 46 kV.

**Problema 6.3 — Condensador de placas paralelas.** Se tiene un condensador de placas paralelas de capacidad  $C = 4 \mu\text{F}$  y separación entre placas  $d = 1.0 \text{ mm}$ , cargado a  $10 \text{ V}$ . Si este condensador es desconectado de la batería, ¿cuál será su carga almacenada si aumentamos la distancia entre placas a  $d = 2 \text{ mm}$ ? ¿Cómo será la diferencia en la energía almacenada en el condensador en ambas situaciones?

*Solución:*

a) El condensador plano se carga a  $10 \text{ V}$ , por lo que siguiendo la ecuación (6.1) queda con una carga de:

$$Q = CV = 4 \mu\text{F} \cdot 10 \text{ V} = 40 \mu\text{C}.$$

Tras desconectar el condensador de la batería, este queda con una carga constante de  $40 \mu\text{C}$ . Por tanto, aunque la distancia entre placas aumente, la carga no varía.

b) La energía almacenada en el condensador se puede calcular a partir de la ecuación (6.4):

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{(40 \mu\text{C})^2}{4 \mu\text{F}} = 200 \mu\text{J}.$$

Además, de la ecuación (6.2) sabemos que la capacidad de un condensador de placas paralelas es:

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}.$$

Por lo que, aumentar al doble la distancia entre placas del condensador ( $d' = 2d$ ) repercute en una capacidad que es la mitad de la original:

$$C' = \frac{\varepsilon_0 A}{d'} = \frac{\varepsilon_0 A}{2d} = \frac{C}{2}.$$

Al duplicar la distancia entre conductores, la energía almacenada se duplica:

$$U' = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C'} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C/2} = 2U = 400 \mu\text{J}.$$

**Sol** Una vez desconectado el condensador, la carga no varía y permanecerá a  $40 \mu\text{C}$  aunque se aumente la distancia entre conductores. Al duplicar la distancia entre conductores, la energía almacenada en el condensador se duplica también,  $U' = 400 \mu\text{J}$ .

**Problema 6.4 — Condensador esférico.** Se tiene un condensador esférico con esferas conductoras interna de radio  $a = 1$  cm y externa de radio  $b = 2$  cm. Si se desea triplicar la energía almacenada, manteniendo el mismo voltaje sobre el condensador y sin variar el radio de la esfera interna, ¿qué cambios debe realizarse en la esfera externa?

*Solución:*

La capacidad de un condensador esférico se obtuvo en la cuestión 6.5:

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}.$$

La energía almacenada en dicho condensador se puede calcular a partir de la ecuación (6.4):

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}V^2.$$

Si triplicamos la distancia entre conductores del condensador (pasamos de  $d = 1.0$  mm a  $d' = 2d = 2$  mm, la carga del condensador será:

$$U' = \frac{1}{2}C'V^2 = \frac{1}{2}4\pi\epsilon_0 \frac{ab'}{b'-a}V^2 = 3U = 3\frac{1}{2}4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}V^2.$$

Reordenado la ecuación anterior nos queda:

$$\frac{b'}{b'-a} = 3\frac{b}{b-a} \Rightarrow bb' - ab' = 3bb' - 3ab \Rightarrow b'(2b+a) = 3ab \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b' = \frac{3ab}{2b+a} = \frac{3 \cdot 1 \cdot 2}{2 \cdot 2 + 1} \text{ cm} = \frac{6}{5} \text{ cm} = 1.2 \text{ cm}.$$

**Sol** Debemos reducir el radio de la esfera externa a  $b = 1.2$  cm para triplicar la energía almacenada sin cambiar el voltaje ni el radio de la esfera conductora interna.

## Circuito RC

**Problema 6.5 — Circuito RC.** Calcule la corriente inicial, la carga final y el tiempo necesario para obtener el 50 % de la carga final en un circuito formado por la asociación en serie de una fuente de 10 V, un condensador de  $2 \mu\text{F}$  y una resistencia de  $5 \text{ k}\Omega$ .

*Solución:*

En un circuito  $RC$  la corriente inicial y la carga final puede obtenerse a partir de las ecuaciones vistas en la sección 6.4.

$$I_0 = \frac{V}{R} = \frac{10 \text{ V}}{5 \text{ k}\Omega} = 2 \text{ mA}.$$

$$Q_f = CV = 10 \text{ V } 2 \mu\text{F} = 20 \mu\text{C}.$$

El tiempo necesario para obtener el 50 % ( $q(t) = 0.5Q_f$ ) de la carga final se puede calcular a partir de la ecuación (6.8):

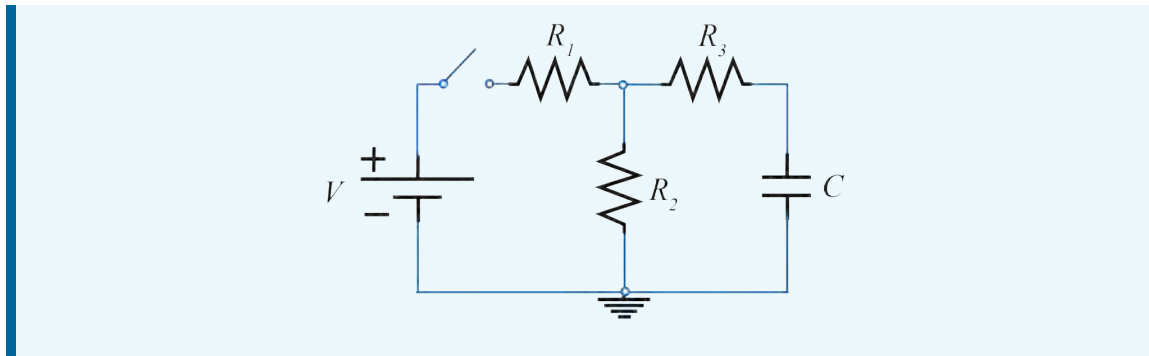
$$q(t) = Q_f (1 - e^{-t/\tau}) = 0.5Q_f \quad \Rightarrow \quad e^{-t/\tau} = 1 - 0.5 = 0.5 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad t = -\tau \ln 0.5 = 6.9 \cdot 10^{-3} \text{ s} = 6.9 \text{ ms}.$$

**Sol** La corriente inicial es 2 mA, la carga final es  $20 \mu\text{C}$  y el tiempo necesario para obtener el 50 % de la carga final es 6.9 ms.

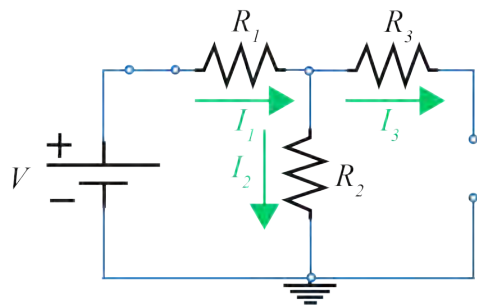
**Problema 6.6 — Circuito RC con interruptor.** El condensador del circuito de la figura, empieza a cargarse en  $t = 0$  cuando el interruptor se cierra. Para un tiempo mayor que el de la constante de tiempo del circuito determine las corrientes que circulan por cada una de las resistencias del circuito y las potencia disipada en ellas.

*Datos:*  $V = 60 \text{ V}$ ,  $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 20 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 30 \text{ k}\Omega$  y  $C = 1 \mu\text{F}$ .



*Solución:*

Añadir en algún sitio las curvas de corriente y carga de un circuito RC en carga y descarga. Hacer referencia a ellas en este ejercicio para dejar claro que cuando se alcanza el equilibrio la corriente es nula.



Para un tiempo mucho mayor que el de la constante de tiempo del circuito el condensador se habrá cargado por completo de tal forma que la corriente que circula por él es nula ( $I_3 = 0$ ). Por tanto, en esta situación podemos considerar al condensador como un circuito abierto, lo cual nos deja una única malla en el circuito con una única corriente ( $I_1 = I_2$ ).

Podemos obtener el valor de la corriente  $I_1$  aplicando ley de Ohm sobre la combinación de resistencias en serie  $R_1$  Y  $R_2$ :

$$I_1 = I_2 = \frac{V}{R_1 + R_2} = \frac{60}{10 + 20} \text{ mA} = 2 \text{ mA}.$$

Conocidas las corrientes del circuito, el cálculo de la potencia en cada resistencia es directo mediante la ecuación (4.7):

$$P_{R_1} = I_1^2 R_1 = 2^2 \cdot 10 \text{ mW} = 40 \text{ mW},$$

$$P_{R_2} = I_2^2 R_2 = 2^2 \cdot 20 \text{ mW} = 80 \text{ mW},$$

$$P_{R_3} = I_3^2 R_3 = 0.$$

**Sol** Las corrientes en las resistencias  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  son  $I_1 = 2 \text{ mA}$ ,  $I_2 = 2 \text{ mA}$  e  $I_3 = 0$ , respectivamente. Las potencias disipadas en cada resistor son  $P_{R_1} = 40 \text{ mW}$ ,  $P_{R_2} = 80 \text{ mW}$  y  $P_{R_3} = 0$ .

**Problema 6.7 — Condensadores conectados.** Considere un condensador de capacidad  $C_1$  que se carga inicialmente mediante una fuente de tensión de valor  $V_0 = 10 \text{ V}$ . Una vez que el condensador ha alcanzado su carga máxima, se desconecta de la fuente. Posteriormente, el condensador  $C_1 = 2 \mu\text{F}$  se conecta a un segundo condensador de capacidad  $C_2 = 3 \mu\text{F}$ , de manera que sus terminales se ponen en contacto respectivamente dos a dos. a) ¿Qué es lo que ocurre? b) ¿Cuál es la caída de potencial y carga en cada condensador cuando se alcanza el equilibrio?

*Solución:*

Tras conectar el condensador  $C_1$  a la fuente  $V_0$  y cargarlo por completo, quedará con una carga total,

$$Q = C_1 V_0 = 2 \mu\text{F} \cdot 10 \text{ V} = 20 \mu\text{C}.$$

Una vez se conecten los dos condensadores,  $C_1$  totalmente cargado y  $C_2$  descargado, comenzará un flujo de carga de  $C_1$  a  $C_2$  que terminará cuando la caída de potencial en ambos condensadores sea la misma.

$$V_1 = V_2 \xrightarrow{ec.(6.1)} \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} \Rightarrow Q_1 = Q_2 \frac{C_1}{C_2}.$$

Además, la carga total en el sistema será en todo momento  $Q = C_1 V_0$ . La suma de las cargas de cada condensador cuando se alcance el equilibrio debe ser igual a esta carga total por el principio de conservación de la carga.

$$Q = Q_1 + Q_2 \Rightarrow Q_2 = Q - Q_1.$$

Con estas dos consideraciones se puede calcular el valor de  $Q_1$  y de  $Q_2$ :

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_2 \frac{C_1}{C_2} = (Q - Q_1) \frac{C_1}{C_2} \Rightarrow Q_1 \left( 1 + \frac{C_1}{C_2} \right) = Q \frac{C_1}{C_2} \Rightarrow \\ \Rightarrow Q_1 &= \frac{Q \frac{C_1}{C_2}}{1 + \frac{C_1}{C_2}} = \frac{Q C_1}{C_1 + C_2} = \frac{Q C_1}{C_1 + C_2} = \frac{20 \mu\text{C} \cdot 2 \mu\text{F}}{2 \mu\text{F} + 3 \mu\text{F}} = 8 \mu\text{C}. \end{aligned}$$

$$Q_2 = Q - Q_1 = Q \left( 1 - \frac{C_1}{C_1 + C_2} \right) = Q \frac{C_2}{C_1 + C_2} = 20 \mu\text{C} \frac{3 \mu\text{F}}{2 \mu\text{F} + 3 \mu\text{F}} = 12 \mu\text{C}.$$

La caída de potencial en cada condensador es igual si están en equilibrio:

$$V_1 = V_2 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q}{C_1 + C_2} = \frac{20 \mu\text{C}}{2 \mu\text{F} + 3 \mu\text{F}} = 4 \text{ V}.$$

**Sol** Al conectar los dos condensadores, comienza un flujo de carga del condensador cargado al descargado que terminará cuando la caída de potencial en ambos condensadores se iguales.

La caída de potencial en ambos condensadores es la misma, 4 V. La carga del primer condensador es 8  $\mu\text{C}$  y la del segundo es 12  $\mu\text{C}$ .

**Problema 6.8 — Cambio de dieléctrico.** Considere un condensador de placas paralelas de capacidad  $C = 1 \mu\text{F}$  que se carga inicialmente mediante una fuente de tensión de valor  $V = 20 \text{ V}$ . Una vez que el condensador ha alcanzado su carga máxima, se desconecta de la fuente y es sumergido en alcohol etílico ( $\kappa = 20$ ). a) ¿Cambia su capacidad? b) ¿Y su energía almacenada? c) ¿Y su potencial?

*Solución:*

Inicialmente el condensador de placas paralelas de capacidad en aire  $C_{\text{air}} = 1 \mu\text{F}$  se carga conectado a una fuente de valor  $V = 20 \text{ V}$ . La carga que adquiere en el proceso de carga es:

$$Q = CV = 1 \mu\text{F} \cdot 20 \text{ V} = 20 \mu\text{C}.$$

Tenemos una situación en la que un condensador de placas paralelas cargado se sumerge en un medio de constante dieléctrica  $\kappa = 20$ . En dicho medio, la carga del condensador permanecerá invariante. Veamos que ocurre con su capacidad, energía almacenada y potencial.

Para calcular la capacidad utilizamos la ecuación (6.2), donde distinguiremos capacidad en aire,  $\kappa = 1$  (situación inicial) y en alcohol etílico,  $\kappa = 20$  (situación final).

$$C_{\text{air}} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}.$$

$$C_{\text{alc}} = \kappa \frac{\varepsilon_0 A}{d} = \kappa C_{\text{air}} = 20 \cdot 1 \mu\text{F} = 20 \mu\text{F}.$$

La energía almacenada podemos calcularla a partir de la ecuación (6.4) teniendo en cuenta que la carga se mantiene constante en el proceso de cambio del condensador de aire a alcohol etílico.

$$U_{air} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{(20 \mu\text{C})^2}{1 \mu\text{C}} = 200 \mu\text{J}.$$

$$U_{alc} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_{alc}} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\kappa C_{air}} = \frac{U_{air}}{\kappa} = \frac{200 \mu\text{J}}{20} = 10 \mu\text{J}.$$

El potencial en alcohol etílico podemos calcularlo utilizando la ecuación (6.1):

$$V_{alc} = \frac{Q}{C_{alc}} = \frac{20 \mu\text{C}}{20 \mu\text{C}} = 1 \text{ V}$$

 Al introducir el condensador en alcohol etílico la capacidad aumenta a  $20 \mu\text{F}$  y la energía almacenada y el potencial disminuyen a  $10 \mu\text{J}$  y  $1 \text{ V}$ .



## 7. Campo Magnético

### 7.1 Introducción

En el tema 1 vimos que cargas en reposo producen un campo eléctrico. En este tema veremos que, cuando las cargas se encuentran en movimiento (caso de una corriente eléctrica), se crea en el espacio un campo magnético,  $\mathbf{B}$ , y que si una carga se mueve en el seno de un campo magnético, dicha carga experimentará una fuerza magnética.

### 7.2 Ley de Lorentz

La **ley de Lorentz** establece que cualquier carga en movimiento en el seno de un campo magnético experimenta una fuerza magnética igual al producto escalar de la velocidad con que se mueve la carga,  $\mathbf{v}$ , y el campo magnético bajo el que se encuentra,  $\mathbf{B}$ , multiplicados ambos por el valor de la carga,  $q$ .

$$\mathbf{F}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (7.1)$$

Algunos comentarios sobre la fuerza magnética:

- I) La fuerza magnética es proporcional a la carga.
- II) La fuerza es perpendicular al plano formado por los vectores velocidad y campo magnético.
- III) La fuerza magnética actúa solo si la carga está en movimiento, es decir si la velocidad no es nula.
- IV) La fuerza magnética es perpendicular a la velocidad con la que se mueve

La unidad de campo magnético en el *SI* es el tesla, T.

⚠ Un Tesla es una cantidad bastante grande de campo magnético. El campo magnético terrestre en el ecuador, por ejemplo, es del orden de  $30 \mu\text{T}$ . Es común, por tanto, usar otro tipo de unidades cuando se trabaja con el campo magnético como por ejemplo el gauss (G).

$$1\text{G} = 10 \cdot 10^{-4} \text{ T}.$$

## Ley de Lorentz en un conductor

Supongamos un conductor rectilíneo de longitud  $L$ , bajo el que existe un campo magnético  $B$  y por el que circula una corriente  $I$ . Se demuestra que la fuerza magnética que sufre este conductor es

$$F_B = I \int d\mathbf{L} \times \mathbf{B}. \quad (7.2)$$

En la ecuación anterior,  $d\mathbf{L}$  es un vector infinitesimal de módulo igual a la longitud infinitesimal del conductor y de dirección igual a la de la corriente.

Para el caso en el que el conductor sea rectilíneo, la fuerza magnética será:

$$F_B = I\mathbf{L} \times \mathbf{B}. \quad (7.3)$$

## 7.3 Líneas de campo magnético

Al igual que con el campo eléctrico, una forma de visualizar gráficamente el campo magnético es mediante las líneas de campo, las cuales tienen las siguientes propiedades:

1. Son líneas tangentes en cada punto al vector campo magnético.
2. Son líneas que muestran la dirección de la fuerza ejercida sobre una carga testigo positiva.
3. En un imán, las líneas de campo divergen desde el polo norte y convergen hacia el polo sur, de tal forma que las líneas de campo magnético son cerradas.
4. La densidad de líneas en un punto del espacio es proporcional a la intensidad del campo en dicho punto.
5. Dos líneas de campo no se cortan.

## 7.4 Campo magnético

### Campo magnético creado por una carga puntual

Toda carga puntual,  $q$ , que se mueve con una velocidad,  $\mathbf{v}$ , genera en el espacio que la rodea un campo magnético,  $\mathbf{B}$ , que viene dado por la expresión:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad (7.4)$$

donde  $\mathbf{r}$  es vector de posición entre la carga y el punto donde se calcula el campo y  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}$  es la permeabilidad magnética del vacío.

⚠ En la ecuación (7.4) se puede notar que el campo magnético es cero en la dirección en la que se mueve la carga y que es perpendicular los vectores velocidad y posición.

## Ley de Biot-Savart

La **ley de Biot-Savart** describe el campo eléctrico que genera una corriente eléctrica,  $I$ , en cualquier punto del espacio:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{d\mathbf{l} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad (7.5)$$

donde  $d\mathbf{l}$  es el elemento diferencial de longitud que porta la corriente  $I$  y  $\mathbf{r}$  es el vector de posición desde el elemento que porta corriente hasta la posición en la que se calcula el campo.

## 7.5 Circulación de campo magnético

La **circulación de campo magnético** es una magnitud que matemática que se define como la integral de línea del vector del campo magnético,  $\mathbf{B}$ , alrededor de una trayectoria cerrada,  $C$ :

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}, \quad (7.6)$$

donde  $d\mathbf{l}$  es el elemento diferencial de longitud que divide la trayectoria cerrada  $C$  y su sentido es en el que se recorre  $C$ .

La circulación del campo magnético cuantifica como se enrolla el campo magnético alrededor de una trayectoria cerrada.

## 7.6 Ley de Ampère

Según la **ley de Ampère**, la circulación del campo magnético alrededor de una trayectoria amperiana cerrada<sup>1</sup> debe ser igual a la **corriente eléctrica neta** que

<sup>1</sup>En la ley de Ampère, la trayectoria amperiana cerrada  $C$  puede ser un camino imaginario, no tiene que corresponder con una geometría del problema.

atraviesa el área encerrada en dicha trayectoria multiplicada por la permeabilidad del vacío.

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_o I. \quad (7.7)$$

En la ley de Ampère,  $I$  es la corriente neta que atraviesa el área encerrada en la trayectoria  $C$ .

⚠ Al igual que con la ley de Gauss con el campo eléctrico, la ley de Ampère permite simplificar el cálculo del campo magnético de distribuciones de corrientes eléctricas con altos grados de simetría.

## 7.7 Ley de Gauss del Magnetismo

Al igual que el flujo eléctrico, el flujo magnético,  $\Phi_B$ , es una magnitud matemática que relaciona el número de líneas de campo magnético,  $\mathbf{B}$ , presente en una región del espacio que atraviesan una superficie cualquiera,  $S$ .

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \quad (7.8)$$

donde  $d\mathbf{S}$  es el vector diferencial de la superficie  $S$  que tiene como módulo el área del elemento diferencial, y como dirección y sentido la normal a dicha superficie. La unidad de flujo eléctrico es igual a unidad de campo magnético por unidad de superficie,  $\text{Tm}^2$  que en el  $SI$  recibe el nombre de Webber.

Según la **ley de Gauss** del magnetismo, el flujo del campo magnético a través de cualquier superficie gaussiana<sup>2</sup> (cerrada) es nulo.

$$\Phi_B = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (7.9)$$

⚠ El flujo magnético a través de una superficie cerrada es siempre cero, según la ley de Gauss del magnetismo. Este resultado, consecuencia directa de que las líneas de campo magnético sean cerradas, implica la que no existan monopolos magnéticos, una distinción clave respecto a las cargas eléctricas en el campo eléctrico.

---

<sup>2</sup>En la ley de Gauss, una superficie gaussiana es una superficie cerrada imaginaria que no tiene porque ser una geometría del problema.

## 7.8 Electromagnetismo en la materia

Al aplicar campos magnéticos sobre los materiales podemos cambiar sus propiedades de manera que estos se clasifican de la siguiente forma:

### Materiales ferromagnéticos

Materiales cuyos momentos magnéticos se alinean paralelamente bajo la acción de un campo magnético externo. Es por ello que presentan una fuerte atracción hacia los imanes y que son capaces de magnetizarse de manera permanente. Ejemplos de materiales ferromagnéticos son el hierro, níquel o cobalto.

### Materiales paramagnéticos

Materiales cuyos momentos magnéticos se alinean paralelamente bajo la acción de un campo magnético externo pero al cesar su efecto vuelven al estado original. Presentan una débil atracción hacia los imanes y son capaces de magnetizarse mientras existe la acción de un campo externo. Ejemplos de materiales paramagnéticos son el aluminio o platino.

### Materiales diamagnéticos

Materiales que, bajo la acción de un campo magnético externo, se orientan en su dirección opuesta. Presentan una repulsión hacia los imanes. Ejemplos de materiales ferromagnéticos son el cobre, oro o azufre.

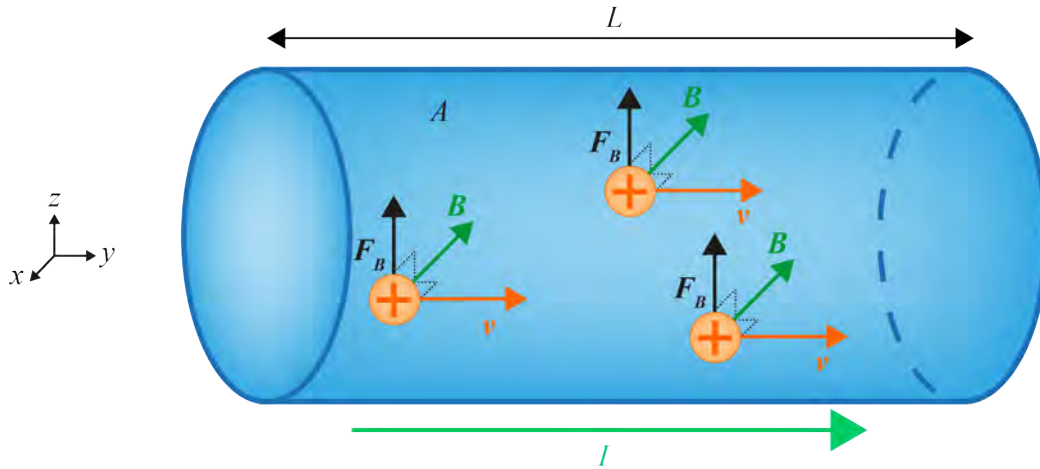
## 7.9 Cuestiones

### Fuerza magnética

**Cuestión 7.1 — Fuerza en un conductor rectilíneo.** Demuestre matemáticamente que la fuerza magnética en un conductor rectilíneo es  $\mathbf{F}_B = I\mathbf{L} \times \mathbf{B}$ .

*Solución:*

Supongamos un conductor rectilíneo de longitud  $L$ , sección transversal circular  $A$ , situado en una región del espacio con un campo magnético en la dirección  $x$  y por el que circula una corriente  $I$  en la dirección  $y$  como se muestra en la siguiente figura.



Como sabemos de la sección 7.2, cualquier carga en movimiento bajo un campo magnético sufre la acción de una fuerza magnética. Por tanto, cada portador de carga del conductor sufrirá una fuerza dada por la ley de Lorentz (ecuación (7.1)):

$$\mathbf{F}_{B,i} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Y la fuerza resultante sobre el conductor será la suma de todas las fuerzas individuales que se ejercen sobre cada carga del conductor:

$$\mathbf{F}_B = Nq\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Llegados a este punto observamos que la carga total que se desplaza por el conductor rectilíneo es:

$$\Delta Q = Nq = nALq,$$

donde se ha usado que  $N = nAL$ , siendo  $n$  la densidad de carga por unidad de volumen,  $A$  es la sección transversal del conductor y  $L$  su longitud. Por tanto,  $AL$  es el volumen del conductor.

