

Aplicaciones físico-matemáticas para la enseñanza en alumnos del primer curso de grados de Ciencias e Ingenierías.

Concepción Muriel* y Juan Vidal**

*Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, **Departamento de Construcciones Navales, Facultad de CC. Mar y Ambientales.

concepcion.muriel@uca.es

RESUMEN: Se presenta un paquete de subrutinas creadas con Mathematica para la enseñanza de cálculo vectorial en asignaturas del grado en Matemáticas y de diferentes grados en Ciencias Experimentales. Mediante aplicaciones de Mathematica, el alumno puede visualizar aquellos conceptos que exijan cierta abstracción y hacer variaciones sobre el mismo problema, lo que posibilita al alumno trabajar diferentes ejercicios sobre los mismos conceptos. Mediante encuestas realizadas a alumnos de los primeros cursos de los grados de Matemáticas, Ingenierías Marina, Náutica y Transporte Marítimo y Radioelectrónica se analizan las opiniones de los alumnos respecto a la concepción, idea e importancia de las matemáticas en el aprendizaje de las asignaturas de físicas y de las aplicaciones físicas en la enseñanza de las matemáticas para profundizar en las dificultades que, desde el punto de vista de alumno, presenta el aprendizaje de estas materias y poder adaptar la metodología utilizada. Por último se comparan los modelos de enseñanza basados en la exposición, ya sea mediante clases magistrales en pizarra o mediante presentaciones video-proyectadas, con clases de desarrollo de conocimientos mediante aplicaciones informáticas que potencian el aprendizaje interactivo, relacionando el nivel de progreso de los alumnos en algunos contenidos del programa con las prácticas docentes empleadas.

PALABRAS CLAVE: proyecto, innovación, mejora, docente, subrutinas matemáticas, evaluación, cálculo vectorial, Mathematica, prácticas, laboratorio

INTRODUCCIÓN

En muchos países de Europa, la docencia universitaria tradicional se ha visto modificada por los principios que definen el Espacio Europeo de Educación Superior (EEES). Los cambios que promueve el EEES eliminan la concepción de profesor como figura única y fundamental en la transmisión de conocimiento donde compartía su sabiduría a través de la clase magistral, clases regladas donde los alumnos asimilaban los conceptos y tomaban apuntes. Los nuevos estudios cuantifican el trabajo durante el proceso de aprendizaje en un contexto de renovación metodológica docente y de evaluación continua de los conocimientos y de las competencias adquiridas. Las clases no son puramente teóricas y existe una parte práctica que computa en la evaluación final. Para facilitar el trabajo de docente y del alumno se utilizan diferentes recursos tecnológicos aplicados al ámbito de la educación: Internet, los entornos virtuales de aprendizaje y el uso de diferentes herramientas tecnológicas son los útiles de estudio en la Universidad actual. Este nuevo marco obliga al profesor universitario a renovar su propia formación, su metodología, sus materiales didácticos y los sistemas tradicionales de evaluación.

El estudio de las bases matemáticas comunes en asignaturas de matemáticas y físicas en los primeros cursos de los nuevos grados en Ciencias e Ingenierías constituyen los pilares de muchos de los conceptos de asignaturas de cursos posteriores. El estudio y didáctica de las matemáticas y asignaturas de físicas, comprenden una serie de estructuras de presentación y símbolos propios que contribuyen de forma determinante a la perfecta comprensión de la materia. El desconocimiento de este lenguaje matemático supone un hándicap a la hora de la transmisión de conceptos en estas ciencias, y en particular en las asignaturas de físicas donde a veces la limitación no está en la idea conceptual sino en el

formalismo matemático, por lo que su estudio debe constituir una tarea primordial desde los primeros niveles académicos. Además, nuestra experiencia docente nos ha demostrado que los alumnos tienen grandes dificultades de asimilación de todos aquellos conceptos que exijan cierta abstracción, a lo que se le puede unir la falta de visión espacial. Uno de los resultados del proyecto es la creación de un marco de interacción entre profesores de diferentes titulaciones y/o áreas de conocimiento que produzca beneficios en un doble sentido: las asignaturas de Matemáticas se enriquecen con casos prácticos y las de Ciencias Experimentales (Física, Ingenierías, etc.) pueden avanzar con más facilidad si utilizan la misma notación y conceptos que el alumno estudia en asignaturas de Matemáticas. Para ello se crean materiales didácticos comunes que permitan una metodología diferente e innovadora en estas disciplinas: se potencia el uso de las nuevas tecnologías para que el alumno pueda ir resolviendo problemas de forma interactiva y agudizar su pensamiento crítico.

