Diedrigebra: Dibujando ecuaciones para mejorar la visión espacial

Soledad Moreno-Pulido*, Miguel-Ángel Pardo-Vicente+, Pablo Pavón-Domínguez+, Javier Palacios-Calatayud*

*Departamento de Matemáticas, Escuela Superior de Ingeniería, + Departamento de Ingeniería Mecánica y Diseño Industrial, Escuela Superior de Ingeniería

soledad.moreno@uca.es

RESUMEN: La geometría es una disciplina compartida por las matemáticas y por el dibujo técnico. El estudio de las figuras en el espacio requiere del desarrollo de la capacidad de visión espacial, y un nivel bajo en esta competencia, en muchos casos, dificulta la comprensión de problemas tridimensionales. Dado que la enseñanza de la geometría permite trabajarla en el aula en asignaturas diferentes, sería muy interesante poder confluir la geometría algebraica (matemáticas) y la geometría descriptiva (sistema diédrico) para el desarrollo de los conocimientos y habilidades geométricas de los alumnos de ingeniería. Para ello, se ha propuesto un proyecto de innovación docente en el que se ha diseñado un espacio común entre ambas geometrías, basado en la geometría descriptiva, para traducir gráficamente los problemas algebraicos y, al mismo tiempo, dotar de sentido algebraico a las representaciones en sistema diédrico.

PALABRAS CLAVE: proyecto, innovación, mejora, docente, geometría, diédrico, álgebra, descriptiva, proyectiva.

OBJETIVO

El presente proyecto de innovación docente pretende facilitar los procesos de aprendizaje del alumnado de primer curso de los grados en ingeniería, mediante la enseñanza de la geometría algebraica apoyada en imágenes, problemas y ejemplos de geometría descriptiva (dibujo técnico).

Para ello, se ha establecido un lenguaje común para la representación algebraica del sistema diédrico, tal y como se resume a continuación y se recoge de un modo detallado en el Anexo 1.

DEFINICIÓN DEL SISTEMA DE COORDENADAS

La primera etapa consiste en la creación de un espacio común para que ambos lenguajes (algebraico y descriptico) tuviesen sentido de forma simultánea. A fin de cuentas, se trata de buscar una notación coherente y unos criterios estables para la definición del espacio. Ha sido, con diferencia, la etapa que más tiempo ha consumido, puesto que era necesario asegurar que el lenguaje común fuese coherente para el desarrollo posterior.

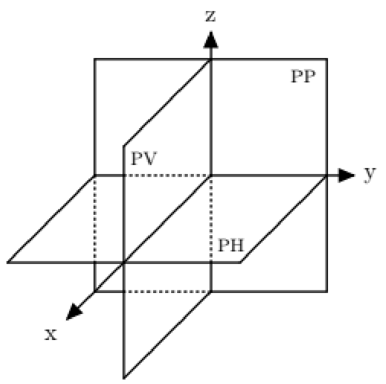


Figura 1. Ubicación de los planos en el sistema.

Finalmente, se optó por la representación gráfica habitual en el sistema diédrico, a la que posteriormente se le fue añadiendo notación matemática. De este modo, el sistema espacial queda definido por 2 planos de proyección: El plano horizontal y el plano vertical (ver Fig. 1). Ambos planos convergen en una línea que se denomina línea de tierra (LT). De este modo, el espacio queda divido en 4 cuadrantes.

Obsérvese que en la representación diédrica el plano de perfil sólo se emplea para la resolución de problemas que quedan indefinidos con las proyecciones sobre el plano horizontal (PH) y vertical (PV).

Aunque el plano de perfil (PP) se emplea en diédrico como plano auxiliar para la resolución de algunos problemas indefinidos, su inclusión es necesaria para la definición del triedro que se empleará como base canónica para la representación tridimensional. Así, el origen de coordenadas (0,0,0) se define como el punto de intersección de los 3 planos de proyección, que son ortogonales entre sí. A partir de éste, se definen los ejes X (coincidente con la LT, y que mide la desviación), el eje Y (mide alejamientos) y eje Z (mide cotas).