Por tanto, la fuerza magnética total quedaría:

$$\mathbf{F}_B = Nq\mathbf{v} \times \mathbf{B} = nALq\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Y, si tenemos en cuenta que la corriente eléctrica equivale a la carga total que atraviesa una sección en un determinado instante de tiempo, ecuación (4.2), se tiene que:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = nAvq$$

Y, por tanto, reordenando y agrupando magnitudes, la fuerza magnética del conductor rectilíneo es:

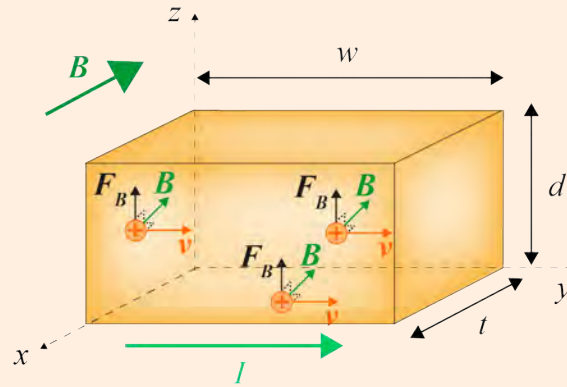
$$\mathbf{F}_B = nAvq\mathbf{L} \times \mathbf{B} = I\mathbf{L} \times \mathbf{B},$$

donde el carácter vectorial de  $\mathbf{v}$  es adoptado por  $\mathbf{L}$ , siendo este el vector de módulo la longitud del conductor rectilíneo y dirección igual a la de la corriente.

**Sol** La fuerza magnética de un conductor rectilíneo es:

$$\mathbf{F}_B = I\mathbf{L} \times \mathbf{B}.$$

**Cuestión 7.2 — Efecto Hall<sup>a</sup>.** Considere una placa conductora de altura  $d$ , ancho  $w$  y espesor  $t$  (en las direcciones  $z$ ,  $y$ ,  $x$ , respectivamente), a través de la cual circula una corriente eléctrica  $I$  en sentido positivo del eje  $y$  como se muestra en la figura. Esta placa se encuentra en una región donde existe un campo magnético uniforme de magnitud  $\mathbf{B}$  dirigido en sentido negativo del eje  $x$ . Si las cargas móviles dentro del conductor se mueven con velocidad  $v$ , demuestre que se establece una caída de potencial Hall  $V_H = vBd$  entre los extremos del conductor perpendiculares a la dirección de la corriente.



<sup>a</sup>El efecto Hall describe la diferencia de potencial que surge en un conductor cuando transporta una corriente y se encuentra bajo un campo magnético.



Supongamos el conductor que se presenta en el enunciado. Al encontrarse bajo los efectos de un campo magnético, los portadores de carga positiva<sup>3</sup> sufrirán una fuerza magnética en el sentido positivo del eje  $z$  que provoca que desvíen su trayectoria hacia el extremo superior del conductor y, originando acumulación de carga positiva en el extremo superior y de carga negativa en el inferior. La fuerza magnética que sienten los portadores de carga se obtiene a partir de la ley de Lorentz (ecuación (7.1)):

$$F_B = qvB.$$

La separación de carga produce un campo eléctrico, con la consiguiente aparición de una fuerza eléctrica que se obtiene a partir de la ecuación (1.6):

$$F_B = qE.$$

Además, la acumulación de carga provoca la aparición de una caída de potencial entre los extremos del conductor que se puede calcular a partir de la ecuación obtenida en la cuestión 3.4:

$$V = Ed.$$

<sup>3</sup>El efecto real es el de carga negativa moviéndose hacia el extremo inferior del conductor. En el problema se habla de carga positiva para adoptar el mismo criterio que el de la corriente eléctrica. No obstante, el resultado final es el mismo. Acumulación de carga positiva en el extremo superior y de carga negativa en el inferior.

La acumulación de carga cesa cuando se igualan las fuerzas eléctrica y magnética que se ejercen sobre los portadores de carga. La caída de potencial que aparece en ese instante es lo que se conoce como caída de potencial Hall:

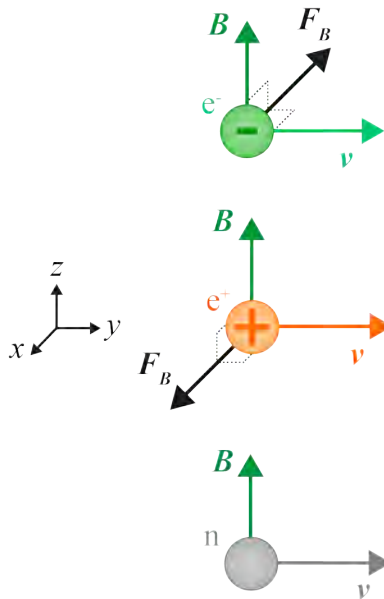
$$F_B = F_E \Rightarrow qvB = qE \stackrel{V=Ed}{=} q \frac{V_H}{d} \Rightarrow V_H = vBd. \quad \square$$

**Cuestión 7.3 — Movimiento de partículas cargadas.** Si un electrón, un neutrón y un positrón<sup>a</sup> se mueven con la misma velocidad dentro de una región donde hay un campo magnético perpendicular a sus trayectorias, y suponiendo que no interactúan entre sí, ¿cómo se comportarán sus movimientos? Haga un dibujo esquemático.

<sup>a</sup>El positrón es antipartícula del electrón. Ambos poseen la misma de masa, pero carga eléctrica opuesta.

*Solución:*

Supongamos un campo magnético en la dirección positiva del eje  $z$  y las partículas moviéndose en la dirección positiva del eje  $y$ . Las partículas cargadas al moverse bajo un campo eléctrico sienten la acción de una fuerza magnética como se indica en la ley de Lorentz (ecuación (7.1)). Tengamos además en cuenta que la carga del electrón es  $e = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \equiv -q$ , la del positrón es  $-e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \equiv q$  y que el neutrón no tiene carga.



- Para el electrón:

$$\mathbf{F}_{B,e^-} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -qvB\hat{j} \times \hat{k} = -qvB\hat{i}.$$

- Para el positrón:

$$\mathbf{F}_{B,e^+} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B} = qvB\hat{j} \times \hat{k} = qvB\hat{i}.$$

- Para el neutrón:

$$\mathbf{F}_{B,n} = 0.$$

**Sol** Suponiendo un campo magnético en la dirección positiva del eje  $z$  y las partículas moviéndose en la dirección positiva del eje  $y$ , el electrón sentirá una fuerza magnética que la hará moverse en la dirección negativa del eje  $x$ . Por el contrario,

el positrón sentirá la fuerza opuesta y se moverá en la dirección positiva del eje  $x$ . El neutrón al ser una partícula sin carga no experimentará ninguna fuerza magnética.

**Cuestión 7.4 — Fuerza magnética nula.** ¿Es posible que una carga se desplace dentro de un campo magnético sin que la fuerza magnética actúe sobre ella en ningún momento?

Sabemos que la fuerza magnética se calcula a partir de la ley de Lorentz (ecuación (7.1)):

$$\mathbf{F}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Como podemos ver el valor de la fuerza magnética se obtiene a partir del producto vectorial de los vectores velocidad y campo magnético. Por tanto, la fuerza magnética será nula en el caso en el que la partícula se mueva de manera paralela (o anti-paralela) al campo. En esta situación:

$$\mathbf{v} \parallel \mathbf{B} \Rightarrow \theta_{v,B} = 0 \Rightarrow F_B = qvB \sin \theta_{v,B} = 0,$$

donde  $\theta_{v,B}$  es el ángulo que forman los vectores velocidad y campo magnético.

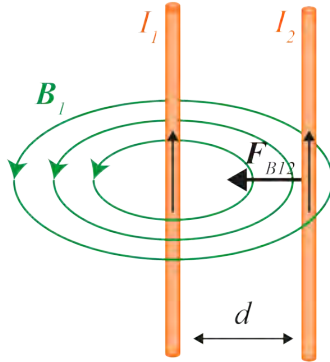
**Sol** Una carga se puede desplazar dentro de un campo magnético sin sentir la acción de ninguna fuerza magnética si se mueve de manera paralela (o anti-paralela) al campo magnético.

**Cuestión 7.5 — Fuerza entre conductores paralelos.** Considere dos hilos delgados conductores de longitud  $l$ , separados una distancia  $d$  y dispuestos de manera paralela en el vacío. Por ellos circulan corrientes  $I_1$  e  $I_2$  ambas en la misma dirección. Demuestre que la magnitud de la fuerza magnética que el primer hilo ejerce sobre el segundo es:

$$F_{B,12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi d}.$$

*Nota: Puede considerar la longitud del hilo mucho mayor que su radio ( $l \gg a$ ) y que la distancia entre conductores  $l \gg d$ .*

Esta cuestión hay que ponerla después de que se calcule el campo de un hilo



Consideremos los dos conductores de longitud  $l$ , separados una distancia  $d$  y con corrientes  $I_1$  e  $I_2$ . Sabemos que la fuerza magnética sobre un conductor rectilíneo viene dada por la ecuación (7.3). Por tanto, la fuerza que el primer conductor ejerce sobre el segundo es:

$$\mathbf{F}_{B,12} = I_2 \mathbf{L}_2 \times \mathbf{B}_1.$$

Donde,  $\mathbf{L}_2$  es el vector longitud del segundo conductor y  $\mathbf{B}_1$  es el campo magnético creado por el primer conductor y que siente el segundo. De la cuestión 7.9 sabemos que la magnitud del campo magnético creado por un hilo infinito ( $l \gg d$ ), y por tanto el campo que crea el primer conductor, es:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r},$$

donde  $r$  es la distancia a la que se calcula el campo. Además sabemos que el campo magnético formará anillos concéntricos al hilo. Por tanto, el campo magnético,  $\mathbf{B}_1$  y el vector longitud  $\mathbf{L}_2$  son perpendiculares en la posición del segundo conductor.

Podemos, por tanto, calcular la magnitud de la fuerza que ejerce el primer conductor sobre el segundo:

$$F_{B,12} = I_2 L_2 B_1 \sin \theta = I_2 l \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi d}. \quad \square$$

Donde se ha usado que  $L_2 = l$  y que  $\theta = 90^\circ$  ya que  $\mathbf{B}_1$  y  $\mathbf{L}_2$  son perpendiculares.

**Cuestión 7.6 — Trabajo y campo magnético.** Considere una región del espacio donde existe un campo magnético  $\mathbf{B}$  por el que se desplaza una carga  $q$  con velocidad  $\mathbf{v}$ . ¿Cuál es máximo trabajo que puede realizar dicho campo?

*Solución:*

Supongamos un desplazamiento rectilíneo. En ese caso, sabemos que el trabajo que realiza una partícula que se desplaza una distancia  $r$  es:

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$$

Si trabajamos en una región en la que existe un campo magnético, la fuerza que sentirá la carga en movimiento será magnética, por lo que el trabajo será:

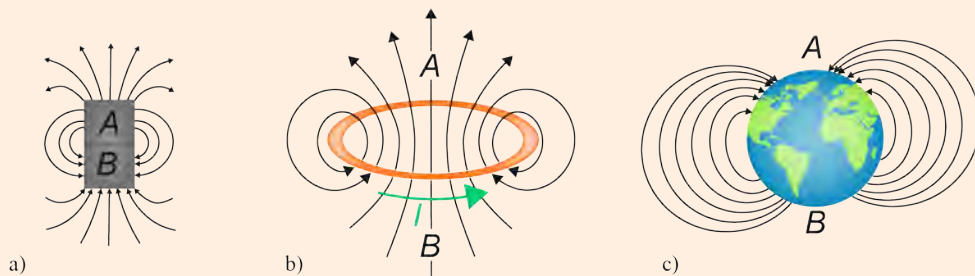
$$W = \mathbf{F}_B \cdot \mathbf{r} \stackrel{ec.(7.1)}{=} q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{r},$$

donde observamos que  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{r}$  tienen la misma dirección. Por tanto, solo cabe que el trabajo sea nulo pues el producto vectorial de los vectores velocidad y campo magnético dará como resultado un vector perpendicular a la trayectoria que al multiplicarlo escalarmente por el vector desplazamiento su producto será nulo.

**Sol** El trabajo realizado por un campo magnético sobre una carga en movimiento es siempre cero ya que para que exista fuerza magnética, el campo magnético debe ser perpendicular al desplazamiento de la partícula.

## Líneas de campo

**Cuestión 7.7 — Líneas de campo magnético.** Indique para las figuras a) imán, b) espira circular y c) Tierra, si  $A$  y  $B$  son polos norte o sur en función de la dirección de las líneas de campo magnético.



**Sol**

Recordemos que las líneas de campo divergen (salen) de los polos norte y convergen (entran) en los polos sur de los imanes. Siguiendo este criterio podemos afirmar que son:

- a)  $A$  es el polo norte y  $B$  el polo sur del imán.
- b)  $A$  es el polo norte y  $B$  el polo sur de la espira circular.
- c)  $A$  es el polo sur y  $B$  el polo norte de la Tierra.

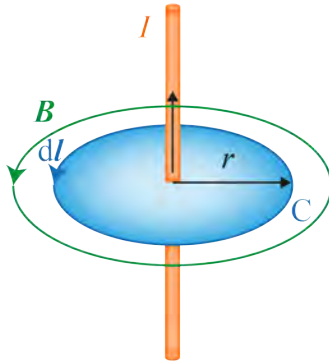
## Campo magnético. Ley de Biot-Savart y ley de Ampère

**Cuestión 7.8 — Campo magnético de un hilo.** Considere un hilo delgado y recto ubicado a largo de la dirección  $z$  por el que circula una corriente  $I$ . Determine la expresión del campo magnético creado por el hilo en el punto  $(a, 0, 0)$  usando la ley de Biot-Savart.

**Sol**

**Cuestión 7.9 — Campo magnético de un hilo. Ley Ampère.** Considere un hilo delgado y recto por el que circula una corriente uniforme  $I$ . Obtenga, mediante la ley de Ampère, la magnitud del campo magnético a una distancia  $r$  del hilo.

*Solución:*



### (I) Análisis del problema

1. Un hilo puede considerarse de longitud infinita siempre que la distancia a la que se mide el campo sea mucho menor que la longitud del hilo,  $r \ll l$ .
2. Al tratarse de un hilo infinito podemos considerar que el campo es el mismo en todos los puntos del espacio que sean equidistantes al hilo.
3. Las líneas de campo magnético formaran anillos concéntricos al hilo.
4. El problema presenta un alto grado de simetría cilíndrica. Podemos emplear la ley de Ampère para obtener el campo magnético que crea el hilo conductor.

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I.$$

### (II) Resolución del problema

Definimos una trayectoria amperiana circular  $C$  de radio  $r$  concéntrica con el anillo y calculamos la circulación del campo magnético a través de ella. Para ello, primero debemos notar que el vector desplazamiento infinitesimal de la curva,  $d\mathbf{l}$ , y el campo magnético,  $\mathbf{B}$ , tienen la misma dirección.

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \stackrel{\mathbf{B} \parallel d\mathbf{l}}{=} \oint_C B dl = B \oint_C dl = B 2\pi r = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

**Sol**

La magnitud de campo magnético creada a una distancia  $r$  de un hilo infinito es

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

**Cuestión 7.10 — Campo magnético espira circular.** Considere una espira circular de radio  $a$  por la que circula una corriente  $I$ . Determine, mediante la ley de Biot-Savart, la expresión del campo magnético creado por la espira en su centro.

*Solución:*

### (I) Análisis del problema

1. Ley de Biot-Savart, ecuación (7.5):

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}.$$

2. En la figura podemos observar que el campo magnético en el centro de la esfera es paralelo al eje  $z$ .

$$\mathbf{B} = B \hat{k}.$$

3. Todos vectores  $d\mathbf{l}$  que se cojan en la espira serán perpendiculares ( $\theta = 90^\circ$ ) al vector posición  $\mathbf{r}$ , por tanto:

$$d\mathbf{l} \times \mathbf{r} = dl r \sin 90^\circ \hat{k} = dl r \hat{k}.$$

4. Para cualquier vector  $d\mathbf{l}$ , el modulo del vector posición coincide con el radio de la espira:

$$r = a.$$

### (II) Resolución del problema

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{dl r}{r^3} \hat{k} \quad r=a \quad \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_L dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} 2\pi a = \frac{\mu_0 I}{2a}.$$

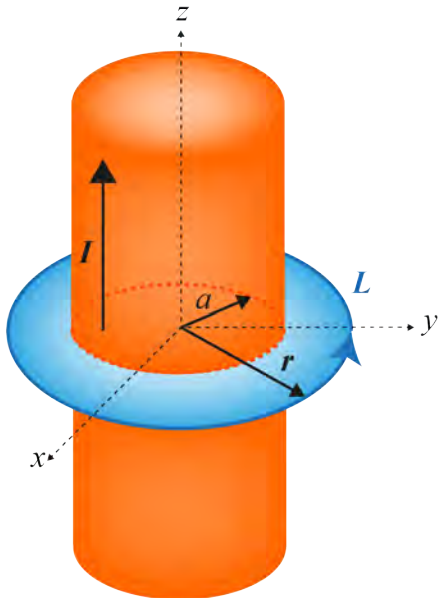
**Sol** El campo magnético creado por una espira circular de radio  $a$  en su centro es

$$B = \frac{\mu_0 I}{2a} \hat{k}.$$

**Cuestión 7.11 — Campo magnético de un conductor cilíndrico.** Considere un conductor cilíndrico de radio  $a$  y longitud  $l \gg a$  por el que circula una corriente

uniforme  $I$ . Obtenga, mediante la ley de Ampère, la magnitud del campo magnético dentro y fuera del conductor.

*Solución:*



### (I) Análisis del problema

1. Dada la simetría cilíndrica del problema podemos calcular el campo magnético aplicando la ley de Ampère:

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I.$$

2. En este problema hay que distinguir dos situaciones: campo magnético (a) fuera del cilindro y (b) en el interior del cilindro:

3. En ambas situaciones podemos calcular la circulación del campo magnético a través de una curva,  $L$ , circular de radio  $r$  y concéntrica al cilindro.

4. Recordemos de la cuestión 7.9 que el campo creado por un hilo infinito (y, en general, por un conductor cilíndrico) forma anillos concéntricos al conductor. Por tanto, para este problema, el campo eléctrico,  $\mathbf{B}$ , será paralelo en todo momento al vector  $d\mathbf{l}$ . Además, podemos considerar el campo magnético uniforme en todo punto del espacio.

### (2) Resolución del problema

(a) Campo fuera del cilindro,  $r > a$

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \stackrel{\mathbf{B} \parallel d\mathbf{l}}{=} \oint_L LB d\mathbf{l} \stackrel{\mathbf{B} = cte}{=} B \oint_L d\mathbf{l} = B 2\pi r = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

(b) Campo dentro del cilindro,  $r < a$

En esta situación, antes de aplicar ley de Gauss, tenemos que ver la corriente neta que queda dentro de la curva  $L$ .

$$\frac{I'}{I} = \frac{r^2}{a^2} \quad \Rightarrow \quad I' = I \frac{r^2}{a^2}.$$

Explicar cómo se obtiene esta expresión?

Y, por tanto, podemos obtener el campo en el interior aplicando ley de Ampère:

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \stackrel{\mathbf{B} \parallel d\mathbf{l}}{=} \oint LBdl \stackrel{\mathbf{B}=cte}{=} B \oint_L dl = B2\pi r = \mu_0 I' = \mu_0 I \frac{r^2}{a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0}{2\pi r} I \frac{r^2}{a^2} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a}.$$

**Sol** La magnitud el campo magnético creado por el conductor es:

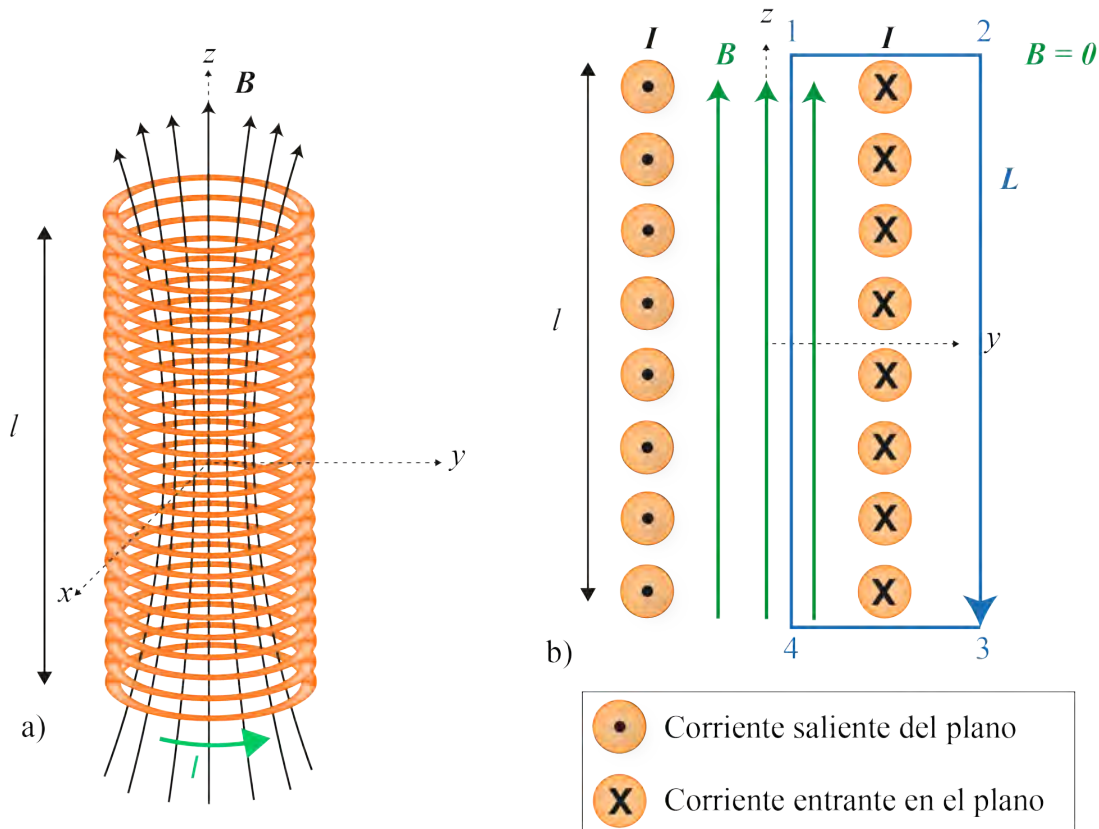
$$B = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & \text{si } r > a, \\ \frac{\mu_0 I r}{2\pi a} & \text{si } r < a. \end{cases}$$

! Nótese que el campo para  $r > a$  es el mismo que generaría un hilo conductor de radio despreciable.

**Cuestión 7.12 — Campo magnético de un solenoide.** Para un solenoide<sup>a</sup> con  $N$  espiras y longitud  $l$  por el que circula una corriente  $I$ , obtenga, mediante la ley de Ampère, la magnitud del campo magnético en su interior. *Nota: Puede considerar el solenoide ideal.*

<sup>a</sup>Un solenoide consiste en un enrollamiento helicoidal de hilos sobre un cilindro que se puede ver como una superposición de espiras muy juntas entre si. Cuando una corriente eléctrica fluye a través del solenoide se genera en su interior un campo magnético intenso y muy uniforme. El cálculo de este campo magnético suele ser complejo salvo para el caso de solenoides ideales, donde la longitud del solenoide y el número de espiras es mucho mayor que el radio del solenoide.

*Solución:*



### (I) Análisis del problema

1. En un solenoide, cuanto mayor es el número de vueltas y más juntas están las espiras, más uniforme es el campo en su interior, como puede verse en la figura a). En nuestro caso, podemos considerar el solenoide ideal (la longitud del solenoide es mucho mayor que el radio del solenoide). En este caso, podemos tratar el campo en el interior del solenoide como uniforme con líneas de campo paralelas al eje  $z$  y en el exterior nulo como se muestra en la figura b).

2. Dada la simetría del problema podemos calcular el campo magnético aplicando la ley de Ampère. Para ello consideramos una trayectoria amperiana,  $L$ , rectangular, localizada en el plano  $yz$ , de altura igual a la del solenoide y que recoja en su interior únicamente la sección transversal derecha del solenoide como se muestra en la figura b)<sup>4</sup>. El ancho de la línea veremos más adelante que es indiferente, siempre que no llegue a la sección izquierda del solenoide.