Dentro de este contexto se enmarca el Proyecto de Innovación PI1-12-005 de la convocatoria de Innovación y Mejora docente del Vicerrectorado de Docencia y Formación de la Universidad de Cádiz, titulado "Diseño de metodologías y elaboración de material docente para la organización, planificación y coordinación de asignaturas con contenidos físico-matemáticos". Los objetivos generales y principales líneas de trabajo del proyecto son las siguientes:

Para los alumnos:

1. Adquisición de conceptos matemáticos e interpretación física.
2. Desarrollo de habilidades y destreza de cálculo.
3. Trabajo en grupo.

Para los profesores

4. Diseñar y mejorar las clases magistrales, prácticas y talleres mediante material gráfico y animaciones.
5. Coordinar contenidos de asignaturas y nomenclaturas físico-matemáticas.
6. Evaluación de la metodología mediante encuestas y pruebas de progresos con alumnos.

Dentro de este último apartado de evaluación de la metodología, el proyecto de innovación incluye los siguientes objetivos específicos:

- Analizar las opiniones de los alumnos respecto a la concepción, idea e importancia de las matemáticas en el aprendizaje de las asignaturas de físicas y de las aplicaciones físicas en la enseñanza de las matemáticas. El objetivo es profundizar en las dificultades que desde el punto de vista de alumno presenta el aprendizaje de estas materias para adaptar la metodología utilizada.
- Comparar los modelos de enseñanza basado en la exposición, ya sea mediante clases magistrales en pizarra o mediante presentaciones video-proyectadas, con clases de desarrollo de conocimientos mediante aplicaciones informáticas que potencian el aprendizaje interactivo, relacionando el nivel de progreso de los alumnos en algunos contenidos del programa con las prácticas docentes empleadas.

ELABORACIÓN DE SUBRUTINAS MATEMÁTICAS PARA LA ENSEÑANZA DE CONTENIDOS DE ANÁLISIS VECTORIAL

Uno de los materiales didácticos creados durante el proyecto de innovación es un software informático, interactivo y específico para la enseñanza del Cálculo Vectorial. En él se presenta una colección de aplicaciones matemáticas para el desarrollo del programa común de Análisis Vectorial de las distintas asignaturas de matemáticas en el primer curso de los grados en ciencias e ingenierías. Algunas de estas subrutinas se desarrollan en el Anexo I. El paquete de rutinas se conforman en base a la necesidad de introducir los siguientes conceptos, agrupados en unidades didácticas:

1. Introducción a la variedades diferenciables: representaciones implícitas, paramétricas y explícitas. Vectores tangentes y normales. Coordenadas cartesianas, polares, cilíndricas y esféricas.
2. Campos escalares y vectoriales. Curvas y superficies de nivel. Líneas de corriente. Operaciones entre campos: Gradiente (operador nabla), divergencia (Operador Laplaciano) y rotacional.
3. Orientación de variedades. Integración de campos escalares. Integración de campos vectoriales en variedades orientadas. Integrales de línea y de flujo: interpretación física.
4. Teoremas clásicos del análisis vectorial: Teorema de Green. Teorema de Stokes clásico y Teorema de Gauss o de la divergencia. Aplicaciones físicas.

Algunos de estos conceptos se visualizan gráficamente con posibilidad de modificación de parámetros, lo que facilita la **interpretación de las aplicaciones físicas**. Estos ejercicios resueltos permiten **desarrollar las habilidades y destrezas** necesarias para resolver otros problemas prácticos, fomentando la capacidad de relacionar los conocimientos y las habilidades adquiridas con las situaciones presentadas, y de esta forma saber aplicar los conceptos matemáticos para fines prácticos. La **adquisición de los conocimientos** se puede autoevaluar con variaciones de los mismos problemas tipo.