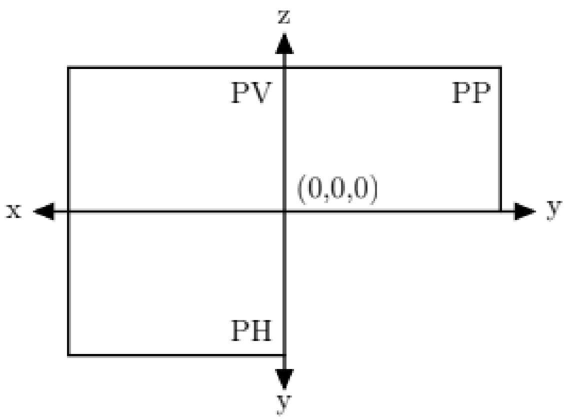


Figura 2. Planos del sistema abatidos.

Una vez definido el sistema, se realiza el habitual abatimiento del plano horizontal de proyección, sobre el plano vertical de proyección (ver Fig. 2). De este modo el sistema tridimensional pasa a un sistema bidimensional, sobre el que se puede trabajar en plano (papel). Este abatimiento, da como resultado la superposición de los planos.

En realidad, desde otro punto de vista, la superposición de planos de proyección anteriormente comentada, requiere del establecimiento de orden a la hora de realizar las proyecciones de los elementos sobre dichos planos, puesto que los ejes X, Y, Z, también quedan superpuestos y dependen de los planos sobre los que vayamos a proyectar.

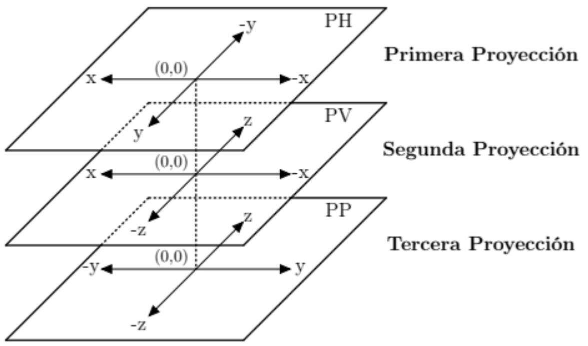


Figura 3. Orden de prelación de los planos de proyección.

DEFINICIÓN DE LOS ELEMENTOS BÁSICOS

Los elementos básicos en el sistema diédrico son: punto, recta y plano. En esta sección se abordará su representación y tratamiento algebraico.

La representación de un **punto** A se obtiene mediante la proyección cilíndrica ortogonal del mismo sobre los planos PH, PV y PP, obteniendo las proyecciones a_1, a_2 y a_3, respectivamente. En la primera proyección (PH), se definen las componentes desviación (x_a) y alejamiento (y_a); en la segunda proyección (PV) se confirma el desviación (x_a) y se indica la cota (z_a). Si fuese necesario, se recurre a la tercera proyección (PP), en la que se definen/confirman alejamiento (y_a) y cota (z_a). Desde un punto de vista algebraico las proyecciones de un punto A quedan definidas como:

$$a_1 = (x_a, y_a)$$
$$a_2 = (x_a, z_a)$$
$$a_3 = (y_a, z_a)$$

En función de los valores y signos de dichas coordenadas, tendremos al punto A ubicado en las diferentes posiciones del espacio, lo que se denomina alfabeto del punto.

La representación de una **recta** R en el espacio queda definida en diédrico por sus proyecciones ortogonales r_1 y r_2, sobre los planos de proyección. Si la recta R viniese definida por dos puntos A y B, definidos por sus coordenadas (x_a,y_a,z_a) y (x_b,y_b,z_b), respectivamente; desde un punto de vista matemático es sabido que ambos definen una recta y que es posible obtener sus ecuaciones, siendo únicamente necesarios dos puntos, o un vector y un punto, (ambos casos son equivalentes ya que con dos puntos se puede componer un vector). La ecuación de la recta se puede definir de forma paramétrica, continua o implícita. Por comodidad, se ha elegido la implícita:

$$\frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y} \equiv r_1$$
$$\frac{x - x_0}{v_x} = \frac{z - z_0}{v_z} \equiv r_2$$
$$\frac{y - y_0}{v_y} = \frac{z - z_0}{v_z} \equiv r_3$$

Un **plano** α queda definido por 3 puntos no alineados (A, B y C), con los que se puedan componer hasta tres vectores linealmente independientes AB (v), BC (w) o AC (u) , de los cuales son necesarios 2 para determinar el plano.