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I.$$

<sup>4</sup>Notar que si cogiésemos el solenoide completo (sección transversal derecha e izquierda) la corriente neta en el interior de la curva sería nula

**(II) Resolución del problema**

Calculamos primero la circulación a través de la trayectoria amperiana,  $L$ :

$$\begin{aligned}\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \int_1^2 \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}_{12} + \int_2^3 \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}_{23} + \int_3^4 \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}_{34} + \int_4^1 \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}_{41} = \int_4^1 \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}_{41} = \\ &= \int_4^1 B dl_{41} = B \int_4^1 dl_{41} = Bl,\end{aligned}$$

En el cálculo anterior de la circulación del campo magnético a través de  $L$  se ha tenido en cuenta lo siguiente:

- I) *Integral entre 1 y 2*: El producto escalar entre  $\mathbf{B}$  y  $d\mathbf{l}_{12}$  es nulo dado que ambos vectores son perpendiculares.
- II) *Integral entre 2 y 3*: El producto escalar entre  $\mathbf{B}$  y  $d\mathbf{l}_{23}$  es nulo dado que fuera del solenoide el campo magnético es nulo.
- III) *Integral entre 3 y 4*: El producto escalar entre  $\mathbf{B}$  y  $d\mathbf{l}_{34}$  es nulo dado que ambos vectores son perpendiculares.
- IV) *Integral entre 4 y 1*: Los vectores  $\mathbf{B}$  y  $d\mathbf{l}_{41}$  son paralelos y, por tanto, su producto escalar es el producto de sus módulos. El campo magnético puede salir fuera de la integral ya que es uniforme en el interior del solenoide.

Aplicando ley de Ampère:

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = Bl = \mu_0 I_T = \mu_0 NI \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 NI}{l} = \mu_0 nI.$$

En la operación anterior se ha tenido en cuenta que  $n$  es la densidad de vueltas del solenoide ( $n = N/l$ ) y que la corriente neta que atraviesa a la superficie que encierra la trayectoria gaussiana es  $NI$ .

**Sol** La magnitud del campo magnético en el interior del solenoide ideal es

$$B = \mu_0 nI. \quad (7.C.1)$$

## 7.10 Problemas

### Fuerza magnética

**Problema 7.1 — Acelerador de partículas.** En el Gran Colisionador de Hadrones (*LHC*), protones son acelerados a energías muy altas a través de anillos donde potentes imanes se encargan de mantenerlos en una trayectoria circular. Determine la fuerza magnética a la que se vería sometido un protón moviéndose con una velocidad,  $\mathbf{v} = 6 \cdot 10^6 \hat{i} \text{ m/s}$  en un sector del *LHC* donde el campo magnético es  $\mathbf{B} = 5 \hat{k} \text{ T}$ .

*Solución:*

Sabemos que la fuerza magnética que sufre una carga en movimiento bajo un campo magnético viene dada por la ley de Lorentz (ecuación (7.1)):

$$\mathbf{F}_B = q_p \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C } 6 \cdot 10^6 \hat{i} \text{ m/s} \times 5 \hat{k} \text{ T} = -4.8 \cdot 10^{-12} \hat{j} \text{ N}.$$

**Sol** La fuerza magnética a la que se ve sometido el protón en este sector del *LHC* es  $\mathbf{F}_B = -4.8 \cdot 10^{-12} \hat{j} \text{ N}$ .

**Problema 7.2 — Fuerza en conductor rectilíneo.** Considere un cable conductor de longitud 5 cm por el que circula una corriente de 2 A en la dirección positiva del eje  $y$ . ¿Qué fuerza magnética se ejerce sobre el cable si se encuentra bajo un campo magnético de  $4 \text{ G } \hat{k}$ ?

*Solución:*

Supongamos un conductor rectilíneo por el que circula una corriente la dirección  $y$  ( $\mathbf{L} = 5 \hat{j} \text{ cm}$ ) bajo un campo magnético en la dirección  $z$  ( $\mathbf{B} = 4 \hat{k} \text{ G}$ ). Sabemos que la fuerza magnética que sobre un conductor rectilíneo viene dada por la ecuación (7.3):

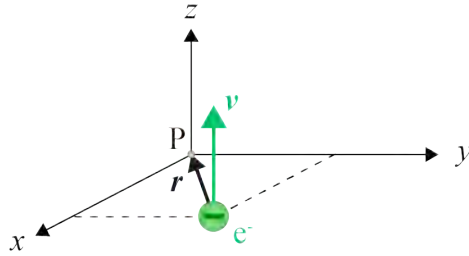
$$\mathbf{F}_B = I \mathbf{L} \times \mathbf{B} = 2 \text{ A } 5 \cdot 10^{-2} \hat{j} \text{ m} \times 4 \cdot 10^{-4} \hat{k} \text{ T} = 20 \cdot 10^{-2} \hat{i} \text{ N} = 0.2 \hat{i} \text{ N}.$$

**Sol** La fuerza magnética sobre el conductor rectilíneo en esta situación es  $\mathbf{F}_B = 0.2 \hat{i} \text{ N}$ .

### Campo magnético

**Problema 7.3 — Campo magnético creado por un electrón.** Considere un electrón moviéndose con velocidad  $\mathbf{v} = 5 \cdot 10^7 \hat{k}$  m/s. Determinar el campo magnético creado por el electrón en el origen si esta partícula se mueve desde la posición (10, 10, 0) cm.

*Solución:*



Tenemos un electrón ubicado en (10, 10, 0) cm. Para calcular el campo que crea en el origen debemos calcular primero el vector posición de esta partícula al origen:

$$\mathbf{r} = -10(\hat{i} + \hat{j}) \text{ cm} \quad (\Rightarrow r = 10\sqrt{2} \text{ cm}).$$

El campo creado por el electrón podemos obtenerlo a partir de la ecuación (7.4):

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3} = \\ &= \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2 (-1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}) 5 \cdot 10^7 \hat{k} \text{ m/s} \times (-10 \cdot 10^{-2}(\hat{i} + \hat{j}) \text{ m})}{(10 \cdot 10^{-2} \sqrt{2} \text{ m})^3} = \\ &= 2.8 \cdot 10^{-17} \hat{k} \times (\hat{i} + \hat{j}) \text{ T} = 2.8 \cdot 10^{-17}(\hat{j} - \hat{i}) \text{ T}. \end{aligned}$$

**Revisar solución. Meter números en calculadora**

**Sol** El campo magnético creado por el electrón en el origen es  $\mathbf{B} = 2.8 \cdot 10^{-17}(-\hat{i} + \hat{j})$  T.

**Problema 7.4 — Campo magnético en Cádiz.** Un conductor largo y recto conduce una corriente de 1.0 A. ¿A qué distancia del eje del conductor, el campo magnético generado por la corriente tiene igual magnitud que el campo magnético terrestre en Cádiz (alrededor de  $0.5 \cdot 10^{-4}$  T)?

*Solución:*

Sabemos de la cuestión 7.11 que el campo creado por un conductor largo y recto en el exterior su exterior es:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Por tanto, conocida la corriente que circula por el conductor y el campo que genera, el cálculo de la distancia es directo:

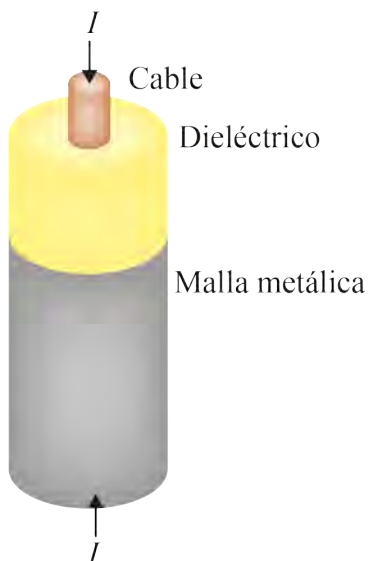
$$r = \frac{\mu_0 I}{2\pi B} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2 \cdot 1 \text{ A}}{2\pi \cdot 0.5 \cdot 10^{-4} \text{ T}} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 4 \text{ mm}.$$

**Sol** El campo magnético creado por el conductor es igual al campo magnético terrestre en Cádiz si nos situamos a 4 mm del conductor.

**Problema 7.5 — Cable coaxial.** Un cable coaxial es un tipo de conductor eléctrico que se compone de un núcleo central, generalmente un alambre, rodeado por una malla metálica cilíndrica. Ambos conductores están separados por un material aislante. El núcleo central transporta la corriente eléctrica en una dirección, mientras que la malla exterior actúa como el camino de retorno de la corriente y se conecta a tierra. Determina la magnitud del campo magnético a) dentro y b) fuera del cable coaxial

*Solución:*

### (I) Análisis del problema



1. El cable lleva la corriente en una dirección, mientras que la malla metálica lleva la corriente de retorno en la otra dirección.

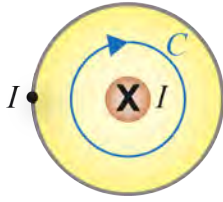
2. Dada la simetría cilíndrica del problema, podemos obtener el campo magnético dentro y fuera del cable coaxial mediante aplicación de la ley de Ampère.

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I.$$

Para ello buscaremos dos trayectorias amperianas  $C$ , una dentro del cable coaxial (en el dieléctrico) y otra fuera del cable de la malla metálica.

### (II) Resolución del problema

#### a) Dentro del cable coaxial

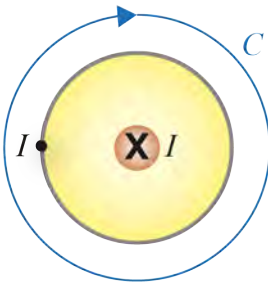


Recordemos que las líneas de campo magnético creadas por un conductor cilíndrico forman anillos concéntricos al cable. Por tanto, los vectores  $\mathbf{B}$  y  $d\mathbf{l}$  son paralelos. Por tanto, aplicando ley de Ampère:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \oint_C dl = B 2\pi r = \mu_0 I_T = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

En la expresión anterior se ha tenido en cuenta que la corriente neta que atraviesa la superficie que encierra la trayectoria  $C$  es la que pasa por el cable. Esta corriente es  $I$ .

### b) Fuera del cable coaxial



Al igual que en la situación anterior, los vectores  $\mathbf{B}$  y  $d\mathbf{l}$  son paralelos. Por tanto, aplicando ley de Ampère:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \oint_C dl = B 2\pi r = \mu_0 I_T = \mu_0 (I - I) = 0.$$

$$\Rightarrow \quad B = 0.$$

En la expresión anterior se ha tenido en cuenta que las corrientes netas que atraviesan la superficie que encierra la trayectoria  $C$  son las que pasan por el cable y por la malla metálica que son iguales pero en direcciones opuestas.

**Sol** La magnitud del campo magnético creado por el cable coaxial es

$$B = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & \text{dentro del cable,} \\ 0 & \text{fuera del cable.} \end{cases}$$

**Problema 7.6 — Electroimán.** a) Considere un solenoide ideal de 5 cm de longitud y 100 vueltas de alambre enrolladas. Calcule la magnitud del campo magnético del solenoide en su interior cuando por él circula una corriente de 2 A.

b) Si la bobina se arrolla sobre un núcleo de hierro para formar un electroimán<sup>a</sup>. Calcule la magnitud del campo magnético si al insertar la bobina en el núcleo la permeabilidad del medio aumenta en un factor 500.

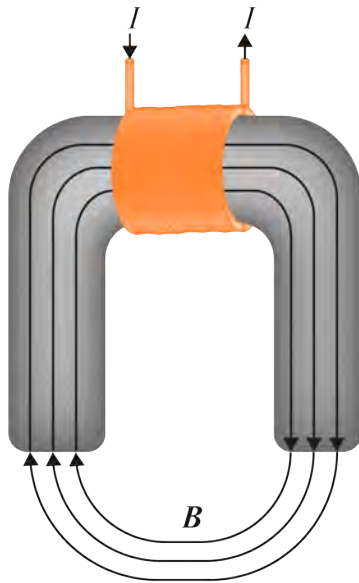
<sup>a</sup>Un electroimán es un dispositivo que produce un campo magnético mediante la circulación de corriente eléctrica a través de una bobina de alambre enrollada alrededor de un núcleo ferromagnético. La presencia del núcleo intensifica significativamente el campo magnético generado

por la bobina. Al cesar la corriente, el magnetismo desaparece, lo que permite un control preciso del campo. Los electroimanes son componentes esenciales en numerosos dispositivos como los altavoces, las grúas de desguaces o las resonancias magnéticas.

*Solución:*

a) Podemos hallar el campo magnético en el interior del solenoide utilizando la expresión hallada en la cuestión 7.12:

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2 \frac{100 \text{ vueltas}}{5 \cdot 10^{-2} \text{ m}} 2 \text{ A} = 5.03 \cdot 10^{-3} \text{ T} = 5.02 \text{ mT}.$$



b) Al enrollar la bobina sobre el núcleo de hierro aumentamos la permeabilidad del medio en un factor  $\kappa_m = 500$  por lo que la expresión de la cuestión 7.12 quedaría como:

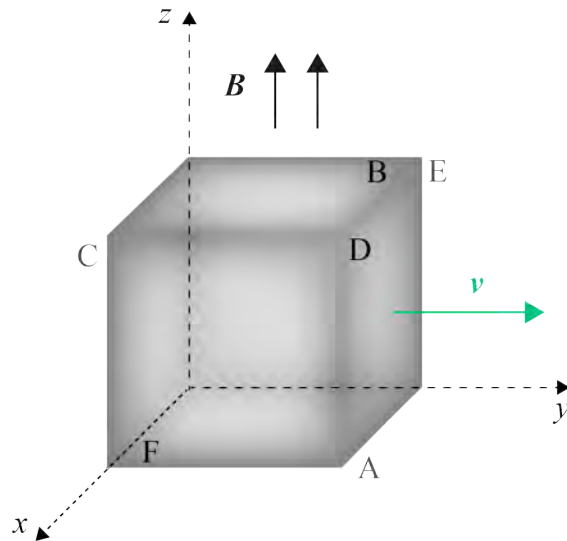
$$B' = \kappa_m \mu_0 \frac{N}{l} I = \kappa_m B = 2.5 \text{ T}.$$

**Sol** El campo magnético del solenoide sin núcleo de hierro es  $B = 5.02 \text{ mT}$ .

Al enrollar el solenoide en un núcleo de hierro aumentamos el campo magnético en un factor  $\kappa_m$  por lo que  $B' = 2.5 \text{ T}$ .

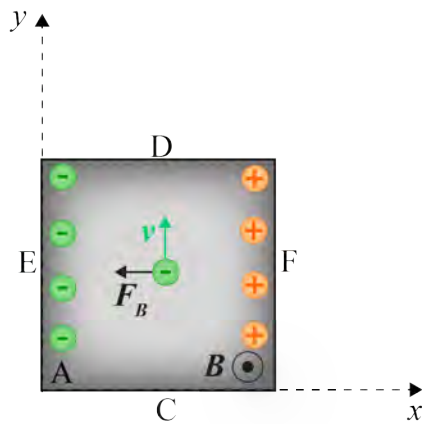
**Problema 7.7 — Cubo metálico en un campo magnético.** Un cubo metálico sólido con lado  $l = 1 \text{ cm}$  se desplaza con velocidad constante  $\mathbf{v} = 2 \hat{j} \text{ m/s}$ . Mientras se mueve, atraviesa un campo magnético uniforme  $\mathbf{B} = 5 \hat{k} \text{ T}$ . Debido a este movimiento en el campo magnético: a) ¿cuál de las caras del cubo quedará con un potencial eléctrico más alto y cuál con un potencial más bajo como resultado de su movimiento dentro del campo magnético? b) ¿Qué valor tendrá la diferencia de potencial inducida entre estas caras?

*Solución:*



1. El cubo metálico posee electrones libres en su interior. Al estar el cubo desplazándose en la dirección  $y$ , estas cargas se encuentran en movimiento bajo un campo magnético. Por tanto, sentirán la acción de una fuerza magnética en la dirección negativa de  $x$ .

$$\mathbf{F}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -evB\hat{j} \times \hat{k} = -evB\hat{i}.$$



2. Como resultado de la aparición de la fuerza magnética se manifiesta el efecto Hall que vimos en la cuestión 7.2. La fuerza magnética provoca una acumulación de cargas negativas en la cara  $E$  del cubo y positivas en la cara  $F$ , provocando la aparición de un potencial eléctrico y un campo eléctrico entre dichas caras.

3. La acumulación de cargas se detiene cuando las fuerzas magnética y eléctrica se equilibran. En ese momento se cumple que:

$$V_H = vBl = 2 \text{ m/s } 5 \text{ T } 10^{-2} \text{ m} = 10 \cdot 10^{-2} \text{ V} = 0.1 \text{ V}.$$

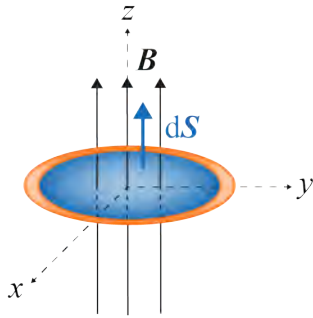
**Sol** Cuando el cubo metálico se desplaza en la dirección  $y$  positiva bajo la acción de un campo magnético en la dirección  $z$  positiva aparece una diferencia de potencial entre las caras del cubo ubicadas en los planos  $yz$ . La cara ubicada en  $x = 0$  (cara  $E$ ) quedará con un potencial negativo mientras que la cara ubicada en  $x = l$  (cara  $F$ ) quedará con un potencial positivo, por la acumulación de carga negativa y positiva, respectivamente.

El potencial que se establece entre ambas caras es  $V_H = 0.1 \text{ V}$ .

## Flujo magnético

**Problema 7.8 — Flujo magnético de una espira.** Calcule el flujo magnético en una espira circular de 10 cm de radio situada en una región del espacio con un campo magnético de 0.2 T perpendicular al plano de la espira. ¿Qué ocurre si rota la espira de manera que el campo magnético sea paralelo al plano de la espira?

*Solución:*



El flujo magnético a través de la superficie interior de la espira se calcula a partir de la ecuación (7.8). En ella tenemos que tener en cuenta que  $\mathbf{B}$  y  $d\mathbf{S}$  son paralelos y que  $B$  es uniforme en la zona central de la espira.

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B \int_S dS = B\pi a^2 =$$

$$= 0.2 \text{ T } \pi (10 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2 = 0.0063 \text{ Wb} = 6.3 \text{ mWb}.$$

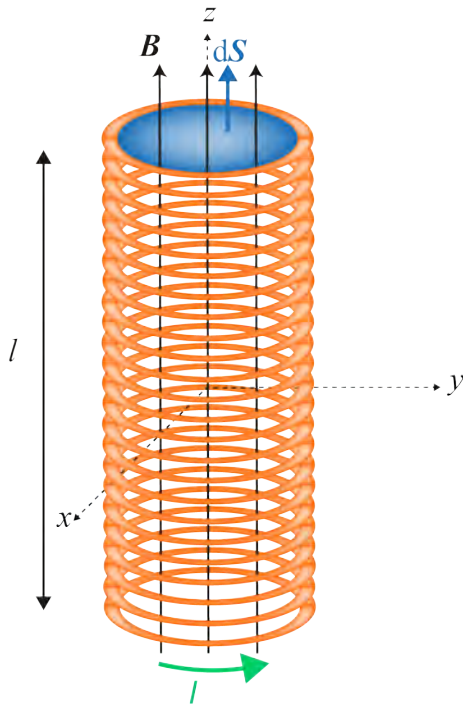
Si a continuación la espira rota de manera que el campo magnético es paralelo al plano de la espira, los vectores  $\mathbf{B}$  y  $d\mathbf{S}$  pasarán a ser perpendiculares y, por tanto, su producto escalar es nulo:

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

**Sol** El flujo magnético en la situación inicial es  $\Phi_B = 6.3 \text{ mWb}$ . Si el plano de la espira y el campo magnético son paralelos, el flujo magnético es nulo,  $\Phi_B = 0$ .

**Problema 7.9 — Flujo magnético de un solenoide.** Calcule el flujo magnético creado por solenoide con 20 mm de radio y 60 vueltas/cm por el que circula una corriente de 2 A. *Nota: Considere el solenoide ideal.*

*Solución:*



### (I) Análisis del problema

1. De la cuestión 7.12 sabemos que el campo magnético creado por el solenoide ideal en su interior es

$$B = \begin{cases} \mu_0 n I & \text{dentro del solenoide,} \\ 0 & \text{fuera del solenoide.} \end{cases}$$

2. El flujo magnético a través de la superficie interior del solenoide se calcula a partir de la ecuación (7.8).

3. Al tratarse de un solenoide ideal el campo magnético  $\mathbf{B}$  es uniforme en el interior del solenoide y paralelo a  $d\mathbf{S}$ .

### (II) Resolución del problema

Calculamos el flujo magnético creado por el solenoide:

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B \int_S dS = BS = \mu_0 n I \pi a^2 =$$

$$= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2 \cdot 6000 \text{ vueltas/m} \cdot 2 \text{ A} \cdot \pi (20 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2 = 1.9 \cdot 10^{-5} \text{ Wb} = 19 \mu \text{ Wb}.$$

**Sol** El flujo magnético creado por el solenoide es  $\Phi_B = 19 \mu \text{ Wb}$ .

**Problema 7.10 — La estrella de neutrones (de Alicia).** Las estrellas masivas<sup>a</sup> pueden terminar como estrellas de neutrones (o agujeros negros). Cuando una estrella colapsa gravitacionalmente hasta convertirse en una estrella de neutrones, uno de los efectos más extremos es la intensificación brutal de su campo magnético. A pesar de que los neutrones no tienen carga eléctrica, el campo magnético se conserva debido a que, justo antes del colapso, la estrella está formada por plasma en un estado superconductor. En este estado, la resistividad del material es prácticamente nula, lo que implica que el flujo magnético se conserva durante el proceso.

Considera una estrella que antes del colapso tiene un radio de  $R_i = 1.4 \cdot 10^6 \text{ km}$ , y un campo magnético superficial medio de  $B_i = 0.05 \text{ T}$ . Tras el colapso, se convierte

en una estrella de neutrones con un campo magnético superficial de  $B_f = 1.6 \cdot 10^7$  T. Suponiendo que la estrella es aproximadamente esférica, ¿cuál será el radio final de la estrella de neutrones?

<sup>a</sup>Más de 8 masas solares.

*Solución:*

Como nos dice el enunciado en el proceso en el que una estrella masiva pasa a convertirse en una estrella de neutrones el flujo magnético se conserva. Bajo esta premisa podemos trabajar considerando como será el campo magnético inicial y final en el proceso de transformación a una estrella de neutrones.

$$\Phi_B = \text{cte} \quad \Rightarrow \quad \Phi_{B,i} = \Phi_{B,f} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{A}_i = \mathbf{B}_f \cdot \mathbf{A}_f.$$

Donde  $B$  representa el campo magnético de la estrella y  $A$  su superficie. El subíndice  $i$  representa el estado inicial de la estrella (estrella masiva), mientras que el subíndice  $f$  representa su estado final (estrella de neutrones).

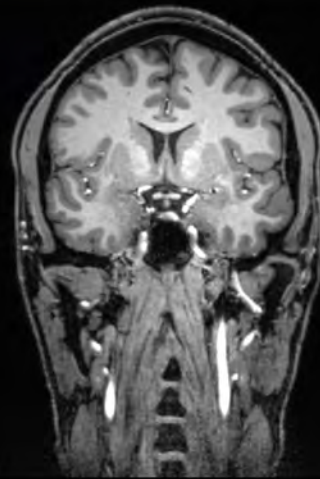
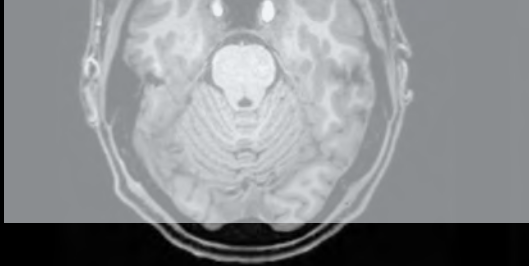
Considerando las estrellas como esféricas y suponiendo paralelos los vectores campos magnético  $\mathbf{B}$  y superficie  $\mathbf{A}$  en ambos estados, tendremos que:

$$B_i \cdot 4\pi R_i^2 = B_f \cdot 4\pi R_f^2 \Rightarrow R_f = R_i \sqrt{\frac{B_i}{B_f}} = 1.4 \cdot 10^6 \text{ km} \sqrt{\frac{0.05 \text{ T}}{1.6 \cdot 10^7 \text{ T}}} = 78.2 \text{ km}.$$

**Sol** El radio final de la estrella de neutrones es 78.2 km.



- 8.1 Introducción
- 8.2 Ley de Faraday-Lenz
- 8.3 Campo eléctrico inducido
- 8.4 Autoinducción e inductancia
- 8.5 Energía en un campo magnético
- 8.6 Circuito  $RL$
- 8.7 Cuestiones
- 8.8 Problemas



## 8. Inducción Magnética

### 8.1 Introducción

A diferencia de lo que vimos en el Capítulo 1, donde las cargas se presentaron como las fuentes del campo eléctrico, en este tema aprenderemos que las variaciones temporales del campo magnético constituyen una fuente adicional de campos eléctricos.