El desarrollo de este programa se realiza utilizando el programa de cálculo simbólico Mathematica®, presentando cada uno de los conceptos mediante una breve introducción teórica que se completa con ejercicios resueltos. Esta herramienta de cálculo, manipulación y visualización matemática, es un programa interactivo diseñado para resolver problemas en las áreas de Ciencias e Ingeniería. Las rutinas han sido creadas usando Mathematica 8.0 por su potencia gráfica y la posibilidad de crear proyectos elaborados que pueden ser muy complicados de realizar en otros lenguajes de programación. Además, las nuevas instrucciones incluidas en las últimas versiones para realizar animaciones, que permiten al usuario manipular gráficos o cálculos de forma interactiva, se adaptan a la perfección a las necesidades propias de estas disciplinas.

EJEMPLO DE UN TALLER ESPECÍFICO PARA ALUMNOS DE INGENIERÍAS NAVAL, MARINA, NÁUTICA Y TRANSPORTE MARÍTIMO Y RADIOELECTRÓNICA

El gradiente de un escalar es la operación más simple del operador derivada (operador nabla) y el resultado es un campo vectorial. Un ejemplo frecuente en Mecánica de Fluidos lo constituye el gradiente de presión. La presión estática P es un campo escalar y el operador gradiente sobre la presión define el vector gradiente de presión, el cual representa una fuerza,

$$\text{grad } P = \nabla P = \partial P / \partial x \mathbf{i} + \partial P / \partial y \mathbf{j} + \partial P / \partial z \mathbf{k} \quad (\text{Ec } 1)$$

donde en la ecuación (Ec 1) $\text{grad } P$ es un vector representando la fuerza (en realidad la fuerza es igual $-\text{grad } P$) que actúa sobre el fluido debido a la variación de P en el espacio. Existen otros muchos ejemplos de gradiente de escalares. El transporte difusivo de una propiedad se modela con un coeficiente de transporte que multiplica el gradiente de la propiedad. Ejemplo: la Ley de Fourier, $q = -k \text{ grad}(T)$, donde q es el vector que representa el flujo de calor por unidad de tiempo y área, $[W/m^2]$, donde T es la temperatura y la constante de proporcionalidad k es la conductividad térmica.

Por otro lado es importante observar el gradiente de un campo escalar tiene la dirección de la máxima variación del mismo. En otras palabras, el vector gradiente es normal a las superficies de nivel del campo escalar e indica la dirección de máximo crecimiento.

El ejercicio propuesto dice: Supongamos que la temperatura en cada punto (x,y) del plano viene dada por la función $f(x,y)=1/2(y^2-x^2)$. Calcula el camino que seguirá una bacteria que en todo instante busca el mayor aumento de la temperatura y que parte de un punto inicial $(-2,1)$. Con la ayuda de la aplicación en Mathematica el alumno puede visualizar mejor el ejercicio. La aplicación permite modificar el punto y la función, lo que reinventa multitud de variantes con los que ejercitar el mismo tipo de problema.

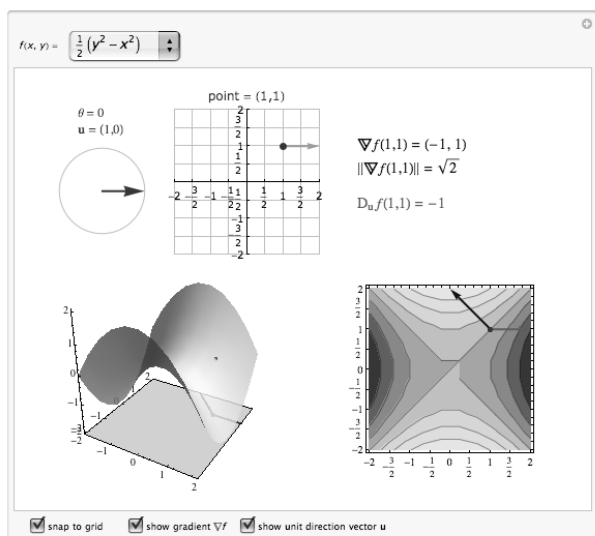


Figura 1: Ejemplo de aplicación mathematica (por Abby Brown) empleada en el taller para el ejercicio de gradiente de un campo escalar.