### 8.2 Ley de Faraday-Lenz

La ley de Faraday de la inducción electromagnética explica el fenómeno por el cual cambios de flujo magnético provocan variaciones de fuerza electromotriz (o voltaje) en un circuito. Más en concreto, la **ley de Faraday** establece que la fuerza electromotriz ( $fem$ ) inducida en cualquier circuito cerrado es igual a la razón negativa de cambio del flujo magnético a través del circuito con respecto al tiempo. Consecuencia directa de esta  $fem$  inducida es la aparición de una corriente inducida en el circuito.

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (8.1)$$

Donde  $\Phi_B$  es el flujo magnético que se puede calcular a partir de la ecuación (7.8).

El signo menos de la ecuación (8.1) proviene de la **ley de Lenz**, la cual establece que la  $fem$  y la corriente inducidas en un circuito cerrado se oponen a la variación temporal de flujo magnético que las produce.



A partir de la ecuación (8.1) se concluye que se induce una fuerza electromotriz si existe una variación temporal del flujo magnético. Esto puede ocurrir si, varía

temporalmente:

1. el módulo del campo magnético,
2. la superficie que encierra el circuito,
3. la orientación entre los vectores campo magnético y superficie.

### 8.3 Campo eléctrico inducido

En las secciones anteriores hemos visto que la variación temporal del flujo magnético sobre un circuito cerrado provoca la aparición de una *fem* y una corriente inducidas. Además, en la sección 3.3 vimos que siempre que existe una *fem* (o voltaje) aparece un campo eléctrico. Por tanto, la variación temporal del flujo magnético no solo conlleva la aparición de una *fem* y una corriente inducida, sino también la aparición de un campo eléctrico inducido.

El campo eléctrico inducido se puede obtener teniendo en cuenta que la circulación del campo eléctrico a través de cualquier trayectoria cerrada  $C$  equivale a la razón negativa del flujo magnético a través de la superficie delimitada por dicha trayectoria con respecto al tiempo:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (8.2)$$

⚠ En esta sección hemos visto que las variaciones temporales del flujo magnético son fuentes del campo eléctrico.

### 8.4 Autoinducción e inductancia

La **autoinducción** es un fenómeno electromagnético que se desarrolla en cualquier circuito eléctrico por el que circula una corriente que varía en el tiempo. Como resultado a este fenómeno se genera una *fem* autoinducida en el circuito que se opone al flujo magnético variable que provoca la corriente en la propia superficie del circuito. Podemos calcular el valor de la *fem* autoinducida a partir de la siguiente expresión:

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{di(t)}{dt}. \quad (8.3)$$

Utilizando de manera conjunta la ecuación (8.3) y la ley de Faraday (ecuación (8.1)) es directo obtener que el flujo magnético es directamente proporcional a la corriente eléctrica:

$$\Phi_B = LI. \quad (8.4)$$

En las ecuaciones (8.3) y (8.4) aparece la constante de proporcionalidad positiva  $L$  conocida como **inductancia**. Esta constante cuantifica la oposición que se presenta ante los cambios de corriente en un circuito eléctrico. La unidad de inductancia en el  $SI$  es  $\text{Tm}^2/\text{A}$ , que en el sistema internacional recibe el nombre de Henrio,  $H$ .

Aunque el fenómeno de autoinducción aparece en cualquier circuito eléctrico, es especialmente notable en aquellos que incluyen un **inductor** (también denominado como **bobina**). Un inductor es un componente pasivo electrónico (al igual que las resistencias y los condensadores) que consiste principalmente en arrollamientos de conductor aislado en diversas geometrías. El inductor o bobina más común es el solenoide, visto en la cuestión 7.12.

⚠ Añadir la caída de potencia del inductor Recordemos del tema ??

Terminar teoría

## 8.5 Energía en un campo magnético

$$U = \frac{1}{2}LI^2. \quad (8.5)$$

## 8.6 Circuito $RL$

$$i(t) = I_f (1 - e^{-t/\tau}). \quad (8.6)$$

$$I_f = \frac{V}{R}.$$

$$\tau = \frac{L}{R}.$$

Añadir a las cuestiones los ejemplos 4 y 5 del tema 8

## 8.7 Cuestiones

### Ley de Faraday-Lenz

**Cuestión 8.1 — Fuerza electromotriz inducida en una espira.** Suponga una espira circular que encierra un área  $S$  y que está situada en una región en la que existe un campo magnético uniforme externo. Determine la *fem* inducida en la espira si el campo magnético vale:

- a)  $\mathbf{B}_a(t) = B_{max} \sin \omega t \hat{k}$ .
- b)  $\mathbf{B}_b(t) = B_{max} \cos \omega t \hat{j}$ .
- c)  $\mathbf{B}_c(t) = B_{max} e^{-\alpha t} \hat{i} + B_{max} e^{-\beta t} \hat{j} + B_{max} e^{-\gamma t} \hat{k}$ .

*Datos:*  $B_{max}$ ,  $\beta$  y  $\omega$  son constantes positivas.

*Nota:* Considere la espira ubicada en el plano  $xy$  de tal forma que su vector de superficie apunta hacia la dirección positiva del eje  $z$ .

*Solución:*

Tenemos una espira ubicada en el plano  $xy$  tal que  $d\mathbf{S} = dS \hat{k}$ . Para calcular la *fem* inducida a través de ella utilizamos la ley de Faraday (ecuación (8.1)) y la expresión del flujo magnético (ecuación (7.8)):

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

Calculamos primero el flujo magnético en cada situación y, a continuación, determinamos la *fem* inducida:

a) Flujo magnético:

$$\Phi_{B,a} = \int_S \mathbf{B}_a \cdot d\mathbf{S} = \int_S B_{max} \sin(\omega t) \hat{k} \cdot dS \hat{k} = B_{max} \sin(\omega t) \int_S dS = SB_{max} \sin(\omega t).$$

*fem* inducida en la espira:

$$\mathcal{E}_a = -\frac{d\Phi_{B,a}}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B}_a \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} (SB_{max} \sin(\omega t)) = -\omega SB_{max} \cos(\omega t).$$

b) Flujo magnético:

$$\Phi_{B,b} = \int_S \mathbf{B}_b \cdot d\mathbf{S} = \int_S B_{max} \sin(\omega t) \hat{j} \cdot dS \hat{k} = 0.$$

*fem* inducida en la espira:

$$\mathcal{E}_b = -\frac{d\Phi_{B,b}}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B}_b \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

c) Flujo magnético:

$$\begin{aligned} \Phi_{B,c} &= \int_S \mathbf{B}_c \cdot d\mathbf{S} = \int_S \left( B_{max} e^{-\alpha t} \hat{i} + B_{max} e^{-\beta t} \hat{j} + B_{max} e^{-\gamma t} \hat{k} \right) \cdot dS \hat{k} = \\ &= B_{max} e^{-\gamma t} \int_S dS = S B_{max} e^{-\gamma t}. \end{aligned}$$

*fem* inducida en la espira:

$$\mathcal{E}_c = -\frac{d\Phi_{B,c}}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B}_c \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} (S B_{max} e^{-\gamma t}) = \gamma S B_{max} e^{-\gamma t}.$$

**Sol** La *fem* inducida en la espira es:

$$\text{a) } \mathbf{B}_a(t) = B_{max} \sin \omega t \hat{k} \Rightarrow \mathcal{E}_a = -\omega S B_{max} \cos(\omega t).$$

$$\text{b) } \mathbf{B}_b(t) = B_{max} \cos \omega t \hat{k} \Rightarrow \mathcal{E}_b = 0.$$

$$\text{c) } \mathbf{B}_c(t) = B_{max} e^{-\alpha t} \hat{i} + B_{max} e^{-\beta t} \hat{j} + B_{max} e^{-\gamma t} \hat{k} \Rightarrow \mathcal{E}_c = \gamma S B_{max} e^{-\gamma t}.$$

**Cuestión 8.2 — Fuerza electromotriz inducida en un solenoide.** Obtenga la *fem* inducida en un solenoide de  $N$  vueltas y sección transversal  $S$ , cuando sobre él actúa un campo magnético uniforme y paralelo al eje del solenoide de valor  $B(t) = \alpha t^2 + \beta t$ .

*Solución:*

Tenemos una espira ubicada en el plano  $xy$  tal que  $d\mathbf{S} = dS \hat{k}$ . Para calcular la *fem* inducida a través de ella utilizamos la ley de Faraday (ecuación (8.1)) y la expresión del flujo magnético (ecuación (7.8)):

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

Teniendo en cuenta que el vector campo magnético y el vector de superficie son paralelos, calculamos primero el flujo magnético para una de las espiras del solenoide:

$$\Phi_{B,1} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S B dS = BS.$$

Teniendo en cuenta las  $N$  espiras que forman el solenoide, el flujo magnético total sobre el solenoide es igual a la suma de los flujos de cada espira:

$$\Phi_B = \sum_{i=1}^N \int_{S_i} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_i = \int_{S_i} B dS_i = N \int_S B dS = NBS.$$

Y, por tanto, la *fem* inducida en el solenoide:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -S \frac{d}{dt} (B) = -SN(2\alpha t + \beta).$$

**Sol** La *fem* inducida en el solenoide es  $\mathcal{E} = -SN(2\alpha t + \beta)$ .

**!** Es importante destacar que la ley de Faraday hace referencia a la superficie que encierra la totalidad del circuito. Por tanto, en este caso se podría haber calculado la *fem* inducida en el solenoide la suma de las contribuciones de las  $N$  espiras que forman el solenoide.

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_B}{dt}.$$

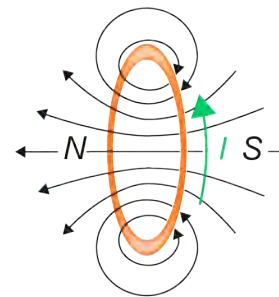
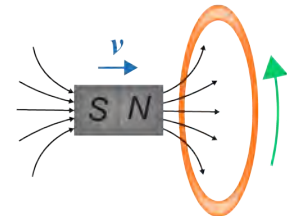
**Cuestión 8.3 — Ley de Lenz.** Indique el sentido de la corriente inducida en la espira (horario o anti-horario) en las siguientes figuras



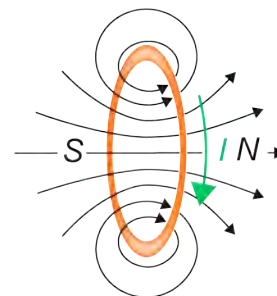
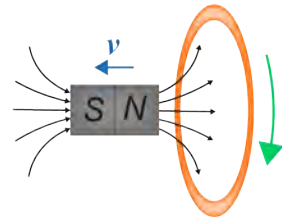
*Solución:*

Como se ha visto en la sección 8.2, el sentido de la corriente inducida se opone a la variación de flujo magnético que la produce. Por tanto, resolvemos esta cuestión teniendo en cuenta lo que nos dice la ley de Lenz.

a) Tenemos un imán cuyo polo norte se está aproximando a la espira. Como consecuencia, se está aumentando el flujo magnético en la espira debido a la líneas de campo que produce el imán. Como respuesta a este aumento de flujo magnético, la espira tratará de generar una corriente inducida que genere un campo magnético que se oponga al del imán sacando líneas de campo en su superficie interna. Para ello, la corriente tendrá que circular en sentido anti-horario como se muestra en las figuras.



b) Tenemos un imán cuyo polo norte se está alejando de la espira. Como consecuencia, se está disminuyendo el flujo magnético en la espira debido a la líneas de campo que produce el imán. Como respuesta a esta disminución de flujo magnético, la espira tratará de generar una corriente inducida que genere un campo magnético que se oponga al del imán introduciendo líneas de campo en su superficie interna. Para ello, la corriente tendrá que circular en sentido horario como se muestra en las figuras.



**Sol**

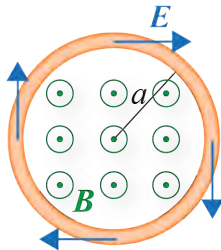
La corriente inducida tendrá sentido anti-horario cuando el imán aproxima su polo norte hacia ella (apartado a). Tendrá sentido horario en el caso contrario, cuando el imán aleja su polo norte de ella (apartado b).

## Campo eléctrico inducido

**Cuestión 8.4 — Campo Eléctrico inducido en una espira.** Demuestre que el campo eléctrico inducido en una espira conductora que se encuentra bajo un campo magnético  $\mathbf{B}(t)$  perpendicular al plano de la espira se puede calcular a partir de la ecuación

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

**Sol**



La ley de Faraday establece el valor de la *fem* inducida en un circuito cerrado a partir de la ecuación (8.1).

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

El movimiento de la carga en este conductor implica la existencia un campo eléctrico  $\mathbf{E}$  que es tangente a la espira y equivalentemente la existencia de una fuerza eléctrica. El trabajo realizado por este campo al mover una carga en la espira es, por lo tanto,

$$W = q \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q\mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}.$$

En la ecuación anterior se ha utilizado la relación para trabajo encontrada en la ecuación (3.1).

Juntando ambas expresiones tendremos que:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \Rightarrow \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \quad \square$$

## Autoinducción e inductancia

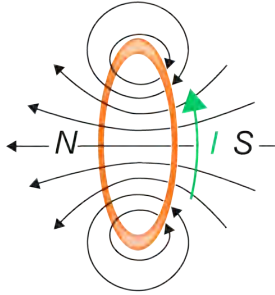
**Cuestión 8.5 — Inductancia.** Asumiendo que el flujo magnético es proporcional a la corriente, demuestre que la *fem* autoinducida se puede calcular como

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{di(t)}{dt}.$$

*Nota: Puede basar su demostración en la autoinducción en una espira circular.*



### (I) Análisis del problema



Supongamos una espira circular de radio  $a$  por la que circula una corriente  $i(t)$ . Podemos calcular la fuerza autoinducida en dicha espira mediante la ley de Faraday (ecuación (8.1)):

$$\mathcal{E}_L = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Por tanto, para calcular la *fem* autoinducida en la espira, antes debemos conocer el flujo que atraviesa la espira, el cual dependerá del campo magnético producido por la propia espira y de su superficie.

### (II) Resolución del problema

En la cuestión 7.9 vimos que el campo magnético producido en el centro de la espira es:

$$B = \frac{\mu_0 i(t)}{2a}.$$

Donde observamos que el campo magnético es proporcional a la corriente que circula por la espira. De igual modo, podemos suponer que el flujo magnético es proporcional a dicha corriente como se muestra en la ecuación (8.4).

$$\Phi_B = Li(t).$$

Como consecuencia, se demuestra que la *fem* autoinducida es :

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d(Li(t))}{dt} = -L\frac{di(t)}{dt}. \quad \square$$

**Cuestión 8.6 — Máxima y mínima inductancia.** Dado un trozo de cable de longitud constante, a) ¿cuál sería la configuración geométrica que maximiza su inductancia? b) ¿Y cuál la que la minimiza?

*Nota: Utilice la inductancia del solenoide hallada en la cuestión 8.2 para encontrar las configuraciones que se piden en esta cuestión.*

*Solución:*

Como vimos en la cuestión 8.2, la inductancia de un solenoide es:

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} A.$$

Esta expresión nos indica que a mayor número de vueltas mayor será el valor de la inductancia pues  $L$  es directamente proporcional al número de vueltas al cuadrado  $N^2$ .

Por tanto, aquella configuración que maximiza la inductancia es la que tiene un mayor número de vueltas, como por ejemplo un solenoide. Mientras la que lo minimiza es la que tiene un menor número de vueltas, como por ejemplo un cable recto.

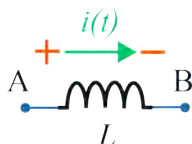
Revisar



**Cuestión 8.7 — Relación  $I - V$  inductor.** Obtenga una relación entre la corriente que atraviesa un inductor y la caída de potencial entre sus terminales.

*Solución:*

Supongamos que trabajamos con una bobina de inductancia  $L$ , con una *fem* autoinducida  $\mathcal{E}$  y por la que circula una corriente  $i(t)$  como se muestra en la figura.



La *fem* inducida en la bobina es:

$$\mathcal{E} = -\frac{di(t)}{dt} \equiv \Delta V$$

Teniendo en cuenta que la *fem* equivale a la diferencia de potencial ( $\mathcal{E} \equiv \Delta v(t) = v_B(t) - v_A(t)$ ), podemos calcular la caída de potencial en el inductor como:

$$v(t) = v_A(t) - v_B(t) = -\mathcal{E} = L \frac{di(t)}{dt}.$$

Partiendo de esta expresión podemos determinar la corriente en términos del voltaje para el inductor:

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \Rightarrow di(t) = \frac{1}{L} v(t) dt \Rightarrow \int_{i(t_0)}^{i(t)} di(t) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(t) dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(t) dt.$$

Relación voltaje-corriente para  $L$ :

**Sol**

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}.$$

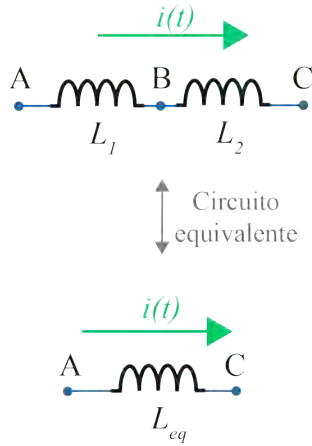
Relación corriente-voltaje para  $L$ :

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(t) dt.$$

**Cuestión 8.8 — Inductancias equivalentes.** Usando las relaciones obtenidas en la cuestión anterior, demostrar que a) la inductancia equivalente de dos inductores conectados en serie es la suma de las inductancias individuales; y b) la inductancia equivalente de dos inductores en paralelo es el inverso de la suma de los inversos de las inductancias individuales.

*Solución:*

a) **Inductores en serie**



Antes de empezar con la asociación en serie debemos notar que la caída de potencial de los dos inductores por separado es:

$$v_{L_1} = v_A - v_B = L_1 \frac{di(t)}{dt},$$

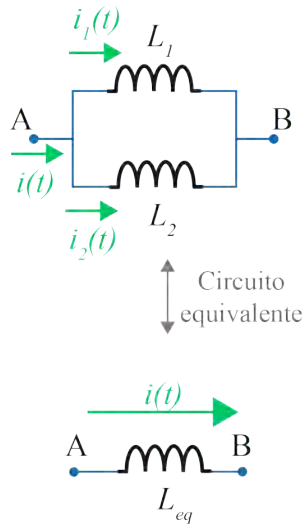
$$v_{L_2} = v_B - v_C = L_2 \frac{di(t)}{dt}.$$

Teniendo esto en cuenta, sabemos que la corriente que atraviesa los inductores en la asociación en serie es la misma y, la caída de potencial en esta combinación se divide entre ambos inductores y se puede calcular como:

$$v = v_A - v_C = v_A - v_B + v_B - v_C = v_{L_1} + v_{L_2} = L_1 \frac{di(t)}{dt} + L_2 \frac{di(t)}{dt} =$$

$$= (L_1 + L_2) \frac{di(t)}{dt} = L_{eq} \frac{di(t)}{dt} \Rightarrow L_{eq} = L_1 + L_2. \quad \square$$

b) **Inductores en paralelo**



En una asociación de dos inductores en paralelo la corriente  $i(t)$  que fluye desde el punto A se divide en dos corrientes,  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$ , que pasan por  $L_1$  y  $L_2$ , respectivamente. Aplicando el principio de conservación de la carga y las relaciones entre corriente y voltaje encontradas en la cuestión 8.7, se tiene que cumplir que:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i(t) = i_1(t_0) + \frac{1}{L_1} \int_{t_0}^t v_1(t) dt + i_2(t_0) + \frac{1}{L_2} \int_{t_0}^t v_2(t) dt \quad v_1 \equiv v_2$$

$$= i_1(t_0) + i_2(t_0) + \left( \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) \int_{t_0}^t v(t) dt = i(t_0) + \frac{1}{L_{eq}} \int_{t_0}^t v(t) dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}. \quad \square$$

En la ecuación anterior se ha usado que en una asociación en paralelo los inductores se encuentran bajo la misma caída de potencial,  $v(t) = v_1(t) = v_2(t)$ , y el principio de conservación de la carga en  $t_0$ ,  $i(t_0) = i_1(t_0) + i_2(t_0)$ .

**Sol**

Inductores en serie:

$$L_{eq} = L_1 + L_2.$$

Inductores en paralelo:

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}.$$

**Cuestión 8.9 — Precaución ante campos magnéticos.** ¿Recomendaría a alguien con un marcapasos (que puede tener componentes electrónicos muy sensibles) entrar en una habitación donde existen campos magnéticos muy intensos no uniformes (por ejemplo, una habitación con un escáner de resonancia magnética)?

*Solución:*

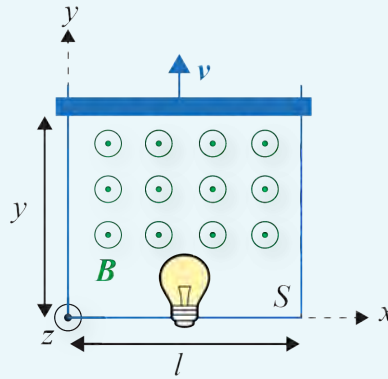
No, no se recomienda. En una sala de MRI, los campos magnéticos son extremadamente intensos (del orden de varios teslas) y pueden ser altamente no uniformes.

Un marcapasos contiene componentes electrónicos sensibles que pueden actuar como circuitos susceptibles a la inducción electromagnética. Si paciente se mueve en ese entorno de campos magnéticos variables en el espacio, se pueden inducir corrientes no deseadas en su circuito interno. Estas corrientes pueden interferir con su funcionamiento, provocando desde un mal funcionamiento temporal hasta fallos completos del dispositivo, lo que representa un riesgo grave para la salud del paciente.

## 8.8 Problemas

**Problema 8.1 — Lámpara.** En la imagen de la figura se representa un mecanismo para encender una lámpara sin conexión a una fuente de energía externa. Para ello se dispone de una bombilla conectada a dos cables conductores separados una distancia  $l = 50$  cm. Sobre estos raíles conductores se desplaza una barra conductora con velocidad  $\mathbf{v} = 0.4 \hat{j}$  m/s. Este circuito se ubica en una región del espacio en la que existe un campo magnético uniforme  $\mathbf{B} = 0.3 \hat{k}$  T. Determine la *fem* inducida en el circuito y la corriente inducida en la bombilla.

*Nota: Puede considerar la bombilla como una resistencia de valor  $R = 3 \Omega$ . Además puede considerar los cables y la barra como conductores ideales.*



*Solución:*

### (I) Análisis del problema

El enunciado plantea un caso en el que tenemos una bombilla (que podemos ver como una resistencia) en el seno de un campo magnético uniforme y constante. Esta bombilla está conectada a un circuito cuya superficie aumenta a medida que la barra conductora se desplaza. Por tanto, existe una variación temporal del flujo magnético que inducirá una *fem* y una corriente en el circuito y en la bombilla.

### (II) Resolución del problema

Para calcular la *fem* inducida calculamos primero el flujo magnético mediante la ecuación (7.8):

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = BS(t) = Bly(t).$$

Podemos obtener la *fem* inducida a partir de la ley de Faraday (ecuación (8.1)):

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(Bly(t)) = -Bl\frac{dy(t)}{dt} = -Blv = -0.3 \text{ T } 0.5 \text{ m } 0.4 \text{ m/s} = -0.06 \text{ V}.$$

Por tanto, vemos como la barra deslizante genera una *fem* inducida en el circuito. La corriente inducida que circula por la bombilla podrá obtenerse a partir de la aplicación de la ley de Ohm (ecuación (4.3)):

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{0.06 \text{ V}}{3 \Omega} = -0.02 \text{ A}.$$

! La corriente es negativa como resultado de la aplicación de la ley de Lenz. Esto nos indica que la corriente inducida se opone a la variación de flujo que la produce. Por tanto, aparece en el circuito una corriente en sentido horario para generar líneas de campo en la dirección negativa del eje  $z$  que se opongan al campo magnético original.

Sol La *fem* inducida en el circuito es  $-0.06 \text{ V}$  y la corriente inducida que circula por la bombilla es  $-0.02 \text{ A}$ .

## Autoinducción e inductancia

**Problema 8.2 — Inductancia solenoide.** a) Calcule la inductancia de un solenoide de sección transversal  $A = 5 \text{ cm}^2$  con 100 vueltas y  $20\pi \text{ cm}$  de longitud por el que circula una corriente  $I = 100 \text{ A}$ .

b) Obtenga la *fem* autoinducida en el solenoide sabiendo que la corriente en el solenoide disminuye de  $100 \text{ mA}$  a  $0 \text{ mA}$  en  $1 \text{ s}$ .

*Nota: Puede calcular el solenoide ideal.*

*Solución:*

a) Podemos calcular la inductancia de un solenoide haciendo uso de la ecuación (8.4):

$$\Phi_B = LI \quad \Rightarrow \quad L = \frac{\Phi_B}{I}.$$

En la ecuación anterior vemos que para calcular la inductancia del solenoide, antes debemos conocer el flujo magnético que produce. Para calcularlo que el solenoide ideal está formado por  $N$  espiras circulares de sección transversal  $A$ . Por tanto, su flujo

corresponderá con  $N$  veces el flujo de una espira individual. Calculamos primero el flujo de dicha espira:

$$\Phi_{B,1} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S B dS = BA = \mu_0 \frac{N}{l} IA.$$

En la ecuación anterior se ha tenido en cuenta que el campo magnético del solenoide es uniforme en el interior del solenoide y que su valor es el que ya se calculó en la cuestión 7.12.