Estas aplicaciones se utilizaron en las clases-taller, en ocasiones después de una introducción teórica en la pizarra donde se introducen los conceptos físico-matemáticos necesarios. Los ejercicios del taller propuestos permitían la realización de cálculos y lograron que los alumnos resolvieran los problemas con lápiz y papel y luego contrastaran sus resultados con los obtenidos a partir de los datos de la misma.

Con vista a introducir a los alumnos en problemas de sus estudios relacionados con el ejercicio profesional, se le muestra un ejemplo de cálculos de la altura metacéntrica (GM) en un buque. Modificando el ángulo de inclinación y el centro de gravedad, el alumno puede visualizar como cambia la situación de estabilidad del buque. Las barras superiores permiten calcular la posición del GM en función de los datos hidrostáticos y del traslado de pesos en el buque y la escora de este.

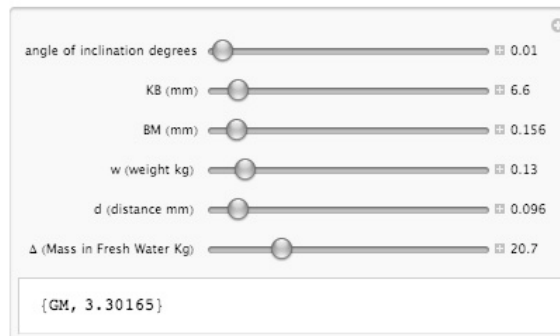


Figura 2: Ejemplo de aplicación Mathematica para el cálculo del GM en un buque (elaboración propia)

EVALUACIÓN DE LA METEDOLOGÍA

Con el objetivo de evaluar la eficacia del método de aprendizaje, se realizaron una serie de encuestas y pruebas con alumnos de los primeros cursos de los grados que tienen asignaturas comunes de matemáticas y física general. Mediante las encuestas, se intenta conocer mejor los problemas que los alumnos encuentran en el aprendizaje de estas asignaturas con el fin de adaptar el material elaborado a sus necesidades. Mediante un conjunto de pruebas de conocimiento en alumnos de estos cursos, se intenta establecer una relación entre el progreso en el aprendizaje con la metodología utilizada.

El diseño utilizado fue en formato de encuesta a partir de 14 preguntas cerradas. Se presentaron 14 afirmaciones para que los alumnos las clasificaran, en una escala de 5 a 0, desde totalmente de acuerdo (5) a totalmente desacuerdo (0). Dividida en tres partes, en las primeras 5 preguntas se intenta indagar si la dificultad que encuentra el alumno en los problemas se debe a los conceptos físicos en sí o al aparato matemático que se necesita para su desarrollo y la coherencia de nomenclaturas a la hora de explicar los mismos conceptos en asignaturas de física y matemáticas. La segunda parte, estudia la percepción que el alumno tiene sobre la aplicación de los conceptos matemáticos en física y viceversa, así como sus posibles aplicaciones en posteriores asignaturas. La última parte, desde la pregunta 9 a la 14, se preguntó sobre la apreciación del alumno de la eficacia del método tradicional de desarrollo del tema en la pizarra o del método de intercalar prácticas con ordenador. El cuestionario fue el siguiente:

1. Entiendo los conceptos físicos que se explican.
2. Entiendo el desarrollo matemático que se utiliza para explicar los conceptos físicos.
3. Entiendo la nomenclatura matemática.
4. La nomenclatura matemática era conocida.
5. Había aprendido los conocimientos previos necesarios en otras asignaturas.
6. Los conceptos matemáticos me fueron útiles para comprender los algunos conceptos físicos.
7. Las interpretaciones físicas me ayudaron a comprender algunos conceptos matemáticos

8. Creo que los conceptos físicos-matemáticos estudiados en la asignatura me serán útiles para otras asignaturas.
9. Considero suficiente la colección de ejercicios prácticos.
10. El contenido teórico de la asignatura es adecuado.
11. Los recursos multimedia fueron suficientes.
12. El uso de material multimedia ha sido útil.
13. Entiendo mejor los conceptos teóricos cuando se desarrollan en la pizarra
14. Valoro positivamente las prácticas con software para comprender los conceptos.

La encuesta se pasó a alumnos de tercer curso del grado de Matemáticas y alumnos de primero de grado de Ingenierías Marina, Náutica y Transporte Marítimo y Radioelectrónica, que cursan asignaturas de física general. En total fueron 74 alumnos de ingenierías y 20 alumnos de matemáticas. Los resultados se muestran en la tabla 1.

PREGUNTA	Media	Media	Desviación	Desviación
	Ing.	Mat.	Ing.	Mat.
1	3.1	3.5	1.2	1.0
2	3.1	4.0	1.2	0.5
3	2.1	4.0	1.4	0.5
4	2.0	3.5	1.2	0.8
5	2.3	3.0	1.4	1.2
6	3.2	2.0	1.3	1.2
7	2.9	3.2	1.2	1.2
8	2.9	2.0	1.3	0.9
9	1.9	3.5	1.3	1.1
10	3.0	3.2	1.1	1.1
11	3.1	2.8	1.2	1.3
12	3.3	3.4	1.1	1.2
13	3.2	3.3	1.2	1.2
14	3.5	3.2	1.1	1.3

Tabla 1. Resultados de las encuestas a alumnos del grado de matemáticas (Mat.) y a alumnos de física general en el grado de Ingenierías Naval, Náutica y Transporte Marítimo y Radioelectrónica (Ing.).

La mayoría de los alumnos, tanto de ingenierías como de matemáticas, valoraron positivamente las clases con software y el empleo de material multimedia. Sin embargo, uno de las conclusiones más interesantes en función de la opiniones de los alumnos es que todos creen necesario el uso de la pizarra tradicional. Por tanto, el material multimedia es, en opinión de los alumnos, una herramienta necesaria pero no suficiente. En cuanto a titulaciones, las principales diferencias se encuentran en que los alumnos de ingenierías presentan dificultades a la hora de entender los desarrollos matemáticos y la nomenclatura no le resultó conocida. La alta calificación en estos apartados por los alumnos de matemáticas no es extraña, como tampoco que su peor calificación sea para las posibles utilidades de los conceptos físicos. Sin embargo, si valoran positivamente el emplear ejemplos físicos.

La segunda prueba de evaluación del método consistió en ofrecer unas clases extraordinarias voluntarias a alumnos de los grados de Ingenierías Marina, Náutica y Transporte Marítimo y Radioelectrónica En total fueron 27 alumnos. En estas clases se repasaron conceptos como operaciones con vectores, integrales de línea o cambios de bases. En estas clases se utilizaron diversas aplicaciones informáticas. Algunos de los alumnos que realizaron la prueba, pudieron utilizarla para realizar por primera vez un problema del tema, para revisar la teoría y luego de resolver el problema analíticamente, así como para predecir el comportamiento del sistema estudiado. La simulación no solo les ayudó a introducirse en el tema, sino que también les permitió ver como se hacía un ejercicio analíticamente.

Para la evaluación de los resultados se diseñó un cuestionario de problemas cortos que evaluaban los conocimientos previos a la clase teórica, uno posterior a la misma y un último examen después de la clase de problemas con ordenador. Para contrastar los resultados de progresos, se repite una segunda prueba sobre otra parte del temario intercambiando la clase de ordenador y la de teoría. El objetivo es estudiar si el progreso está relacionado con el método o simplemente responde al repaso de conocimientos. Los resultados se muestran en las figuras 3 y 4. Su análisis muestra que los alumnos tuvieron resultados similares en las dos pruebas preliminares, por lo que presentan similar preparación previa en los dos temas. También se puede apreciar que el progreso es ligeramente mayor para la segunda prueba y los resultados son mejores en aquellos alumnos que tenían peor preparación inicial. Por otro lado, aunque se alcanzan niveles parecidos tras las dos sesiones, es muy destacable el hecho de que el nivel se alcanza más rápidamente cuando se imparte primero la clase práctica. Se pone de manifiesto que con sólo una clase se consigue prácticamente el mismo nivel de progreso que cuando se emplearon dos sesiones. En términos porcentuales, el incremento medio en la calificación de los 27 alumnos respecto a la prueba preliminar fue un 12% tras la primera clase (teórica) y de un 16% tras segunda clase (práctica) en la primera prueba y de un 17% después de la clase práctica y 16% tras la clase teórica en la segunda prueba.

Es importante destacar la necesidad de que el alumno trabaje en clase delante del ordenador en diferentes casos del mismo problema. No basta con visualizar el problema inicialmente planteado sino que es imprescindible que practique cambiando las condiciones iniciales y él mismo se evalúe en las respuestas. A nuestro modo de ver, esta es la verdadera potencia de la herramienta.