Por tanto, para las  $N$  espiras que forman el solenoide ideal, el flujo será:

$$\Phi_B = N\Phi_{B,1} = \mu_0 \frac{N^2}{l} IA.$$

Y, por tanto, volviendo a la primera ecuación que se obtuvo en este problema, la inductancia del solenoide es:

$$L = \frac{\Phi_B}{I} = \mu_0 \frac{N^2}{l} A = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2 \frac{100^2}{20 \cdot 10^{-2} \pi \text{ m}} 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ H} = 50 \mu\text{H}.$$

b)

La *fem* autoinducida se puede calcular a partir de la ecuación (8.3):

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{di(t)}{dt} = -5 \cdot 10^{-5} \text{ H} (-100 \text{ A/s}) = 5 \cdot 10^{-3} \text{ V} = 5 \text{ mV}.$$

En la ecuación anterior se ha utilizado que la corriente disminuye a una razón  $\frac{di(t)}{dt} = 100 \text{ A/s}$ .

**Sol** La inductancia del solenoide es  $50 \mu\text{H}$  y la *fem* autoinducida en ella es  $5 \text{ mV}$ .

**Problema 8.3 — Circuito *RL*.** Determine la resistencia de un circuito *RL* donde la inductancia tiene un valor  $L = 3 \text{ H}$  y la corriente alcanza el 80 % de su valor final en un tiempo  $t = 5 \text{ s}$ .

*Solución:*

Sabemos que la corriente en cualquier instante en un circuito *RL* viene dada por la ecuación (8.6):

$$i(t) = I_f (1 - e^{-t/\tau}),$$

donde  $I_f = V/R$  y  $\tau = L/R$ .

Sabiendo que el circuito tiene una inductancia de  $L = 3 \text{ H}$  buscamos el valor de la resistencia para que la corriente sea el 80 % de su valor final en  $t = 5 \text{ s}$ .

$$i(t = 5 \text{ s}) = I_f (1 - e^{-t/\tau}) = 0.8 I_f \Rightarrow 1 - e^{-t/\tau} = 0.8 \Rightarrow e^{-t/\tau} = 0.2$$

$$\Rightarrow -\frac{t}{\tau} = -\frac{t}{L/R} = \ln 0.2 \Rightarrow R = -\frac{L \ln 0.2}{t} = -\frac{3 \text{ H} \ln 0.2}{5 \text{ s}} = 0.97 \Omega.$$

**Sol** En estas condiciones, el valor de la resistencia del circuito  $RL$  es  $R = 0.97 \Omega$ .

**Problema 8.4 — Energía de un circuito RL.** Considere un circuito  $RL$  con una bobina de inductancia  $L = 2 \text{ H}$  en serie con una resistencia  $R = 100 \Omega$ , una fuente de tensión de  $V = 50 \text{ V}$ , y un interruptor que cierra en un tiempo  $t = 0$ . Calcule la energía entregada por la fuente al circuito cuando ha pasado 1 segundo.

*Solución:*

Podemos calcular la energía que entrega la fuente al circuito usando las relaciones encontradas en la sección 8.6 y el cálculo de la energía a partir de la potencia para una corriente que varía en el tiempo:

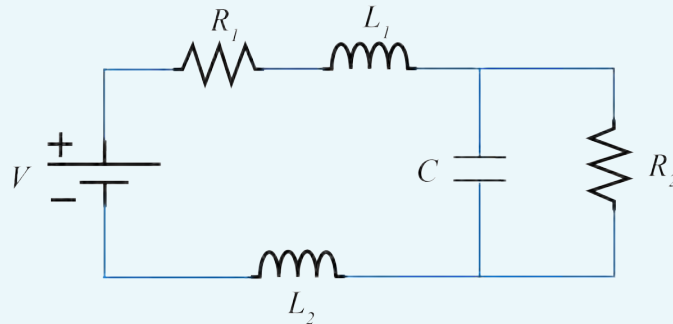
$$\begin{aligned} U_{fem} &= \int_0^{t=1s} P_{fem}(t) dt = \int_0^{t=1s} Vi(t) dt = \int_0^{t=1s} Vi(t) dt = \\ &= \int_0^{t=1s} V I_f (1 - e^{-t/\tau}) dt = V I_f \int_0^{t=1s} (1 - e^{-t/\tau}) dt = V I_f [t + \tau e^{-t/\tau}]_0^{t=1s} = \\ &= \frac{V^2}{R} \left[ t + \frac{L}{R} e^{-tR/L} \right]_0^{t=1s} = \frac{V^2}{R} \left[ t + \frac{L}{R} e^{-tR/L} - \frac{L}{R} \right]_0^{t=1s} = \\ &= \frac{(50 \text{ V})^2}{100 \Omega} \left[ 1 \text{ s} + \frac{2 \text{ H}}{100 \Omega} e^{-\frac{1 \text{ s} \cdot 100 \Omega}{2 \text{ H}}} - \frac{2 \text{ H}}{100 \Omega} \right] = 24.5 \text{ J}. \end{aligned}$$

Expresión de  $U$  en función de  $P$  no vista en clase como tal. Mencionar en algún sitio?

**Sol** La energía del circuito entregada por la fuente al circuito  $RL$  es  $U = 24.5 \text{ J}$ .

**Problema 8.5 — Circuito RLC.** Dado el circuito de la figura, calcule la energía almacenada por la bobina y por el condensador. Datos  $V = 6\text{ V}$ ,  $R_1 = 2\ \Omega$ ,  $R_2 = 4\ \Omega$ ,  $L_1 = 1\text{ H}$ ,  $L_2 = 2\text{ H}$  y  $C = 0.5\text{ F}$ .

*Nota: Puede considerar que se ha alcanzado el equilibrio.*

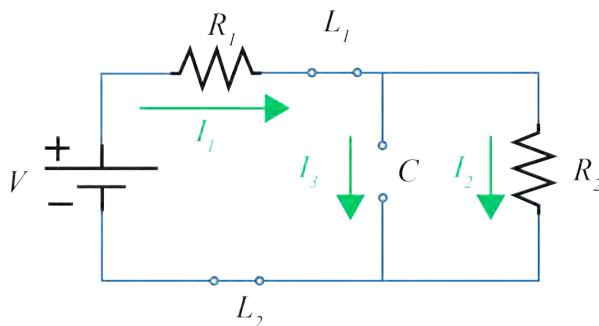


*Solución:*

Añadir en algún sitio las curvas de corriente y carga de un circuito RC en carga y descarga. Hacer referencia a ellas en este ejercicio para dejar claro que cuando se alcanza el equilibrio la corriente es nula.

### (I) Análisis del problema

Como vimos en el problema 8.5, cuando ya se ha alcanzado el equilibrio podemos considerar que el condensador se habrá cargado por completo de tal forma que la corriente que circula por él es nula ( $I_3 = 0$ ). Por tanto, en esta situación podemos considerar al condensador como un circuito abierto.



Con respecto a las bobinas  $L_1$  y  $L_2$ , podemos considerar que una vez alcanzado el equilibrio la corriente que pasa por ellas es máxima (**Figuras de corriente**) y, por tanto, podremos considerarlas como un camino de resistencia nula, es decir, un cortocircuito.

Con todo, el circuito queda con una única malla en la que solo hay una única corriente ( $I_1 = I_2$ ), como se muestra en la figura.

Para calcular las magnitudes que se piden en el enunciado debemos tener en cuenta lo siguiente:

- *Energía almacenada en las bobinas:* Podemos calcularlas a partir de la ecuación (8.5):

$$U_L = \frac{1}{2}LI^2,$$

Por tanto, para poder calcular la energía almacenada en cada bobina, antes debemos conocer la corriente que las atraviesa.

- *Energía almacenada en el condensador:* Podemos calcularla a partir de la ecuación (6.4):

$$U_C = \frac{1}{2}CV^2,$$

Por tanto, para poder calcular la energía almacenada en el condensador, antes debemos conocer su caída de potencial.

## (II) Resolución del problema

Como hemos visto en el análisis del problema, en el circuito solo hay una corriente,  $I_1 = I_2$ . Podemos obtener su valor aplicando ley de Ohm sobre la combinación de resistencias en serie  $R_1$  Y  $R_2$ :

$$I_1 = I_2 = \frac{V}{R_1 + R_2} = \frac{6}{2 + 4} \text{ A} = 1 \text{ A}.$$

Conocido el valor de la corriente, el cálculo de la energía almacenada en las bobinas es directo:

$$U_{L_1} = \frac{1}{2}L_1I_1^2 = \frac{1}{2}1 \text{ H} (1 \text{ A})^2 = 0.5 \text{ J}.$$

$$U_{L_2} = \frac{1}{2}L_2I_1^2 = \frac{1}{2}2 \text{ H} (1 \text{ A})^2 = 1 \text{ J}.$$

Para calcular el valor de la caída de tensión en el condensador, observamos que es igual a la caída de potencial en la resistencia  $R_2$ . Esta caída de potencial puede ser calculada fácilmente mediante un divisor de tensión como vimos en la cuestión 5.10:

$$V_C = V_{R_2} = V \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 6 \text{ V} \frac{4 \text{ k}\Omega}{2 \text{ k}\Omega + 4 \text{ k}\Omega} = 4 \text{ V}.$$

Conocida la caída de potencial en  $C$ , el cálculo de la energía almacenada en el condensador es directo:

$$U_C = \frac{1}{2}CV_C^2 = \frac{1}{2}0.5 \text{ F} (4 \text{ V})^2 = 4 \text{ J}.$$



Las almacenadas en  $L_1$ ,  $L_2$  y  $C$  son  $U_{L_1} = 0.5 \text{ J}$ ,  $U_{L_2} = 1 \text{ J}$  y  $U_C = 4 \text{ J}$ , respectivamente.





- 9.1 Señales Alternas
- 9.2 Componentes pasivos en circuitos AC
- 9.3 Potencia
- 9.4 Fasores. Representación compleja de señales AC
- 9.5 Impedancias
- 9.6 Circuito *RLC*
- 9.7 Transformador
- 9.8 Cuestiones
- 9.9 Problemas

## 9. Circuitos de Corriente Alterna

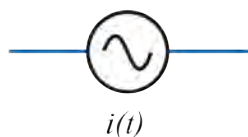
En el Tema 5 definimos los circuitos eléctricos y los tipos que podíamos encontrar en función del movimiento de las cargas en ellos. En dicho tema nos centramos en los circuitos de corriente continua, *DC* donde las cargas se mueven siempre en la misma dirección. En este tema nos centraremos en los circuitos de corriente alterna, *AC*, donde la corriente se caracteriza por una variación periódica tanto en magnitud como en dirección.

### 9.1 Señales Alternas

Hablaremos de **señal alterna** para referirnos tanto a una intensidad de corriente como a un voltaje cuyas magnitud y dirección varían de manera periódica en el tiempo. Aunque existen diferentes tipos de señales alternas (cuadrada, triangular, dientes de sierra o pulso, entre otras), en este tema centraremos nuestro estudio en las **señales alternas sinusoidales**. La forma matemática general de este tipo de señales se expresa de la siguiente manera:

#### Señal alterna de intensidad de corriente sinusoidal, $i(t)$

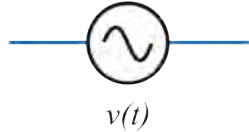
El símbolo y la forma general de una fuente de corriente sinusoidal es:



$$i(t) = I_{max} \sin(\omega t + \phi_i) . \quad (9.1)$$

## Señal alterna de voltaje sinusoidal, $v(t)$

El símbolo y la forma general de una fuente de voltaje sinusoidal es:



$$v(t) = V_{max} \sin(\omega t + \phi_v). \quad (9.2)$$

Una señal alterna queda completamente caracterizada a partir de:

### Amplitud máxima, $V_{max}$ , $I_{max}$

Indica el valor pico o máximo que alcanza la señal.

Alternativamente a la amplitud máxima, en una señal alterna se pueden indicar las siguientes magnitudes:

**Amplitud pico a pico**,  $V_{pp}$ ,  $I_{pp}$ : diferencia entre los valores máximos y mínimos de la señal alterna. Para una señal sinusoidal se cumple que el valor de amplitud pico a pico es el doble de la amplitud máxima:

$$V_{pp} = 2V_{max}, \quad I_{pp} = 2I_{max}. \quad (9.3)$$

**Amplitud eficaz o root mean square (rms)**,  $V_{pp}$ ,  $I_{pp}$ : determina el valor equivalente de una señal alterna que produciría la misma disipación de potencia en una resistencia que una señal continua de ese mismo valor. Para una señal sinusoidal se calcula como:

$$V_{ef} = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}}, \quad I_{ef} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}. \quad (9.4)$$

⚠ Recuerde que magnitudes en mayúscula ( $V$ ,  $I$ ) indican que no existen variación temporal. Por el contrario, cuando las magnitudes se expresan en minúscula ( $v(t)$ ,  $i(t)$ ) indican una dependencia temporal.

### Frecuencia angular, $\omega$

Determina la velocidad con la que la señal oscila. Se mide en radianes por segundo (rad/s).

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}. \quad (9.5)$$

**Frecuencia**,  $f$ : número de ciclos por segundo que completa la señal. Se mide en hercios (Hz).

**Periodo**,  $T$ : tiempo que tarda la señal en completar un ciclo completo o, alternatively, tiempo que tarda la señal en repetirse. Se mide en segundos.

$$T = \frac{1}{f}. \quad (9.6)$$

**Fase**,  $\phi_v$ ,  $\phi_i$

Fase inicial de la señal. Ángulo que determina la posición relativa de la señal alterna en el instante  $t = 0$ .

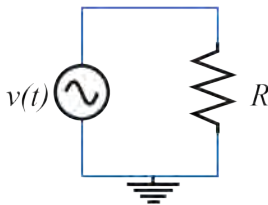
**Desfase entre dos señales**,  $\Delta\phi$ : determina la diferencia de fase entre dos señales alternas de la misma frecuencia o, alternatively, la diferencia angular entre dos ondas en el mismo punto del tiempo.

$$\Delta\phi = \omega\Delta t. \quad (9.7)$$

Diremos que una señal  $a(t)$  está adelantada respecto a otra  $b(t)$  si  $\Delta\phi = \phi_b - \phi_a > 0$ . Por el contrario, diremos que  $a(t)$  está retrasada respecto a  $b(t)$  si  $\Delta\phi = \phi_b - \phi_a < 0$ .

## 9.2 Componentes pasivos en circuitos AC

### 9.2.1 Resistencias en circuitos AC

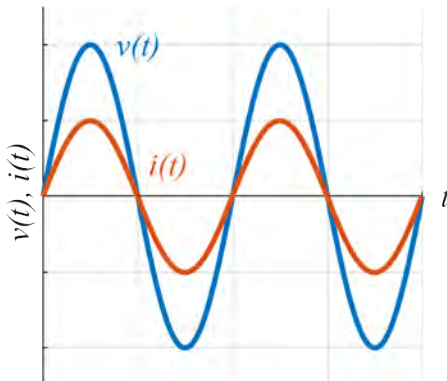


Cuando una resistencia se somete a una tensión alterna

$$v(t) = V_{max} \sin(\omega t + \phi),$$

desarrolla una corriente

$$i(t) = I_{max} \sin(\omega t + \phi).$$

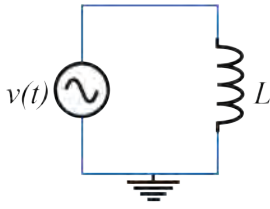


Donde  $I_{max}$  se relaciona con  $V_{max}$  a partir de la siguiente expresión:

$$I_{max} = \frac{V_{max}}{R}. \quad (9.8)$$

Por tanto, podemos concluir que para un voltaje sinusoidal, la caída de potencial en una resistencia y la corriente que la atraviesan están siempre en fase.

### 9.2.2 Inductores en circuitos AC



Cuando un inductor se somete a una tensión alterna

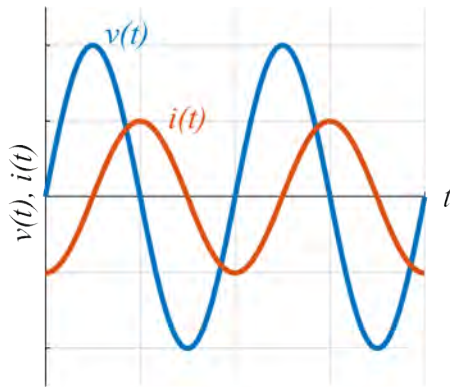
$$v(t) = V_{max} \sin(\omega t + \phi),$$

desarrolla una corriente

$$i(t) = I_{max} \sin(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2}).$$

Donde  $I_{max}$  se relaciona con  $V_{max}$  a partir de la siguiente expresión:

$$I_{max} = \frac{V_{max}}{X_L}. \quad (9.9)$$

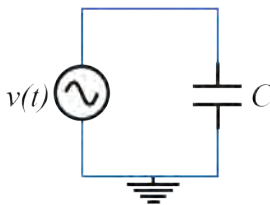


En la ecuación anterior,  $X_L$  recibe el nombre de **reactancia inductiva** y es la magnitud que cuantifica la oposición ofrecida por el inductor al paso de corriente alterna. Su unidad en el SI es el ohmio,  $\Omega$ .

$$X_L = L\omega. \quad (9.10)$$

Podemos concluir que la corriente que atraviesa un inductor tiene un desfase de  $-\pi/2$  con respecto a la caída de potencial que se establece entre sus extremos.

### 9.2.3 Condensadores en circuitos AC



Cuando un condensador se somete a una tensión alterna

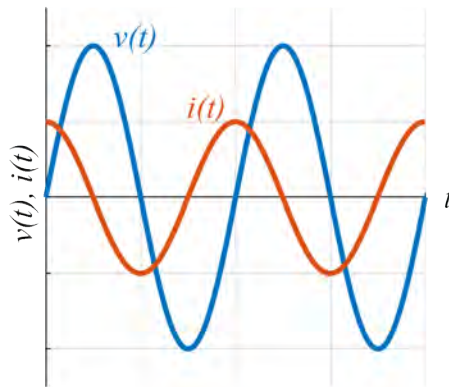
$$v(t) = V_{max} \sin(\omega t + \phi),$$

desarrolla una corriente

$$i(t) = I_{max} \sin(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}).$$

Donde  $I_{max}$  se relaciona con  $V_{max}$  a partir de la siguiente expresión:

$$I_{max} = \frac{V_{max}}{X_C}. \quad (9.11)$$



En la ecuación anterior,  $X_c$  recibe el nombre de **capacitiva** y es la magnitud que cuantifica la oposición ofrecida por el condensador al paso de corriente alterna. Su unidad en el *SI* es el ohmio,  $\Omega$ .

$$X_C = \frac{1}{C\omega}. \quad (9.12)$$

Podemos concluir que la corriente que atraviesa un condensador tiene un desfase de  $\pi/2$  con respecto a la caída de potencial que se establece entre sus extremos.

⚠ Nótese que tanto la reactancia inductiva,  $X_L$ , como la capacitiva,  $X_C$ , dependen de la frecuencia. En concreto,  $X_L$  es directamente proporcional a la frecuencia mientras que  $X_C$  es inversamente proporcional a esta. Como consecuencia un inductor presenta mayor oposición al paso de corriente a frecuencias altas. Por el contrario, un condensador presenta una mayor oposición al paso de corriente a frecuencias bajas. Es por ello que, en función de la frecuencia, podemos ver al inductor y al condensador como:

| Frecuencias | Bajas            | Altas            |
|-------------|------------------|------------------|
| Condensador | Circuito Abierto | Cortocircuito    |
| Inductor    | Cortocircuito    | Circuito abierto |

## 9.3 Potencia

En circuitos de corriente continua, el cálculo de la potencia asociada a un componente venía dada por el producto de la caída de potencial en dicho componente y la corriente que lo atravesaba. En corriente alterna, la potencia se sigue calculando de igual manera, pero en este caso debemos tener en cuenta que tanto caída de potencial como corriente son funciones que depende del tiempo. Es por ello que distinguimos diferentes potencias:

### Potencia instantánea, $p(t)$

Potencia asociada a un componente del circuito en un instante de tiempo específico. Al igual que voltaje y corriente, esta potencia sera una función del tiempo:

$$p(t) = v(t)i(t) = i^2(t)R = \frac{v^2(t)}{R}. \quad (9.13)$$

En las relaciones anteriores, al igual que se hizo en la sección 4.3.

Teniendo en cuenta estas relaciones, es directo demostrar que:

$$P_{max} = V_{max}I_{max} = I_{max}^2 R = \frac{V_{max}^2}{R}. \quad (9.14)$$

### Potencia promedio, $\bar{P}(t)$

Potencia que indica el valor promedio de la potencia instantánea en un periodo completo de la señal alterna. Por tanto, representa la potencia neta que se disipa o genera en el componente del circuito.

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t)dt = \frac{1}{T} \int_0^T v(t)i(t)dt. \quad (9.15)$$

## 9.4 Fasores. Representación compleja de señales AC

El análisis de circuitos AC con combinaciones de resistencias, inductores y condensadores puede ser complejo debido a la presencia de derivadas e integrales temporales en sus ecuaciones. Para facilitar este estudio, recurriremos a una representación de las señales alternas en el dominio de la variable compleja utilizando la notación de fasores.

Para ello utilizamos que cualquier señal alterna sinusoidal  $f(t) = F_{max} \sin(\omega t + \phi)$  puede ser representada como la parte imaginaria del número complejo  $\mathcal{F} = F_{max} e^{j(\omega t + \phi)}$  donde  $j = \sqrt{-1}$  es la unidad imaginaria o compleja. Esta representación compleja  $\mathcal{F}$  se conoce como **fasor** de la señal alterna  $f(t)$ .

La principal ventaja del uso de fasores es que transforman las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento de los circuitos AC en ecuaciones algebraicas. Por ejemplo, la derivada temporal de un fasor equivale a su multiplicación por  $j\omega$ , mientras que su integral equivale a su división por  $j\omega$ .

### Fasor de voltaje, $\mathcal{V}$

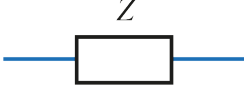
$$\mathcal{V} = V_{max} e^{j(\omega t + \phi_v)} \Rightarrow v(t) = \text{Im}\{\mathcal{V}\} = V_{max} \sin(\omega t + \phi_v). \quad (9.16)$$

### Fasor de corriente, $\mathcal{I}$

$$\mathcal{I} = I_{max} e^{j(\omega t + \phi_i)} \Rightarrow i(t) = \text{Im}\{\mathcal{I}\} = I_{max} \sin(\omega t + \phi_i). \quad (9.17)$$

## 9.5 Impedancias

La **impedancia**,  $\mathcal{Z}$ , de un componente en un circuito  $AC$  se define como la relación fasorial entre el voltaje,  $\mathcal{V}$ , que existe en dicho elemento y la corriente,  $\mathcal{I}$ , que lo atraviesa:



$$\mathcal{Z} = \frac{\mathcal{V}}{\mathcal{I}}. \quad (9.18)$$

Esta ecuación es una generalización de la ley de Ohm en circuitos  $DC$  por lo que la impedancia cuantifica la oposición que un componente circuital presenta al paso de corriente alterna.

La ventaja principal del uso de impedancias es que permiten analizar circuitos  $AC$  de manera análoga a los circuitos  $DC$  de manera que combinaciones de resistencias, condensadores y/o inductores podrán tratarse como impedancias equivalentes. Para ello debemos tener en cuenta que el valor de impedancia para cada tipo es distinto como se muestra en la siguiente tabla:

| Componente       | $\mathcal{Z}$                           |
|------------------|-----------------------------------------|
| Resistencia, $R$ | $\mathcal{Z}_R = R$                     |
| Condensador, $C$ | $\mathcal{Z}_C = \frac{X_C}{j} = -jX_C$ |
| Inductor, $L$    | $\mathcal{Z}_L = jX_L$                  |

Es, por tanto, importante destacar que las impedancias se pueden asociar en combinaciones en serie y paralelo de manera similar a como se hacía con las resistencias en circuitos  $DC$  para obtener una impedancia equivalente:

### Impedancias en serie

Dos o más **impedancias** están en **serie** si por ellas pasa la misma corriente. En esta situación, podemos afirmar que en una asociación de  $n$  impedancias en serie, la impedancia equivalente es igual a la suma de las impedancias individuales.

$$\mathcal{Z}_{eq} = \sum_i^n \mathcal{Z}_i. \quad (9.19)$$

### Impedancias en paralelo

Dos o más **impedancias** están en **paralelo** si entre sus extremos se establece la misma caída de potencial. En esta situación, podemos afirmar que en una asociación de  $n$  impedancias en paralelo, el inverso de la impedancia equivalente es igual a la suma de los inversos de las impedancias individuales.