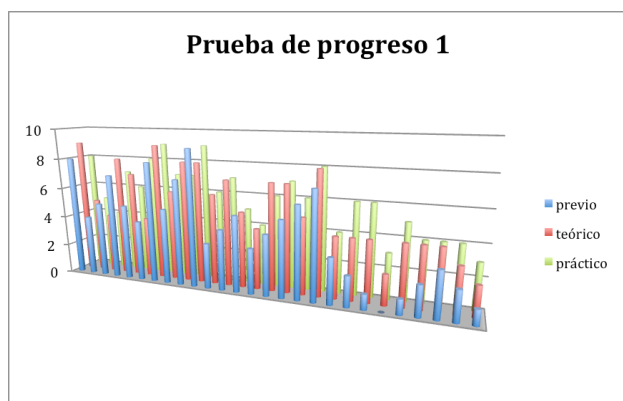


Figura 3. Prueba de progreso tras el primer taller. Resultados (calificaciones del cuestionario de 0 a 10) de los ejercicios por alumnos. En azul, las notas obtenidas tras el examen previo, en rojo después de la clase teórica y en verde tras las clases prácticas con ordenador.

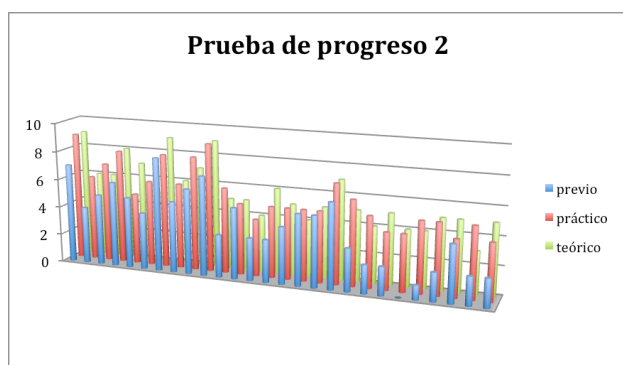


Figura 4. Prueba de progreso tras el segundo taller. Resultados (calificaciones del cuestionario de 0 a 10) de los ejercicios por alumnos. En azul, las notas obtenidas tras el examen previo, en rojo después de las clases prácticas y en verde tras la clase teórica de repaso.

La segunda parte consistió en la realización de una encuesta por parte de estos alumnos en base al siguiente cuestionario:

1. Los ejemplos me ayudaron a entender mejor los conceptos físicos.
2. Las interpretaciones físicas me ayudaron a comprender algunos conceptos matemáticos.
3. Las aplicaciones me permitieron practicar por mi cuenta los diferentes ejercicios.
4. Valoro más importante las explicaciones en la pizarra.
5. Las aplicaciones no son imprescindibles para el desarrollo de la asignatura.
6. Las aplicaciones me ayudan a mejorar la destreza de cálculo en los problemas.
7. Creo que pueden aplicarse a otras asignaturas.

Los resultados se muestran en la tabla 2. A diferencia de los alumnos que realizaron la encuesta anterior, estos

recibieron dos sesiones extraordinarias de repaso de teoría y problemas con aplicaciones informáticas elaboradas con Mathematica. Las soluciones de los problemas que se trabajaron en los talleres se debatían y se planteaban variantes del mismo problema. La encuesta incluye cuestiones comunes a la encuesta anterior. Los resultados muestran una mejor apreciación de los alumnos a esta metodología, aunque repiten en la necesidad de clases de pizarra.

PREGUNTA	Media	Desviación
1	3.3	1.1
2	3.2	0.9
3	3.5	1.1
4	3.5	1.2
5	3.3	1.1
6	4.1	0.8
7	3.2	1.4

Tabla 2. Resultados de las encuestas a alumnos de ingenierías tras las dos sesiones de problemas y teoría utilizando como base las aplicaciones informáticas.

CONCLUSIONES

Como resultado del trabajo se ha creado una colección de rutinas interactivas para facilitar la enseñanza de asignaturas con contenidos físico-matemáticos. Se pudo comprobar que el uso de esta herramienta mejoró el rendimiento de los alumnos. La gran potencia del software permite hacer variaciones sobre el mismo problema, lo que posibilita al alumno trabajar diferentes ejercicios sobre los mismos conceptos.