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \sum_i^n \frac{1}{Z_i}. \quad (9.20)$$

## 9.6 Circuito *RLC*

## 9.7 Transformador

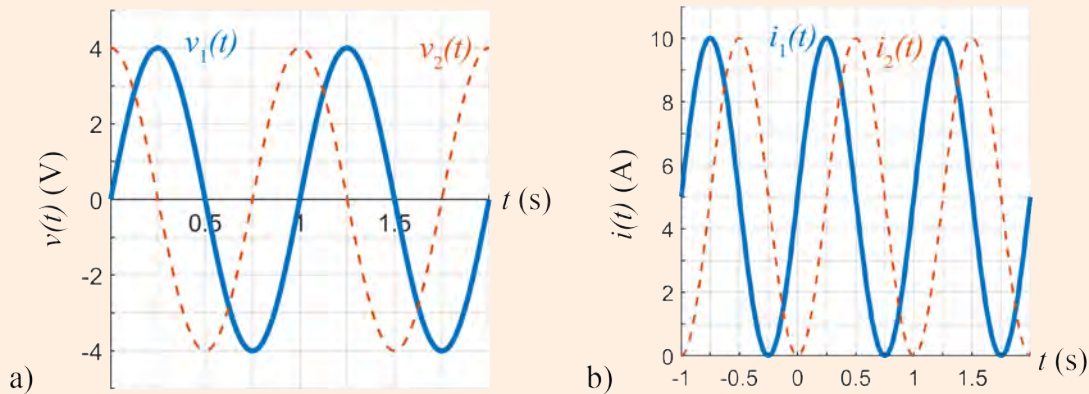
Un transformador es un dispositivo capaz de cambiar la amplitud de señales alternas.

$$V_s = \frac{N_s}{N_p} V_p. \quad (9.21)$$

## 9.8 Cuestiones

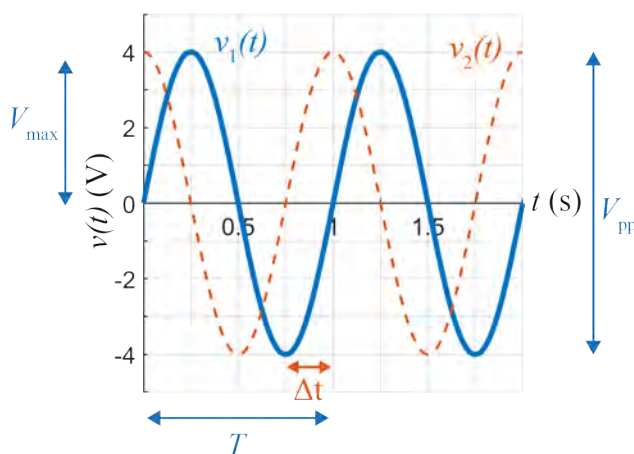
### Señales Alternas

**Cuestión 9.1 — Caracterización de señales alternas.** En la figura se muestran señales alternas de a) voltaje ( $v(t)$ ) y b) corriente ( $i(t)$ ). En cada gráfica se presentan dos señales, una con fase inicial cero (línea continua azul) y otra desfasada respecto a la primera (línea discontinua naranja). Para cada señal determine: amplitud máxima, amplitud pico a pico, período, frecuencia y desfase (en radianes) entre las señales tomando como referencia la señal con fase cero. Indique también para cada caso la fórmula general que la describe cada señal en función del tiempo.



*Solución:*

a) Señales de voltaje



Amplitud máx.:  $V_{max} = 4 \text{ V}$ .

Amplitud pp:  $V_{pp} = 8 \text{ V}$ .

Periodo:  $T = 1 \text{ s}$ .

Frec.:  $f = 1/T = 1 \text{ Hz}$ .

Frec. ang.:  $\omega = 2\pi f = 2\pi \text{ rad/s}$ .

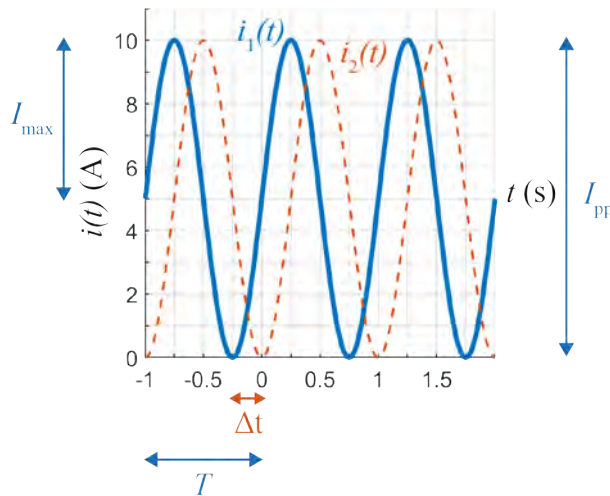
Desfase  $v_1(t) - v_2(t)$ :

$$\Delta\phi = \Delta t\omega = (t_1 - t_2)\omega = (1 - 0.75 \text{ s}) 2\pi \text{ rad/s} = \frac{1}{4} 2\pi \text{ rad} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}.$$

Forma general:

$$v_1(t) = 4 \text{ V} \sin(2\pi \text{ rad/s } t), \quad v_2(t) = 4 \text{ V} \sin\left(2\pi \text{ rad/s } t + \frac{\pi}{2}\right).$$

b) Señales de corriente



Amplitud máx.:  $V_{max} = 5 \text{ V}$ .

Amplitud pp:  $V_{pp} = 10 \text{ V}$ .

Periodo:  $T = 1 \text{ s}$ .

Frec.:  $f = 1/T = 1 \text{ Hz}$ .

Frec. ang.:  $\omega = 2\pi f = 2\pi \text{ rad/s}$ .

Desfase  $v_1(t) - v_2(t)$ :

$$\Delta\phi = \Delta t\omega = (t_1 - t_2)\omega = (-0.75 - 0 \text{ s}) 2\pi \text{ rad/s} = -\frac{1}{4} 2\pi \text{ rad} = -\frac{\pi}{2} \text{ rad}.$$

Forma general:

$$i_1(t) = 5 \text{ V} \sin(2\pi \text{ rad/s } t), \quad i_2(t) = 5 \text{ V} \sin\left(2\pi \text{ rad/s } t - \frac{\pi}{2}\right).$$

**Sol** En la figura a) tenemos dos señales alternas de voltaje que vienen dadas por:

$$v_1(t) = 4 \text{ V} \sin(2\pi \text{ rad/s } t), \quad v_2(t) = 4 \text{ V} \sin\left(2\pi \text{ rad/s } t + \frac{\pi}{2}\right).$$

En la figura b) tenemos dos señales alternas de corriente que vienen dadas por:

$$i_1(t) = 5 \text{ V} \sin(2\pi \text{ rad/s } t), \quad i_2(t) = 5 \text{ V} \sin\left(2\pi \text{ rad/s } t - \frac{\pi}{2}\right).$$

**Cuestión 9.2 — Valor eficaz onda cuadrada.** De forma general el valor eficaz (o rms) de cualquier señal alterna  $f(t)$  con periodo  $T$  se define como

$$F_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2 dt}.$$

Determine el valor eficaz de las siguientes ondas cuadradas:

$$\text{a) } v(t) = \begin{cases} A & \text{si } 0 < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{T}{2} < t < T. \end{cases} \quad \text{b) } v(t) = \begin{cases} A & \text{si } 0 < t < \frac{T}{2} \\ -A & \text{si } \frac{T}{2} < t < T. \end{cases}$$

*Solución:*

Calculamos el valor eficaz de la señal  $v(t)$  a partir de la definición que se muestra en el enunciado:

$$V_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt}.$$

Veamos el valor eficaz en cada caso:

a)

$$V_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} v^2(t) dt + \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T v^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} A^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} A^2 \frac{T}{2}} = \frac{A}{\sqrt{2}}.$$

b)

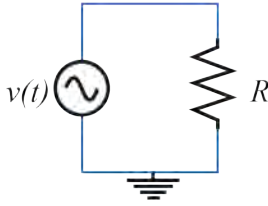
$$\begin{aligned} V_{ef} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} v^2(t) dt + \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T v^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} A^2 dt + \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T (-A)^2 dt} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{T} A^2 \frac{T}{2} + \frac{1}{T} A^2 \left(T - \frac{T}{2}\right)} = \sqrt{2 \frac{1}{T} A^2 \frac{T}{2}} = A. \end{aligned}$$

**Sol** El valor eficaz de la señal cuadrada de amplitud  $A$  (valor máximo  $A$  y mínimo 0) es  $V_{ef} = \frac{A}{\sqrt{2}}$ . El valor eficaz de la señal cuadrada de amplitud  $2A$  (valor máximo  $A$  y mínimo  $-A$ ) es  $V_{ef} = A$ .

## Componentes pasivos en circuitos AC

**Cuestión 9.3 — Resistencias en AC.** Demuestre que la corriente eléctrica y la tensión en una resistencia en AC están en fase. Además, indique la equivalencia  $V_{max} - I_{max}$  en este caso.

**Sol**



Supongamos un circuito formado por una resistencia  $R$  a la que se le aplica entre sus extremos un voltaje alterno de valor:

$$v(t) = V_{max} \sin(\omega t).$$

Aplicando la segunda regla de Kirchhoff en este circuito tenemos:

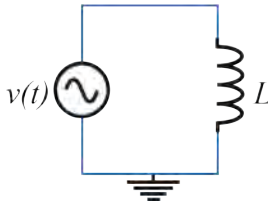
$$v(t) - i(t)R = 0 \quad \Rightarrow \quad i(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{V_{max}}{R} \sin(\omega t) = I_{max} \sin(\omega t).$$

En la ecuación anterior podemos ver que el desfase entre  $v(t)$  e  $i(t)$  es nulo y, por tanto, voltaje y corriente están en fase en una resistencia en AC. Además en dicha ecuación podemos apreciar que la equivalencia  $V_{max} - I_{max}$  es:

$$V_{max} = I_{max}R.$$

**Cuestión 9.4 — Inductores en AC.** Demuestre que la corriente eléctrica tiene un desfase de  $-\pi/2$  con respecto a la tensión en un inductor en AC están en fase. Además, indique la equivalencia  $V_{max} - I_{max}$  en este caso.

**Sol**



Supongamos un circuito formado por un inductor  $L$  al que se le aplica entre sus extremos un voltaje alterno de valor:

$$v(t) = V_{max} \sin(\omega t).$$

Aplicando la segunda regla de Kirchhoff en este circuito tenemos:

$$v(t) - L \frac{di(t)}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{di(t)}{dt} = \frac{v(t)}{L} \quad \Rightarrow \quad di(t) = \frac{V_{max}}{L} \sin(\omega t) dt.$$

Integrando en el tiempo en ambos lados de la igualdad<sup>1</sup>:

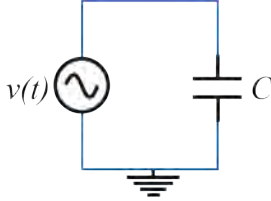
$$i(t) = -\frac{V_{max}}{L\omega} \cos(\omega t) = \frac{V_{max}}{L\omega} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) = \frac{V_{max}}{X_L} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) = I_{max} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}).$$

En la ecuación anterior podemos ver que la corriente eléctrica tiene un desfase de  $-\pi/2$  con respecto a la tensión en un inductor en AC. Además en dicha ecuación podemos apreciar que la equivalencia  $V_{max} - I_{max}$  es:

$$V_{max} = I_{max} X_L = I_{max} L\omega.$$

**Cuestión 9.5 — Condensadores en AC.** Demuestre que la corriente eléctrica tiene un desfase de  $\pi/2$  con respecto a la tensión en un condensador en AC están en fase. Además, indique la equivalencia  $V_{max} - I_{max}$  en este caso.

**Sol**



Supongamos un circuito formado por un condensador  $C$  al que se le aplica entre sus extremos un voltaje alterno de valor:

$$v(t) = V_{max} \sin(\omega t).$$

Aplicando la segunda regla de Kirchhoff en este circuito tenemos:

$$v(t) - \frac{q(t)}{C} = 0 \quad \Rightarrow \quad q(t) = Cv(t) = CV_{max} \sin(\omega T) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (CV_{max} \sin(\omega T)).$$

Derivando respecto al tiempo en ambos lados de la igualdad<sup>2</sup>:

$$i(t) = V_{max} C\omega \cos(\omega t) = V_{max} C\omega \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \frac{V_{max}}{X_C} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = I_{max} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}).$$

<sup>1</sup>En la expresión que sigue se utiliza la igualdad trigonométrica  $\cos a = -\sin(a - \frac{\pi}{2})$

<sup>2</sup>En la expresión que sigue se utiliza la igualdad trigonométrica  $\cos a = \sin(a + \frac{\pi}{2})$

En la ecuación anterior podemos ver que la corriente eléctrica tiene un desfase de  $\pi/2$  con respecto a la tensión en un condensador en AC. Además en dicha ecuación podemos apreciar que la equivalencia  $V_{max} - I_{max}$  es:

$$V_{max} = I_{max}X_C = \frac{I_{max}}{C\omega}.$$

## Potencia

**Cuestión 9.6 — Potencia promedio  $R$  en AC.** a) A partir de las relaciones de voltaje y corriente alternas en una resistencia vistas en la sección 9.2.1, demuestre que la potencia promedio en una resistencia bajo AC es

$$\bar{P} = \frac{V_{max}I_{max}}{2}.$$

b) A partir de la expresión demostrada en el apartado anterior, demuestre que

$$\bar{P} = I_{ef}^2 R.$$

c) Demuestre que para una resistencia en AC

$$P_{max} = 2\bar{P}.$$



a) Ya hemos visto en la sección 9.2.1 que en una resistencia bajo una tensión alterna, la caída de potencial y la corriente están en fase:

$$v(t) = V_{max} \sin(\omega t), \quad i(t) = I_{max} \sin(\omega t).$$

La potencia promedio en una resistencia se puede calcular a partir de estas relaciones y de la ecuación (9.15):

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T v(t)i(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T V_{max}I_{max} \sin^2(\omega t) dt = \\ &= \frac{1}{T} V_{max}I_{max} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt = \frac{1}{T} V_{max}I_{max} \left[ \frac{t}{2} - \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega} \right]_0^T = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} V_{max} I_{max} \left[ \frac{T}{2} - \frac{\sin(2\omega T)}{4\omega} - 0 - \frac{\sin(2\omega 0)}{4\omega} \right] = \frac{1}{T} V_{max} I_{max} \left[ \frac{T}{2} - \frac{\sin(2\frac{2\pi}{T} T)}{4\omega} \right] = \\
&= \frac{1}{T} V_{max} I_{max} \left[ \frac{T}{2} - \frac{\sin(4\pi)}{4\omega} \right] = \frac{V_{max} I_{max}}{2} \Rightarrow \bar{P} = \frac{V_{max} I_{max}}{2} \quad \square.
\end{aligned}$$

En la resolución de la potencia promedio anterior se ha calculado la integral anterior sabiendo que:

$$\int \sin^2(ax) dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a}.$$

Y se ha tenido en cuenta que  $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ .

b) En la sección 9.2.1 vimos que la relación  $V_{max} - I_{max}$  para una resistencia en AC es:

$$V_{max} = I_{max} R. \quad (9.C.1)$$

Sustituyendo este valor en la demostración de la potencia promedio del apartado anterior:

$$\bar{P} = \frac{V_{max} I_{max}}{2} = \bar{P} = \frac{I_{max}^2 R}{2}.$$

Y, teniendo en cuenta la relación entre corriente máxima y corriente eficaz, ecuación (9.4):

$$\bar{P} = \frac{I_{max}^2 R}{2} = \frac{2I_{ef}^2 R}{2} = I_{ef}^2 R \quad \square.$$

c) Usando la relación entre la potencia promedio y la corriente máxima del apartado anterior y la ecuación (9.14), podemos ver que:

$$\bar{P} = \frac{I_{max}^2 R}{2} = \frac{P_{max}}{2} \Rightarrow P_{max} = 2\bar{P}. \quad \square$$

**Cuestión 9.7 — Potencia promedio C y L en AC.** a) A partir de las relaciones de voltaje y corriente alternas en un condensador vistas en la sección 9.2.3, demuestre que la potencia promedio en un condensador bajo AC es nula,  $\bar{P}_C = 0$ .

b) A partir de las relaciones de voltaje y corriente alternas en un inductor vistas en la sección 9.2.2, demuestre que la potencia promedio en un inductor bajo  $AC$  es nula,  $\bar{P}_L = 0$ .



a) Ya hemos visto en la sección 9.2.2 que en un inductor bajo una tensión alterna, la caída de potencial y la corriente tienen un desfase de  $-\pi/2$ :

$$v(t) = V_{max} \sin(\omega t), \quad i(t) = I_{max} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}).$$

La potencia promedio en un inductor se puede calcular a partir de estas relaciones y de la ecuación (9.15):

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) i(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T V_{max} I_{max} \sin(\omega t) \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) dt = \\ &= \frac{1}{T} V_{max} I_{max} \int_0^T \sin(\omega t) (-\cos(\omega t)) dt = -\frac{1}{T} V_{max} I_{max} \int_0^T \frac{\sin(2\omega t)}{2} dt = \\ &= -\frac{1}{T} V_{max} I_{max} \left[ -\frac{\cos(2\omega t)}{4\omega} \right]_0^T = \frac{1}{T} V_{max} I_{max} \left[ \frac{\cos(2\omega T)}{4\omega} - \frac{\cos(2\omega 0)}{4\omega} \right] = \\ &= \frac{1}{T} V_{max} I_{max} \left[ \frac{\cos(2\frac{\pi}{T} T)}{4\omega} - 1 \right] = \frac{1}{T} V_{max} I_{max} [1 - 1] = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{P}_L = 0. \quad \square \end{aligned}$$

En la resolución de la potencia promedio anterior se ha calculado usando las siguientes relaciones trigonométricas:

$$\sin\left(ax - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(ax), \quad \sin(ax) \cos(ax) = \frac{\sin(2ax)}{2}.$$

Y se ha tenido en cuenta que  $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ .

b) Ya hemos visto en la sección 9.2.3 que en un condensador bajo una tensión alterna, la caída de potencial y la corriente tienen un desfase de  $\pi/2$ :

$$v(t) = V_{max} \sin(\omega t), \quad i(t) = I_{max} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}).$$

La potencia promedio en un condensador se puede calcular a partir de estas relaciones y de la ecuación (9.15):

$$\begin{aligned}
 \bar{P} &= \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) i(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T V_{max} I_{max} \sin(\omega t) \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) dt = \\
 &= \frac{1}{T} V_{max} I_{max} \int_0^T \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt = \frac{1}{T} V_{max} I_{max} \int_0^T \frac{\sin(2\omega t)}{2} dt = \\
 &= \frac{1}{T} V_{max} I_{max} \left[ -\frac{\cos(2\omega t)}{4\omega} \right]_0^T = -\frac{1}{T} V_{max} I_{max} \left[ \frac{\cos(2\omega T)}{4\omega} - \frac{\cos(2\omega 0)}{4\omega} \right] = \\
 &= -\frac{1}{T} V_{max} I_{max} \left[ \frac{\cos(2\frac{2\pi}{T}T)}{4\omega} - 1 \right] = -\frac{1}{T} V_{max} I_{max} [1 - 1] = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{P}_C = 0. \quad \square
 \end{aligned}$$

En la resolución de la potencia promedio anterior se ha calculado usando las siguientes relaciones trigonométricas:

$$\sin\left(ax + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(ax), \quad \sin(ax) \cos(ax) = \frac{\sin(2ax)}{2}.$$

Y se ha tenido en cuenta que  $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ .

## Fasores. Representación compleja de señales

**Cuestión 9.8 — Relación fasor-senal alterna.** a) Demuestre que la parte imaginaria del fasor  $\mathcal{F} = F_{max} e^{j\omega t}$  puede interpretarse como la señal alterna  $f(t)$ .

b) Demuestre que derivar temporalmente un fasor es equivalente a multiplicar el fasor por  $j\omega$ .

c) Demuestre que integrar en el tiempo un fasor es equivalente a dividir el fasor por  $j\omega$ .

**Sol**

a) Supongamos un fasor  $\mathcal{F} = F_{max} e^{j\omega t}$ . Su parte imaginaria se calcula como:

$$\text{Im}\{\mathcal{F}\} = \text{Im}\{F_{max} e^{j(\omega t + \phi)}\} = \text{Im}\{F_{max} (\cos(\omega t + \phi) + j \sin(\omega t + \phi))\} =$$

$$= F_{max} \sin(\omega t + \phi) = f(t) \quad \square.$$

b) Derivamos en el tiempo el fasor  $\mathcal{F}$ :

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \frac{dF_{max}e^{j\omega t}}{dt} = j\omega F_{max}e^{j\omega t} = j\omega\mathcal{F}. \quad \square$$

b) Integramos en el tiempo el fasor  $\mathcal{F}$ :

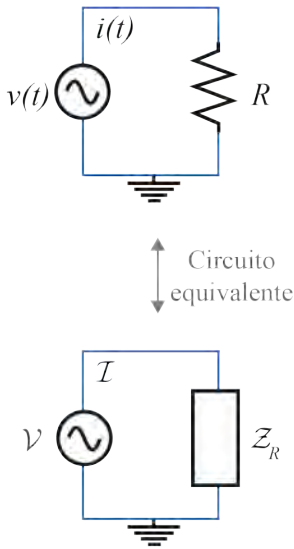
$$\int \mathcal{F} dt = \int F_{max}e^{j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega} F_{max}e^{j\omega t} = \frac{1}{j\omega} \mathcal{F}. \quad \square$$

## Impedancias

**Cuestión 9.9 — Impedancia de  $R$ ,  $C$  y  $L$ .** Usando las relaciones de tensión y corriente obtenidas en la sección 9.2 para resistencias, condensadores e inductores, obtenga la impedancia de cada componente.

*Solución:*

### (I) Resistencia



Sabemos que una resistencia en un circuito  $AC$  tiene un voltaje y una corriente:

$$v(t) = V_{max} \sin(\omega t + \phi), \quad i(t) = I_{max} \sin(\omega t + \phi).$$

Para hallar la impedancia de  $R$ , pasamos a notación fasorial el voltaje y la corriente en  $R$ :

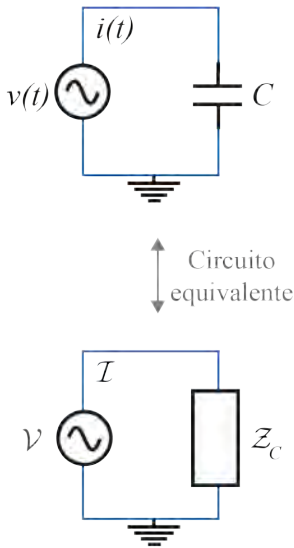
$$\mathcal{V} = V_{max}e^{j\omega t + \phi}, \quad \mathcal{I} = I_{max}e^{j(\omega t + \phi)}.$$

Calculamos la impedancia como el cociente entre los fasores  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{I}$ :

$$Z_R = \frac{\mathcal{V}}{\mathcal{I}} = \frac{V_{max}e^{j(\omega t + \phi)}}{I_{max}e^{j(\omega t + \phi)}} = \frac{V_{max}}{I_{max}} = R.$$

En la última expresión se ha usado la relación entre  $V_{max}$  —  $I_{max}$  de la ecuación (9.8).

### (II) Condensador



Sabemos que un condensador en un circuito  $AC$  tiene un voltaje y una corriente:

$$v(t) = V_{max} \sin(\omega t + \phi), \quad i(t) = I_{max} \sin(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}).$$

Para hallar la impedancia de  $C$ , pasamos a notación fasorial el voltaje y la corriente en  $C$ :

$$\mathcal{V} = V_{max} e^{j\omega t + \phi}, \quad \mathcal{I} = I_{max} e^{j(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2})}.$$

Calculamos la impedancia como el cociente entre los fasores  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{I}$ :

$$\mathcal{Z}_C = \frac{\mathcal{V}}{\mathcal{I}} = \frac{V_{max} e^{j(\omega t + \phi)}}{I_{max} e^{j(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2})}} = \frac{V_{max}}{I_{max}} e^{-j\frac{\pi}{2}} = -jX_C.$$

En la última expresión se ha empleado la definición de exponencial compleja:

$$e^{-j\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} - j \sin \frac{\pi}{2} = -j.$$

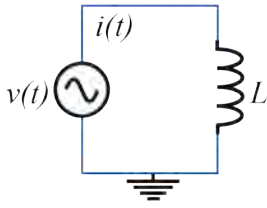
Además, se ha usado que la relación entre  $V_{max} - I_{max}$  vista en la ecuación (9.11) que define la reactancia capacitiva:

$$I_{max} = \frac{V_{max}}{X_C} = V_{max} C \omega.$$

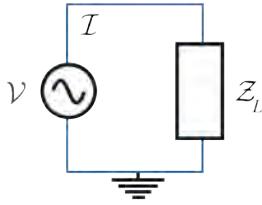
Por tanto, la impedancia de un inductor es:

$$\mathcal{Z}_C = -jX_C = -j \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{jC\omega}.$$

### (III) Inductor



↕  
Circuito  
equivalente



Sabemos que un inductor en un circuito  $AC$  tiene un voltaje y una corriente:

$$v(t) = V_{max} \sin(\omega t + \phi), \quad i(t) = I_{max} \sin(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2}).$$

Para hallar la impedancia de  $L$ , pasamos a notación fasorial el voltaje y la corriente en  $L$ :

$$\mathcal{V} = V_{max} e^{j(\omega t + \phi)}, \quad \mathcal{I} = I_{max} e^{j(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2})}.$$

Calculamos la impedancia como el cociente entre los fasores  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{I}$ :

$$\mathcal{Z}_L = \frac{\mathcal{V}}{\mathcal{I}} = \frac{V_{max} e^{j(\omega t + \phi)}}{I_{max} e^{j(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2})}} = \frac{V_{max}}{I_{max}} e^{j\frac{\pi}{2}} = jX_L.$$

En la última expresión se ha empleado la definición de exponencial compleja:

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} = j.$$

Además, se ha usado que la relación entre  $V_{max} - I_{max}$  vista en la ecuación (9.9) que define la reactancia inductiva:

$$I_{max} = \frac{V_{max}}{X_L} = \frac{V_{max}}{L\omega}.$$

Por tanto, la impedancia de un inductor es:

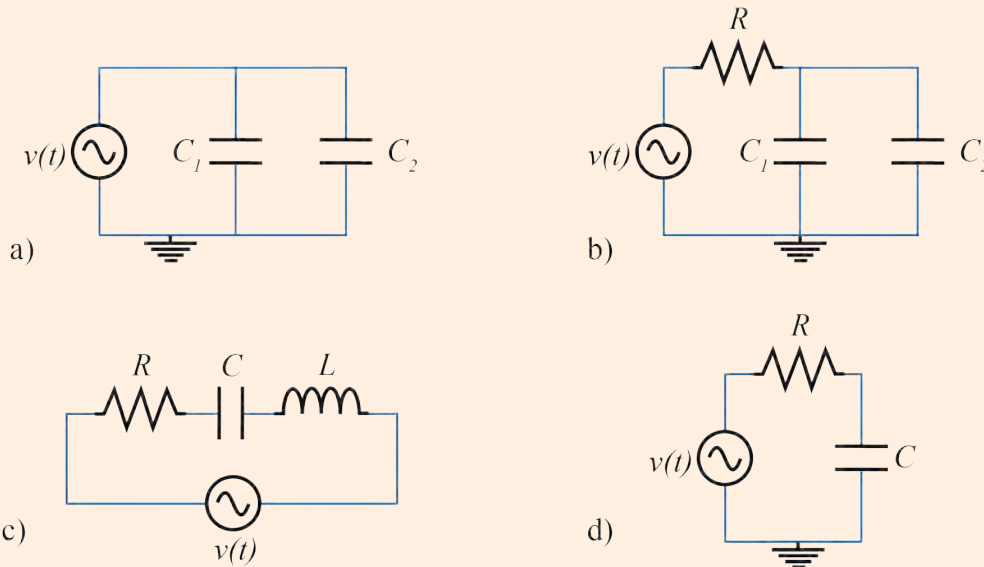
$$\mathcal{Z} = jX_L = jL\omega.$$

**Sol** El valor de impedancia de resistencias, condensadores e inductores se muestra en la siguiente tabla:

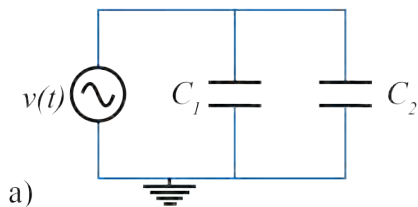
| Componente       | $Z$                           |
|------------------|-------------------------------|
| Resistencia, $R$ | $Z_R = R$                     |
| Condensador, $C$ | $Z_C = \frac{X_C}{j} = -jX_C$ |
| Inductor, $L$    | $Z_L = jX_L$                  |

**Cuestión 9.10 — Impedancia equivalente.** Obtenga la impedancia equivalente de los siguientes circuitos. Además, determine el valor del voltaje  $v_{ab}(t)$  en el circuito d).

*Nota: Expresé los resultados en función de  $R$ ,  $C$  y  $L$ .*



*Solución:*

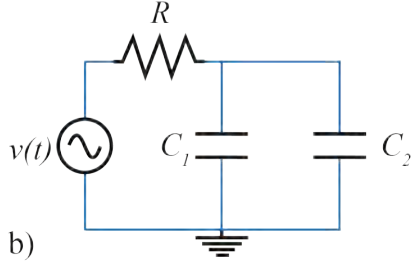


En el circuito a) tenemos dos condensadores en paralelo. Sabiendo que la impedancia de un condensador es  $Z_C = -jX_C$ , la impedancia equivalente del circuito es:

$$Z_a = \frac{Z_{C1} Z_{C2}}{Z_{C1} + Z_{C2}} = \frac{(-jX_{C1})(-jX_{C2})}{-jX_{C1} - jX_{C2}} = \frac{X_{C1} X_{C2}}{j(X_{C1} + X_{C2})} = -j \frac{X_{C1} X_{C2}}{X_{C1} + X_{C2}}$$

Desarrollando las reactancias capacitivas, la impedancia equivalente queda:

$$Z_a = -j \frac{\frac{1}{\omega C_1} \frac{1}{\omega C_2}}{\frac{1}{\omega C_1} + \frac{1}{\omega C_2}} = -j \frac{\frac{1}{\omega C_1 \omega C_2}}{\frac{\omega C_1 + \omega C_2}{\omega C_1 \omega C_2}} = -j \frac{1}{\omega(C_1 + C_2)}.$$

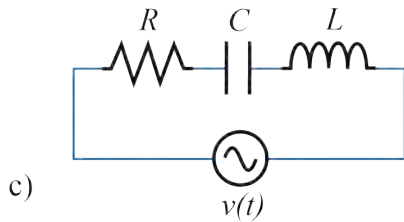


En el circuito b) tenemos dos condensadores en paralelo. Del apartado a) sabemos que la impedancia equivalente de dos condensadores en paralelo es:

$$Z_{C\parallel} = -j \frac{1}{\omega(C_1 + C_2)}.$$

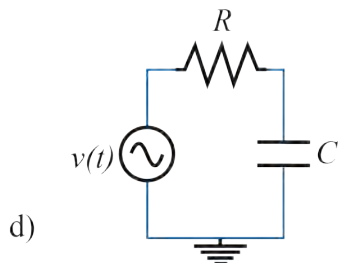
A continuación nos una combinación de dos impedancias en serie. Esta combinación está formada por la impedancia de dos condensadores previamente obtenida y la impedancia de una resistencia, que sabemos que equivale a  $Z_R = R$ . Por tanto, la impedancia equivalente es:

$$Z_b = Z_R + Z_{C\parallel} = R - j \frac{1}{\omega(C_1 + C_2)}.$$



El circuito c) es un  $RLC$  con tres componentes en serie. Sabiendo que la impedancia de un inductor es  $Z_L = jX_L$  y las impedancias de  $R$  y  $C$  ya utilizadas en los circuitos anteriores, la impedancia equivalente del circuito es:

$$Z_c = Z_R + Z_C + Z_L = R + j(X_L - X_C) = R + j \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right).$$



El circuito d) es un  $RC$  con dos componentes en serie. Sabiendo las impedancias de  $R$  y  $C$  ya utilizadas en los circuitos anteriores, la impedancia equivalente del circuito es:

$$\mathcal{Z}_d = \mathcal{Z}_R + \mathcal{Z}_C = R - jX_C = R - j\frac{1}{C\omega}.$$

**Sol**

Las impedancias equivalentes de cada circuitos son

$$\mathcal{Z}_a = -j\frac{1}{\omega(C_1 + C_2)}, \quad \mathcal{Z}_b = R - j\frac{1}{\omega(C_1 + C_2)},$$

$$\mathcal{Z}_c = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right), \quad \mathcal{Z}_d = \mathcal{Z}_R + \mathcal{Z}_C = R - jX_C = R - j\frac{1}{C\omega}.$$

## Circuito *RLC*

**Cuestión 9.11 — Frecuencia de resonancia en un circuito *RLC*.** Demuestre que en un circuito *RLC* serie la frecuencia de resonancia no depende de la resistencia del circuito.

**Sol**

a) En un circuito *RLC* la frecuencia de resonancia se define como aquella resonancia a la cual la corriente eficaz del circuito es máxima. Dicha corriente eficaz puede calcularse como:

$$I_{ef} = \frac{V_{ef}}{|\mathcal{Z}|} = \frac{V_{ef}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}.$$

En la expresión anterior se ha utilizado el valor de impedancia equivalente del circuito *RLC* que vimos en el apartado c de la cuestión 9.10.

El valor de corriente eficaz será máximo cuando el denominador sea mínimo, es decir, cuando el módulo de la impedancia del circuito *RLC* es mínimo. Eso ocurre cuando las reactancias inductiva y capacitiva son iguales. Por tanto, el valor de la frecuencia de resonancia,  $f_0$ , se da cuando  $X_L = X_C$ :

$$X_L = X_C \Rightarrow L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad \square$$

Como vemos en la expresión anterior, el valor de la frecuencia de resonancia no depende del valor de la resistencia.

## Transformador

**Cuestión 9.12 — Relación de corrientes en un transformador.** Partiendo del principio de conservación de la energía y suponiendo que las bobinas de un transformador ideal no tienen resistencia, ¿cómo se relacionan las corrientes en el devanado primario y en el secundario del transformador?

*Solución:*

Sabemos que en un transformador la relación entre tensión en el devanado primario y secundario es:

$$V_s = \frac{N_s}{N_p} V_p \quad \Rightarrow \quad \frac{V_s}{V_p} = \frac{N_s}{N_p}.$$

Partiendo del principio de conservación de la energía y asumiendo el transformador ideal, la potencia en el devanado primario del transformador debe ser igual a la potencia en su devanado secundario.

$$P_p = P_s \quad \Rightarrow \quad V_p I_p = V_s I_s \quad \Rightarrow \quad \frac{V_s}{V_p} = \frac{I_p}{I_s}.$$

Juntando las dos expresiones anteriores obtenemos cómo se relacionan las corrientes en el devanado primario y en el secundario de un transformador:

$$\frac{V_s}{V_p} = \frac{N_s}{N_p} = \frac{I_p}{I_s} \quad \Rightarrow \quad I_s = I_p \frac{N_p}{N_s}.$$

**Sol** Las corrientes en el devanado primario y secundario de un transformador se relacionan a partir de la expresión es:

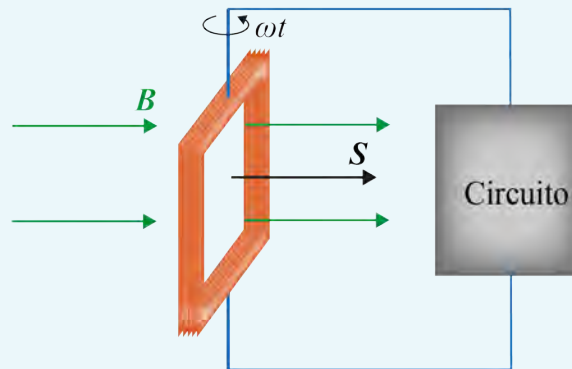
$$I_s = I_p \frac{N_p}{N_s}.$$

## 9.9 Problemas

### Señales Alternas

**Problema 9.1 — Alternador.** Un alternador es un dispositivo capaz de generar señales alternas que consta de una bobina (solenoides) de sección cuadrada  $S$  con  $N$  vueltas que gira con una frecuencia angular  $\omega$  bajo un campo magnético  $B$  uniforme y perpendicular al eje de giro de la bobina. Para esta situación:

- Deduzca la expresión para el voltaje inducido en la bobina en función del tiempo. Obtenga el valor máximo del voltaje inducido por el alternador.
- Sabiendo que el alternador produce una tensión  $v(t) = 100 \text{ V} \sin(\omega t)$ . Calcule la corriente eficaz que atraviesa la resistencia si este se conecta a una resistencia de  $1 \text{ k}\Omega$ .



*Solución:*

#### (I) Análisis del problema

Un alternador es un dispositivo que genera señales alternas a partir de la inducción de una *fem* que es provocada mediante la rotación de las espiras que se encuentran en un campo magnético uniforme y perpendicular al eje de rotación. Por tanto, la *fem* inducida se provoca por una variación temporal del flujo magnético que es debida a la variación entre el ángulo que forman el vector campo magnético,  $\mathbf{B}$ , y el vector superficie de la espira,  $\mathbf{S}$ . Este ángulo coincide con el ángulo de rotación de la espira,  $\omega t$ .

#### (II) Resolución del problema

- El flujo magnético a través de las  $N$  espiras que forman la bobina se calcula a partir de la ecuación (7.8):

$$\Phi_B = N\mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = NBS \cos(\omega t).$$

Y, la *fem* inducida mediante la ley de Faraday (ecuación (8.1)):

$$\mathcal{E} = v(t) = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -NBS\frac{d}{dt}(\cos(\omega t)) = NBS\omega \sin(\omega t).$$

Identificando la expresión obtenida con la forma general para señales alternas de voltaje dada en la ecuación (9.2), observamos que la amplitud o voltaje máximo coincide con:

$$V_{max} = NBS\omega.$$

Por tanto, la expresión para el voltaje en función del tiempo es:

$$v(t) = V_{max} \sin(\omega t) = NBS\omega \sin(\omega t).$$

b) El alternador produce una tensión:

$$v(t) = V_{max} \sin(\omega t) = 100 \text{ V} \sin(\omega t).$$

Por tanto, el voltaje máximo es  $V_{max} = 100 \text{ V}$ . Sabiendo que el alternador se conecta a una resistencia de valor  $1 \text{ k}\Omega$ , podemos hallar la corriente máxima que atraviesa la resistencia aplicando la ley de Ohm (ecuación (4.3)):

$$I_{max} = \frac{V_{max}}{R} = \frac{100 \text{ V}}{1 \text{ k}\Omega} = 100 \text{ mA}.$$

Conocida la corriente máxima, calculamos la corriente eficaz aplicando la ecuación (9.4):

$$I_{ef} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{100 \text{ mA}}{\sqrt{2}} = 70.7 \text{ mA}.$$

**Sol** El alternador que produce una tensión  $v(t) = 100 \text{ V} \sin(\omega t)$  cuando se conecta a la resistencia de  $1 \text{ k}\Omega$  genera una corriente eficaz en la resistencia de  $70.7 \text{ mA}$ .

## Componentes pasivos en circuitos AC

**Problema 9.2 — Resistencia en AC.** Suponga una resistencia de  $10 \Omega$  conectada a una fuente AC de voltaje máximo  $50 \text{ V}$ . Para la resistencia, determine:

a) La corriente eficaz,

- b) La potencia promedio,
- c) La potencia máxima.

*Solución:*

a) Podemos calcular la corriente eficaz relacionando las corrientes máximas y eficaz mediante la ecuación (9.4) y, a continuación, relacionando el voltaje máximo con la corriente máxima a partir de la ecuación (9.8):

$$I_{ef} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{V_{max}}{R\sqrt{2}} = \frac{50 \text{ V}}{10 \Omega \sqrt{2}} = 3.5 \text{ A}.$$

b) Podemos calcular la potencia promedio en la resistencia a partir de la expresión encontrada en el apartado b) de la cuestión 9.6:

$$\bar{P} = I_{ef}^2 R = (3.5 \text{ A})^2 10 \Omega = 125 \text{ W}.$$

c) Calculamos la potencia máxima en la resistencia a partir de la expresión encontrada en el apartado c) de la cuestión 9.6:

$$P_{max} = 2\bar{P} = 2 \cdot 125 \text{ W} = 250 \text{ W}.$$

**Sol** La resistencia bajo el voltaje AC tiene una corriente eficaz  $I_{ef} = 3.5 \text{ A}$ , una potencia promedio  $\bar{P} = 125 \text{ W}$  y una potencia máxima  $P_{max} = 250 \text{ W}$ .

**Problema 9.3 — Inductores en AC.** Suponga un inductor de 20 mH conectado a una fuente AC de voltaje max 40 V y frecuencia 100 Hz.

- a) Determine la reactancia inductiva del inductor,
- b) Determine la corriente eficaz en inductor,
- c) Indique qué cambios debe realizar en la configuración del dispositivo si desea disminuir la corriente eficaz sin modificar el inductor ni el voltaje máximo al que se trabaja.

*Solución:*

a) Podemos calcular la reactancia inductiva a partir de la ecuación (9.10):

$$X_L = L\omega = L2\pi f = 20 \cdot 10^{-3} \text{ H} 2\pi 100 \text{ Hz} = 4\pi \Omega = 12.6 \Omega.$$

b) Podemos calcular la corriente eficaz relacionando las corrientes máximas y eficaz mediante la ecuación (9.4) y, a continuación, relacionando el voltaje máximo con la corriente máxima a partir de la ecuación (9.9):

$$I_{ef} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{V_{max}}{X_L \sqrt{2}} = \frac{40 \text{ V}}{12.6 \Omega \sqrt{2}} = 2.2 \text{ A}.$$

c) Sin cambiar la resistencia ni la tensión máxima del circuito, podemos disminuir la corriente eficaz teniendo en cuenta que la reactancia inductiva es directamente proporcional a la frecuencia. Ya que la reactancia inductiva es una medida de oposición del inductor al paso de corriente, a mayor valor de reactancia inductiva, menor será la corriente en el dispositivo. Por tanto, a medida que aumentamos la frecuencia estaremos disminuyendo la corriente eficaz.

**Sol** El inductor bajo el voltaje  $AC$  tiene una reactancia inductiva  $X_L = 12.6 \Omega$  y una corriente eficaz  $I_{ef} = 2.2 \text{ A}$ . Si queremos disminuir la corriente eficaz sin modificar la resistencia ni el voltaje máximo, necesitamos aumentar la frecuencia de trabajo del generador  $AC$ .

**Problema 9.4 — Condensadores en AC.** Suponga un condensador de  $10 \mu\text{F}$  conectado a una fuente  $AC$  de voltaje eficaz  $60 \text{ V}$  y frecuencia  $50 \text{ Hz}$ .

- Determine la reactancia capacitiva del condensador,
- Determine la corriente máxima en el condensador,
- Indique cómo afectará a la corriente máxima si triplicamos la frecuencia de trabajo del generador  $AC$ .

*Solución:*

a) Podemos calcular la reactancia capacitiva a partir de la ecuación (9.12):

$$X_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{C2\pi f} = \frac{1}{10 \cdot 10^{-6} \text{ C} 2\pi 50 \text{ Hz}} = \frac{10^4}{\pi} \Omega = 3183.1 \Omega = 3.2 \text{ k}\Omega.$$

b) Podemos calcular la corriente máxima relacionando el voltaje máximo con la corriente máxima a partir de la ecuación (9.9) y, a continuación, relacionando los voltajes máximos y eficaz mediante la ecuación (9.4):

$$I_{max} = \frac{V_{max}}{X_C} = \frac{V_{ef}\sqrt{2}}{X_C} = \frac{60 \text{ V}\sqrt{2}}{3183.1 \Omega} = 0.027 \text{ A} = 27 \text{ mA}.$$

c) Triplicar la frecuencia implica disminuir en un factor tres la corriente máxima como vemos a continuación:

$$I'_{max} = \frac{V_{max}}{X'_C} = \frac{V_{max}}{C2\pi f'} = \frac{V_{max}}{C2\pi 3f} = \frac{V_{max}}{3X_C} = \frac{1}{3}I_{max}.$$

**Sol** El condensador bajo el voltaje  $AC$  tiene una reactancia capacitiva  $X_C = 3.2 \text{ k}\Omega$  y una corriente máxima  $I_{max} = 27 \text{ mA}$ . Triplicar la frecuencia implica disminuir en un factor tres la corriente máxima.

**Problema 9.5 — Componentes en circuitos AC.** La caída de potencial entre los extremos de un componente en un circuito electrónico y la corriente que lo atraviesa son  $v(t) = 10 \sin(10t + \pi/3) \text{ V}$  y  $i(t) = 100 \sin(10t + 5\pi/6) \text{ A}$ . ¿De qué elemento se trata? Determine el valor de su magnitud característica.

*Solución:*

Para descubrir el componente electrónico veamos el desfase existente entre corriente y voltaje. Para ello tengamos en cuenta que la fase de la corriente es  $\phi_i = \frac{5\pi}{6}$  y la del voltaje es  $\phi_v = \frac{\pi}{3}$ . Por tanto, el desfase es:

$$\Delta\phi = \phi_i - \phi_v = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}.$$

Como vimos en la sección 9.2 un desfase de  $\frac{\pi}{2}$  entre corriente y voltaje se da en condensadores.

La magnitud característica del condensador (capacidad) la obtenemos a partir de la reactancia capacitiva. Para ello tengamos en cuenta que la corriente máxima es  $I_{max} = 100 \text{ A}$ , el voltaje máximo es  $V_{max} = 10 \text{ V}$  y la frecuencia angular  $\omega = 10 \text{ rad/s}$ .

$$X_C = \frac{V_{max}}{I_{max}} = \frac{10}{100} \Omega = \frac{1}{10} \Omega.$$

A partir de la reactancia inductiva, el cálculo de la capacidad es directo:

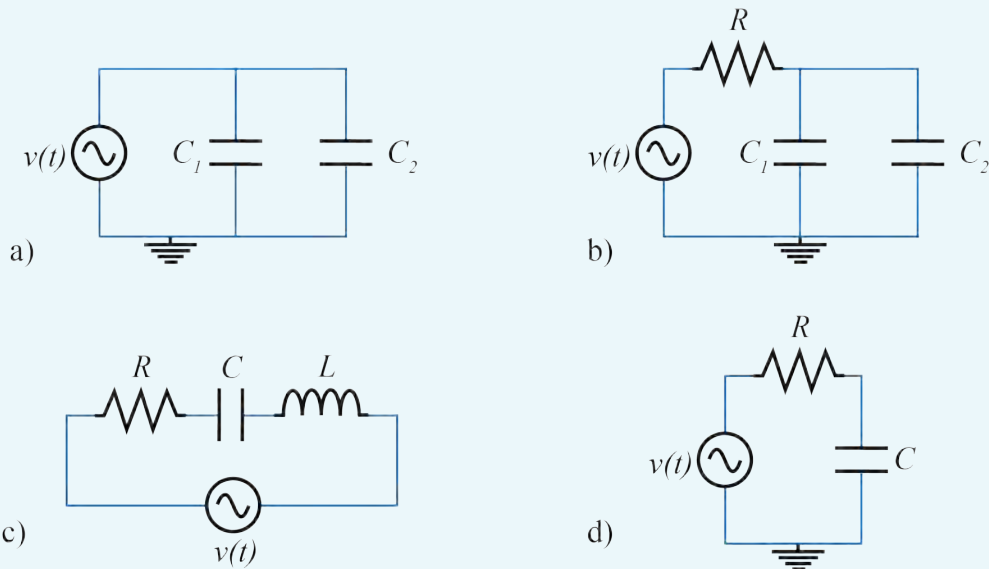
$$X_C = \frac{1}{C\omega} \Rightarrow C = \frac{1}{X_C\omega} = \frac{1}{\frac{1}{10}10} \text{ F} = 1 \text{ F}.$$

**Sol** El componente electrónico es un condensador ya que el desfase entre corriente y voltaje es  $\frac{\pi}{2}$ . La capacidad del condensador es  $C = 1 \text{ F}$ .

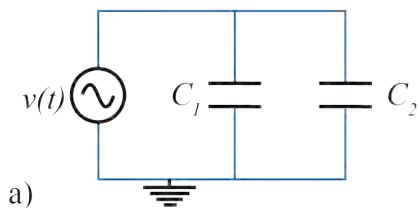
## Impedancias

**Problema 9.6 — Corriente  $i(t)$  en circuitos AC.** Para los circuitos de la cuestión 9.10, determine:

- Las corrientes  $i(t)$  que circulan por  $C_1$  y  $C_2$  si  $v(t) = 5 \sin 200t$  V y  $C_1 = C_2 = 0.5 \cdot 10^{-2}$  F.
- La corriente  $i(t)$  que circula por la impedancia equivalente del circuito si  $v(t) = 6 \sin 200t$  V,  $R = 6 \Omega$  y  $C_1 = C_2 = 0.25 \cdot 10^{-2}$  F.
- La corriente que circula por  $R$ ,  $C$  y  $L$  si  $v(t) = 10 \sin 200t$  V,  $R = 10 \Omega$ ,  $C = 0.5 \cdot 10^{-2}$  F y  $L = 0.5 \cdot 10^{-2}$  H.
- La corriente que circula por  $R$ , y  $C$  si  $v(t) = 4 \sin 200t$  V,  $R = 2 \Omega$ ,  $C = 0.25 \cdot 10^{-2}$  F.