Al final de la experiencia los alumnos valoraron positivamente el uso del material para comprender mejor conceptos difíciles de aprender, como orientación. Demandan más dedicación de horas de laboratorios, posiblemente porque despierta su interés y participación, pero al mismo tiempo creen necesario el desarrollo de la materia en pizarra por aparte del profesor. Consideran muy positivas las aplicaciones a problemas físicos pero manifiestan poca satisfacción sobre los resultados obtenidos, lo que nos lleva a reforzar este punto en experiencias sucesivas. La interacción entre profesores de distintas disciplinas que se ha desarrollado gracias a este proyecto nos ha aportado una visión más amplia de las necesidades y deficiencias de cada sistema de enseñanza individual.

También se pudo contrastar que su aplicación didáctica mejora la relación de los estudiantes con los docentes y con otros compañeros.

REFERENCIAS

1. Brown, A. Wolfram Demonstrations Project. <http://demonstrations.wolfram.com/author.html?author=Abby+Brown>
2. Esquembre, F., Martín, E., Christian, W. y Vellón, M. F. Enseñanza de la Física con Material Interactivo. Ed. Pearson, Prentice Hall. 2001.

3. Ferdinand, F. C. *Mathematical Methods in Physics and Engineering with Mathematica*. CRC Press Company. 339 pp., 2003
4. Garcías, A. *Nuevas estrategias didácticas en entornos digitales para la enseñanza superior*. En: J. Salinas; A. Batista (coord.). *Didáctica y tecnología educativa para una universidad en un mundo digital*. Universidad de Panamá: Imprenta Universitaria, 2002.
5. Hassani, S. *Mathematical methods using Mathematica: for students of physics and related fields*. Springer 235pp, 2003.
6. Larson, R. y Hostetler, R. *Cálculo y Geometría Analítica*. McGraw-Hill, 1989.
7. Marsden, J. E. y Tromba, A. J. *Cálculo Vectorial*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1991.
8. Morin, J. y Seurat, R. *Gestión de los recursos tecnológicos*. Madrid: Cotec, 1998.
9. Munkres, J. R. *Analysis on Manifolds*. Addison-Wesley, USA, 1991.
10. Romero, J. L., Benítez, F. Y Muriel, C. *Análisis Vectorial*. Dpto de Matemáticas. Universidad de Cádiz. 2004.
11. Salinas, J. *El rol del profesorado universitario ante los cambios de la era digital*. Actas del I Encuentro Iberoamericano de Perfeccionamiento Integral del Profesor Universitario. Caracas: Universidad Central de Venezuela, 1999.
12. Torrence, B. T. y Torrence, E. A.. *The Student's Introduction to MATHEMATICA ®: A Handbook for Precalculus, Calculus, and Linear Algebra*. Cambridge University Press, 484 pp, 2009.
13. Wellin, P. R., Gaylord, R. J. y Kamin, S. N. *An introduction to programming with Mathematica*. Third Edition. Cambridge University Press. 570 pp, 2005.
14. Wagon, S. *Mathematica in Action: Problem Solving Through Visualization and Computation* Springer, 2010.
15. Zimmerman, R. L. y Olness, F. I. *Mathematica For Physics*. Addison-Wesley Publishing Company. 335pp, 2002.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a los profesores J.L. Romero y J.J. Alonso sus contribuciones a este trabajo. Del mismo modo, queremos agradecer a los alumnos colaboradores del departamento de matemáticas Adrián Ruíz, J. B. García y P. Piniella sus inestimables ayudas y sugerencias.

ANEXOS

PI1_12_005_Anexo 1.pdf

Este anexo corresponde a un resumen de las principales subrutinas elaboradas para este trabajo en Mathematica. Son rutinas dinámicas e interactivas cuando se ejecutan desde Mathematica con posibilidad de manipular los parámetros y funciones involucrados.

PI1_12_005_Anexo 2.pdf

PI1_12_005_Anexo 3.pdf

Los anexos 2 y 3 corresponden a los trabajos publicados en los proceedings del Congreso SIECI-2012 (9º Simposium Iberoamericano en Educación, Informática y Cibernética).