*Solución:*



Teniendo en cuenta que la fuente de tensión tiene un voltaje  $v(t) = V_{max} \sin(\omega t) = 5 \sin 200t$  V y  $C_1 = C_2 = 0.5 \cdot 10^{-2}$  F, el fasor de voltaje correspondiente será:

$$\mathcal{V} = V_{max} e^{j\omega t}.$$

En el circuito a) tenemos dos condensadores en paralelo. Por tanto, la caída de tensión en ambos condensadores es la misma,  $\mathcal{V}$ . Podemos calcular la corriente por cada uno de ellos, aplicando la ley de Ohm de impedancias como sigue:

$$\mathcal{I}_{C_1} = \frac{\mathcal{V}}{\mathcal{Z}_{C_1}} = \frac{V_{max} e^{j\omega t}}{|\mathcal{Z}_{C_1}| e^{j\phi_{\mathcal{Z}_{C_1}}}} = \frac{V_{max}}{|\mathcal{Z}_{C_1}|} e^{j(\omega t - \phi_{\mathcal{Z}_{C_1}})}.$$

Calculamos la corriente  $i(t)$  en  $C_1$  calculando la parte imaginaria de  $\mathcal{I}_{C_1}$ :

$$i_{C_1}(t) = \text{Im}\{\mathcal{I}_{C_1}\} = \frac{V_{max}}{|\mathcal{Z}_{C_1}|} \sin(\omega t - \phi_{\mathcal{Z}_{C_1}}) = \frac{5 \text{ V}}{1 \Omega} \sin(200t - \frac{\pi}{2}) = 5 \sin(200t - \frac{\pi}{2}) \text{ A}.$$

La corriente  $i(t)$  en  $C_2$  será igual al estar los condensadores en paralelo y tener igual valor de capacidad:

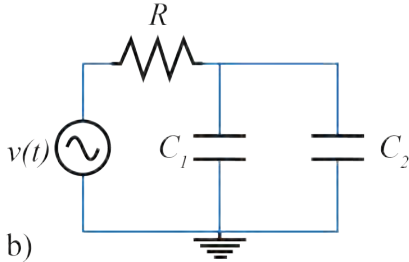
$$i_{C_2}(t) = i_{C_1}(t) = 5 \sin(200t - \frac{\pi}{2}) \text{ A}.$$

En el cálculo de los fasores de corriente anteriores se ha utilizado que la impedancia de cada condensador es:

$$\mathcal{Z}_{C_1} = j \frac{1}{\omega C_1} = j \frac{1}{200(0.5 \cdot 10^{-2})} \Omega = j \Omega \Rightarrow \begin{cases} |\mathcal{Z}_{C_1}| = \frac{1}{\omega C_1} = 1 \Omega, \\ \phi_{\mathcal{Z}_{C_1}} = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

La impedancia de  $C_2$  coincide con la de  $C_1$  ya que ambos tienen igual valor:

$$\mathcal{Z}_{C_2} = j \frac{1}{\omega C_2} = j \frac{1}{200(0.5 \cdot 10^{-2})} \Omega = j \Omega \Rightarrow \begin{cases} |\mathcal{Z}_{C_2}| = \frac{1}{\omega C_2} = 1 \Omega, \\ \phi_{\mathcal{Z}_{C_2}} = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$



En el circuito b) tenemos dos condensadores en paralelo que están en serie con una resistencia. En el apartado b) de la cuestión 9.10 vimos que la impedancia equivalente en este caso era:

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_R + \mathcal{Z}_{C_{\parallel}} = R - j \frac{1}{\omega(C_1 + C_2)} = 6 - j \frac{1}{200(0.25 \cdot 10^{-2} + 0.25 \cdot 10^{-2})} \Omega = 6 - j \Omega.$$

Por tanto, el módulo de la impedancia es:

$$|\mathcal{Z}| = \sqrt{R^2 + \left( \frac{1}{\omega(C_1 + C_2)} \right)^2} = \sqrt{6^2 + 1^2} = 6.1 \, \Omega.$$

Para calcular la fase del número tengamos en cuenta que la impedancia se encuentra en el cuarto cuadrante del plano complejo (parte real positiva e imaginaria negativa). Por tanto, la fase se puede calcular como  $2\pi - \arctan \frac{\text{Im}\{\mathcal{Z}\}}{\text{Re}\{\mathcal{Z}\}}$ :

$$\phi = 2\pi - \arctan \frac{1}{6} = 6.1 \, \text{rad}.$$

Si la fuente tiene un voltaje  $v(t) = V_{\max} \sin(\omega t) = 6 \sin 200t \, \text{V}$ , el fasor de voltaje correspondiente será:

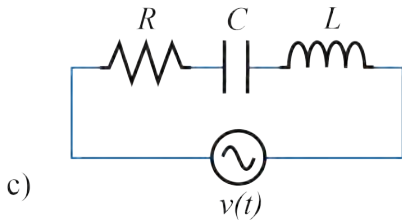
$$\mathcal{V} = V_{\max} e^{j\omega t}.$$

Calculamos el fasor de corriente en la impedancia equivalente aplicando la ley de Ohm:

$$\mathcal{I} = \frac{\mathcal{V}}{\mathcal{Z}} = \frac{V_{\max} e^{j\omega t}}{|\mathcal{Z}| e^{j\phi}} = \frac{V_{\max}}{|\mathcal{Z}|} e^{j(\omega t - \phi)}.$$

Calculamos la corriente  $i(t)$  en  $C_1$  calculando la parte imaginaria de  $\mathcal{I}_{C_1}$ :

$$i(t) = \text{Im}\{\mathcal{I}\} = \frac{V_{\max}}{|\mathcal{Z}|} \sin(\omega t - \phi_{\mathcal{Z}}) = \frac{5 \, \text{V}}{6.1 \, \Omega} \sin(200t - 6.1) = 0.8 \sin(200t - 6.1) \, \text{A}.$$



El circuito c) es un  $RLC$  con tres componentes en serie. La impedancia equivalente del circuito la calculamos en el apartado c) de la cuestión 9.10:

$$\mathcal{Z}_c = R + j \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) = 10 + j \left( 0.5 \cdot 10^{-2} 200 - \frac{1}{0.5 \cdot 10^{-2} 200} \right) \, \Omega = 10 \, \Omega.$$

Por tanto, el módulo de la impedancia es:

$$|\mathcal{Z}| = \sqrt{R^2 + \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2} = 10 \, \Omega.$$

Al tratarse de un número complejo que solo tiene parte real, la fase de la impedancia es nula:

$$\phi = 0.$$

Si la fuente tiene un voltaje  $v(t) = V_{max} \sin(\omega t) = 10 \sin 200t$  V, el fasor de voltaje correspondiente será:

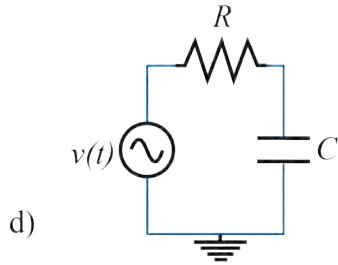
$$\mathcal{V} = V_{max} e^{j\omega t}.$$

Calculamos el fasor de corriente en la impedancia equivalente aplicando la ley de Ohm:

$$\mathcal{I} = \frac{\mathcal{V}}{\mathcal{Z}} = \frac{V_{max} e^{j\omega t}}{|\mathcal{Z}|} = \frac{V_{max}}{|\mathcal{Z}|} e^{j(\omega t)}.$$

Calculamos la corriente  $i(t)$  en  $C_1$  calculando la parte imaginaria de  $\mathcal{I}_{C_1}$ :

$$i(t) = \text{Im}\{\mathcal{I}\} = \frac{V_{max}}{|\mathcal{Z}|} \sin(\omega t) = \frac{10 \text{ V}}{10 \Omega} \sin(200t) = \sin(200t) \text{ A}.$$



El circuito d) es un  $RC$  con dos componentes en serie. La impedancia equivalente del circuito la calculamos en el apartado d) de la cuestión 9.10:

$$\mathcal{Z}_d = R - j \frac{1}{C\omega} = 2 - j \frac{1}{200(0.25 \cdot 10^{-2})} \Omega = 2 - 2j.$$

Por tanto, el módulo de la impedancia es:

$$|\mathcal{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2.8 \Omega.$$

Para calcular la fase del número tengamos en cuenta que la impedancia se encuentra en el cuarto cuadrante del plano complejo (parte real positiva e imaginaria negativa). Por tanto, la fase se puede calcular como  $2\pi - \arctan \frac{\text{Im}\{\mathcal{Z}\}}{\text{Re}\{\mathcal{Z}\}}$ :

$$\phi = 2\pi - \arctan \frac{2}{2} = 2\pi - \frac{\pi}{4} \text{ rad} = \frac{7\pi}{4} \text{ rad}.$$

Si la fuente tiene un voltaje  $v(t) = V_{max} \sin(\omega t) = 4 \sin 200t \text{ V}$ , el fasor de voltaje correspondiente será:

$$\mathcal{V} = V_{max} e^{j\omega t}.$$

Calculamos el fasor de corriente en la impedancia equivalente aplicando la ley de Ohm:

$$\mathcal{I} = \frac{\mathcal{V}}{\mathcal{Z}} = \frac{V_{max} e^{j\omega t}}{|\mathcal{Z}| e^{j\phi}} = \frac{V_{max}}{|\mathcal{Z}|} e^{j(\omega t - \phi)}.$$

Calculamos la corriente  $i(t)$  en  $C_1$  calculando la parte imaginaria de  $\mathcal{I}_{C_1}$ :

$$i(t) = \text{Im}\{\mathcal{I}\} = \frac{V_{max}}{|\mathcal{Z}|} \sin(\omega t - \phi_Z) = \frac{4 \text{ V}}{2.8 \Omega} \sin\left(200t - \frac{7\pi}{4}\right) = 1.4 \sin\left(200t - \frac{7\pi}{4}\right) \text{ A}.$$



Corrientes en el circuito a:

$$i_{C_1}(t) = i_{C_2}(t) = 5 \sin\left(200t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ A}.$$

Corriente por la impedancia equivalente del circuito b:

$$i(t) = 0.8 \sin(200t - 6.1) \text{ A}.$$

Corriente en el circuito c:

$$i(t) = \sin(200t) \text{ A}.$$

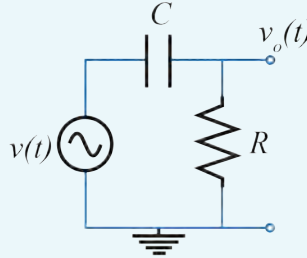
Corriente en el circuito d:

$$i(t) = 1.4 \sin\left(200t - \frac{7\pi}{4}\right) \text{ A}.$$

**Problema 9.7 — Filtro RC.** Dado el circuito de la figura, llamamos frecuencia de corte  $f_c = \frac{1}{2\pi CR}$ . Si la señal de entrada es  $v(t) = V_{max} \sin(\omega t)$

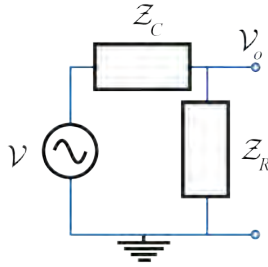
- Calcule el valor máximo del voltaje de salida,  $v_0$ .
- Estudie el comportamiento de  $v_0$  para frecuencias mucho menores que  $f_c$ .

- c) Estudie el comportamiento de  $v_o$  para  $f = f_c$ .  
 d) Estudie el comportamiento de  $v_o$  frecuencias mucho mayores que  $f_c$ .  
 e) ¿Lo usaría como un filtro paso bajo o paso alto? ¿Por qué?



*Solución:*

a)



Para calcular el valor  $v_o(t)$ , primero pasamos a trabajar con impedancias y fasores. Para ello tengamos en cuenta que el fasor de voltaje en el circuito  $RC$  es:

$$\mathcal{V} = V_{max} e^{j\omega t}.$$

El valor de  $\mathcal{V}_o$  se puede calcular a partir de un divisor de tensión de impedancias.

$$\mathcal{V}_o = \mathcal{V} \frac{Z_R}{Z_C + Z_R}.$$

El objetivo es calcular el valor máximo del voltaje de salida,  $V_{o,max}$ , por tanto, es suficiente con trabajar con el módulo de los fasores anteriores:

$$\begin{aligned} V_{o,max} = |\mathcal{V}_o| &= |\mathcal{V}| \frac{|Z_R|}{|Z_C + Z_R|} = V_{max} \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{(C\omega)^2}\right)}} = V_{max} \frac{\frac{R}{R}}{\sqrt{\frac{R^2}{R^2} + \left(\frac{1}{(RC\omega)^2}\right)}} = \\ &= V_{max} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)}} = V_{max} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_c^2}{f^2}\right)}}. \end{aligned}$$

El valor del voltaje de salida máximo se ha expresado en función de la frecuencia de

corte con el objetivo de realizar a continuación un estudio en función de la frecuencia. Para ello se ha tenido en cuenta que:

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC} \Rightarrow \omega_c = \frac{1}{RC} \Rightarrow RC = \frac{1}{\omega_c}.$$

b) Estudio a frecuencias bajas.

$$f \ll f_c \Rightarrow \frac{f_c}{f} \ll 1 \Rightarrow \sqrt{1 + \frac{f_c^2}{f^2}} \approx \frac{f_c}{f} \Rightarrow V_{o,max} \approx V_{i,max} \frac{f}{f_c} \approx 0.$$

c) Estudio a la frecuencia de corte.

$$f = f_c \Rightarrow V_{o,max} \approx V_{i,max} \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{V_{i,max}}{\sqrt{2}}.$$

d) Estudio a frecuencias altas.

$$f \gg f_c \Rightarrow \frac{f_c}{f} \approx 0 \Rightarrow V_{o,max} \approx V_{i,max} \frac{1}{\sqrt{1}} = V_{i,max}.$$

e) Se trata de un filtro paso alto ya que se atenúan las frecuencias bajas.

Añadir figura paso alto.

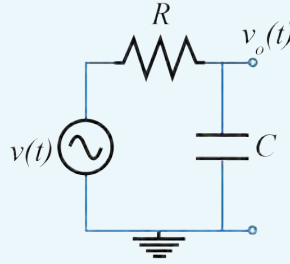
**Sol** En un filtro paso alto el valor de voltaje máximo es

$$V_{o,max} = V_{max} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_c^2}{f^2}\right)}}. \quad V_{o,max} \approx \begin{cases} 0 & \text{si } f \ll f_c, \\ \frac{V_{max}}{\sqrt{2}} & \text{si } f = f_c, \\ V_{max} & \text{si } f \gg f_c. \end{cases}$$

**Problema 9.8 — Filtro RC.** Dado el circuito de la figura, llamamos frecuencia de corte  $f_c = \frac{1}{2\pi CR}$ . Si la señal de entrada es  $v(t) = V_{max} \sin(\omega t)$ .

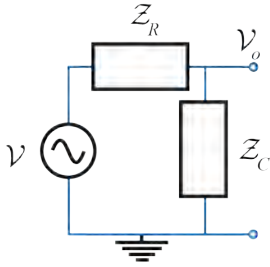
- Calcule el valor máximo del voltaje de salida,  $v_0$ .
- Estudie el comportamiento de  $v_0$  para frecuencias mucho menores que  $f_c$ .
- Estudie el comportamiento de  $v_0$  para  $f = f_c$ .
- Estudie el comportamiento de  $v_0$  para frecuencias mucho mayores que  $f_c$ .

e) ¿Lo usaría como un filtro paso bajo o paso alto? ¿Por qué?



*Solución:*

a)



Para calcular el valor  $v_o(t)$ , primero pasamos a trabajar con impedancias y fasores. Para ello tengamos en cuenta que el fasor de voltaje en el circuito  $RC$  es:

$$\mathcal{V} = V_{max} e^{j\omega t}.$$

El valor de  $\mathcal{V}_o$  se puede calcular a partir de un divisor de tensión de impedancias.

$$\mathcal{V}_o = \mathcal{V} \frac{Z_C}{Z_C + Z_R}.$$

El objetivo es calcular el valor máximo del voltaje de salida,  $V_{o,max}$ , por tanto, es suficiente con trabajar con el módulo de los fasores anteriores:

$$\begin{aligned} V_{o,max} = |\mathcal{V}_o| &= |\mathcal{V}| \frac{|Z_C|}{|Z_C + Z_R|} = V_{max} \frac{\frac{1}{C\omega}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{(C\omega)^2}\right)}} = V_{max} \frac{\frac{C\omega}{C\omega}}{\sqrt{(RC\omega)^2 + \left(\frac{(C\omega)^2}{(C\omega)^2}\right)}} = \\ &= V_{max} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}} = V_{max} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{f^2}{f_c^2}}}. \end{aligned}$$

El valor del voltaje de salida máximo se ha expresado en función de la frecuencia de corte con el objetivo de realizar a continuación un estudio en función de la frecuencia. Para ello se ha tenido en cuenta que:

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC} \Rightarrow \omega_c = \frac{1}{RC} \Rightarrow RC = \frac{1}{\omega_c}.$$

b) Estudio a frecuencias bajas.

$$f \ll f_c \Rightarrow \frac{f}{f_c} \approx 0 \Rightarrow V_{o,max} \approx V_{i,max} \frac{1}{\sqrt{1}} = V_{i,max}.$$

c) Estudio a la frecuencia de corte.

$$f = f_c \Rightarrow V_{o,max} \approx V_{i,max} \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{V_{i,max}}{\sqrt{2}}.$$

d) Estudio a frecuencias altas.

$$f \gg f_c \Rightarrow \frac{f}{f_c} \gg 1 \Rightarrow \sqrt{1 + \frac{f^2}{f_c^2}} \approx \frac{f}{f_c} \Rightarrow V_{o,max} \approx V_{i,max} \frac{f_c}{f} \approx 0.$$

e) Se trata de un filtro paso bajo ya que se atenúan las frecuencias altas.

Añadir figura paso alto.

**Sol** En un filtro paso alto el valor de voltaje máximo es

$$V_{o,max} = V_{max} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f^2}{f_c^2}\right)}}. \quad V_{o,max} \approx \begin{cases} V_{max} & \text{si } f \ll f_c, \\ \frac{V_{max}}{\sqrt{2}} & \text{si } f = f_c, \\ 0 & \text{si } f \gg f_c. \end{cases}$$

## Transformador

**Problema 9.9 — Transformador.** Imagine que una batería de 12 V se conecta al primario (que tiene 1000 vueltas) de un transformador. ¿Cuánto es el voltaje en el secundario (que tiene 100 vueltas) una vez alcanzado el equilibrio?

*Solución:*

Sea un transformador con un voltaje  $V_P = 12$  V y número de vueltas  $N_p = 1000$  en el devanado primario. Sabiendo que en el devanado secundario tiene  $N_s = 100$  vueltas, podemos determinar el voltaje en dicho devanado mediante la ecuación (9.21):

$$V_s = \frac{N_s}{N_p} V_p = \frac{100}{1000} 12 \text{ V} = 1.2 \text{ V}.$$

**Sol** El voltaje en el devanado secundario es 1.2 V.

**Problema 9.10 — Carga de un ordenador portátil.** La red eléctrica doméstica proporciona tensiones alternas de amplitud eficaz 230 V. Para realizar la carga de un ordenador portátil se requiere una tensión de 19 V. Para adaptar la alta tensión de la red doméstica a la que se requiere para cargar el portátil, el adaptador de corriente del ordenador posee en su interior un transformador con un devanado primario de 1150 vueltas. ¿Cuántas vueltas se requieren en el devanado secundario para obtener un voltaje de 19 V?

*Solución:* Sea un transformador con un voltaje  $V_{P,ef} = 230$  V y número de vueltas  $N_p = 1150$  en el devanado primario. Sabiendo que en el devanado secundario tiene un voltaje  $V_{s,ef} = 19$  V, podemos determinar el número de vueltas dicho devanado mediante la ecuación (9.21):

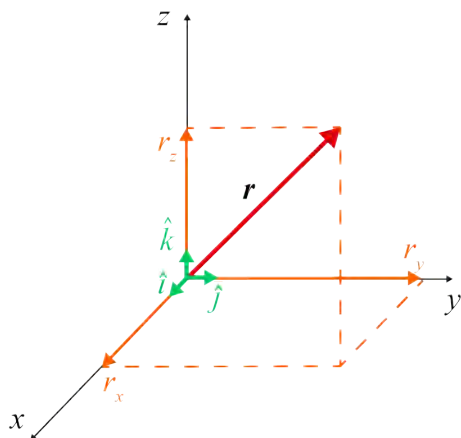
$$V_s = \frac{N_s}{N_p} V_p \quad \Rightarrow \quad N_s = \frac{V_s}{V_p} N_p = \frac{19}{230} 1150 = 95 \text{ vueltas.}$$

**Sol** El número de vueltas en el devanado primario es 95.



# Repaso matemático

## Calculo vectorial



Un vector  $\mathbf{r}$ , gráficamente representado por una flecha, es una cantidad matemática que se caracteriza por tener:

- *Dirección.* Orientación del vector en el espacio. Gráficamente representa la recta continua e infinita sobre la que se plantea el vector.
- *Sentido.* Lugar hacia el cual se dirige el vector a lo largo de la dirección. Se representa mediante la punta de la flecha que representa el vector.
- *Módulo o magnitud.* Tamaño del vector. Longitud entre el punto inicial y final del vector. Se representa mediante  $r$ .

$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}.$$

Los vectores se utilizan para representar fenómenos físicos con magnitud y dirección como el desplazamiento, la velocidad, la fuerza, el campo eléctrico, el campo magnético entre otros.

Matemáticamente un vector se representa de la siguiente forma:

$$\mathbf{r} = r_x \hat{i} + r_y \hat{j} + r_z \hat{k} \equiv (r_x, r_y, r_z)$$

Se define como vector unitario aquel vector cuyo módulo es igual a la unidad. Se emplea para señalar dirección y sentido de un vector.

$$\hat{r} = \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

## Operaciones con vectores

Sean dos vectores  $\mathbf{r}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^3$  tales que  $\mathbf{r} = r_x \hat{i} + r_y \hat{j} + r_z \hat{k}$  y  $\mathbf{s} = s_x \hat{i} + s_y \hat{j} + s_z \hat{k}$  y un escalar  $a \in \mathbb{R}$  se definen las siguientes operaciones con vectores:

### Suma y Resta de vectores

$$\mathbf{r} \pm \mathbf{s} = (r_x \pm s_x) \hat{i} + (r_y \pm s_y) \hat{j} + (r_z \pm s_z) \hat{k} \rightarrow \mathbf{r} \pm \mathbf{s} \in \mathbb{R}^3.$$

### Producto de un escalar por un vector

$$a \cdot \mathbf{r} = a(r_x \hat{i} + ar_y \hat{j} + ar_z) \hat{k} \rightarrow a\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3.$$

### Producto escalar de dos vectores

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = r_x s_x + r_y s_y + r_z s_z = rs \cos(\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{s}}) \rightarrow \mathbf{r} \cdot \mathbf{s} \in \mathbb{R}.$$

### Producto vectorial de dos vectores

$$\mathbf{r} \times \mathbf{s} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ s_x & s_y & s_z \end{vmatrix} = (r_y s_z - r_z s_y) \hat{i} + (r_z s_x - r_x s_z) \hat{j} + (r_x s_y - r_y s_x) \hat{k}$$

$$\rightarrow \mathbf{r} \times \mathbf{s} \in \mathbb{R}^3.$$

## Trigonometría

$$\cos a = -\sin\left(a - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos a = \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin(ax) \cos(ax) = \frac{\sin(2ax)}{2}$$

## Variable compleja

Exponencial compleja:

$$e^{j\phi} = \cos \phi + j \sin \phi.$$

$$e^{-j\phi} = \cos \phi - j \sin \phi.$$

# Formulario de ecuaciones

## 1. Campo Eléctrico

- Cuantización de la carga:

$$q = Ze \quad (1.1)$$

- Ley de Coulomb (Magnitud):

$$|\mathbf{F}_{12}| = F_{12} = k \frac{|q_1||q_2|}{r^2} \quad (1.2)$$

- Relación  $k - \varepsilon_0$ :

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \quad (1.3)$$

- Ley de Coulomb:

$$\mathbf{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^3} \mathbf{r}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{12} \quad (1.4)$$

- Campo eléctrico:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q} \quad (1.6)$$

- Campo eléctrico dist. de carga:

$$\mathbf{E} = \int_C k \frac{dq}{r^2} \hat{r} \quad (1.9)$$

- Distribución volumétrica:

$$dq = \rho dV \quad (1.10)$$

- Distribución superficial:

$$dq = \sigma dS \quad (1.12)$$

- Distribución lineal:

$$dq = \lambda dL \quad (1.14)$$

## 2. Ley de Gauss

- Flujo eléctrico:

$$\Phi_E = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.1)$$

- Ley de Gauss:

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \quad (2.3)$$

## 3. Potencial Eléctrico

- Trabajo fuerza eléctrica:

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (3.1)$$

- Diferencia de energía potencial:

$$\Delta U = -q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (3.2)$$

- Diferencia de potencial:

$$\Delta V = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (3.3)$$

- Potencial dist. de carga:

$$V = k \int \frac{dq}{r} \quad (3.8)$$

- Condensador. Relación  $Q - V$ :

$$Q = CV \quad (6.1)$$

## 6. Condensadores

- Capacidad cond. placas planas:

$$C = \kappa \frac{\varepsilon_0 A}{d} \quad (6.2)$$

- Capacidad cond. cilíndrico:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln \frac{b}{a}} \quad (6.3)$$

- Energía almacenada en un cond.:

$$U = \frac{1}{2} QV \quad (6.4)$$