A partir de los dos vectores que generan el plano, se puede obtener el vector normal (n) al plano mediante el producto vectorial. El vector normal es perpendicular a los vectores anteriores. Con un punto del plano y el vector normal, n, se obtiene la ecuación implícita del plano:

$$(x - x_0) \cdot n_x + (y - y_0) \cdot n_y + (z - z_0) \cdot n_z = 0 \equiv \alpha$$

Una vez definidos los elementos básicos, se procedió al estudio de los elementos que los constituyen (trazas), así como sus posiciones relativas (ver Anexo 1).

INTERACCIÓN ENTRE LOS ELEMENTOS BÁSICOS

Desde un punto de vista teórico, se ha aunado también el lenguaje algebraico y el descriptivo para establecer relaciones entre los elementos anteriormente definidos. Como puede verse en el Anexo 1, se ha estudiado las relaciones de paralelismo y perpendicularidad, intersecciones y geometría métrica (distancias y ángulos).

A partir de esto, se han podido definir y resolver una amplia variedad de ejercicios de diédrico y algebraicos en sus dos vertientes. De este modo, se han recogido 27 problemas, que serán de utilidad como material docente para las asignaturas implicadas, y que permitirán reforzar la comprensión especial de este tipo de problemas geométricos.

EXPERIENCIA EN EL AULA

Para obtener un *feed-back* realista acerca de las bondades y desventajas de esta iniciativa, se ofertó entre los alumnos de los diferentes grados en ingeniería de la Escuela Superior de Ingeniería, la posibilidad de participar de forma voluntaria en una experiencia piloto. Esta experiencia tendría como objetivos: i) Comprobar la acogida de la iniciativa entre el alumnado, ii) Evaluar el impacto de la misma, y iii) Corregir posibles deficiencias de cara a su aplicación generalizada en el próximo curso 2019/2020.

Se realizó un cuestionario a través del Campus Virtual, en el que el alumno, de forma secuencial, iba respondiendo preguntas sobre sistema diédrico y álgebra, intercalándose videos formativos para la resolución de los problemas. Los alumnos no recibían información sobre los aciertos y errores de sus respuestas. El cuestionario se basaba en la siguiente secuencia:

1. Video de bienvenida. Exposición del sistema de preguntas y finalidad de la iniciativa.
2. Evaluación del nivel inicial de sistema diédrico y álgebra a través de una pregunta conjunta entre ambas disciplinas.
3. Evaluación del nivel inicial en sistema diédrico.
4. Video 1. Formación que vincula sistema diédrico y álgebra.
5. Evaluación sobre la formación recibida en el punto 4.
6. Video 2. Formación que vincula sistema diédrico y álgebra.
7. Evaluación sobre la formación recibida en el punto 6. Idéntica a la evaluación del punto 2.
8. Evaluación final de nivel de sistema diédrico y álgebra a través de una pregunta conjunta entre ambas disciplinas.
9. Pregunta sobre el porcentaje de dibujo-matemáticas empleado por el alumno para resolver el problema del punto 8.

Para el análisis de los resultados, se optó por realizar un análisis clúster de las respuestas, las cuales están basadas en variables dicotómicas de acierto = 1 y error = 0. De este modo se pueden clasificar los alumnos en grupos homogéneos en función de sus respuestas. El método de clasificación empleado fue el clúster jerárquico, empleando como medida la distancia euclídea al cuadrado y como método de agrupamiento el método de Ward.

El dendograma obtenido sugiere la existencia de 3 grupos nítidamente diferenciados, en cada uno de los cuales se agrupan 1/3 de los alumnos aproximadamente. Como se comenta en la memoria final del proyecto, los resultados de opinión parecen indicar que la iniciativa tiene un efecto fuertemente condicionado por el alumno que la recibe. De hecho, las respuestas de opinión también reflejan la existencia de 3 grupos de alumnos, en los que también se podían dividir en 3 grupos iguales: Un tercio de los encuestados manifiesta estar poco de acuerdo en que esta iniciativa sea de utilidad para su aprendizaje, otro tercio no se muestra de acuerdo ni en desacuerdo, mientras que el tercio restante manifiesta estar muy o completamente de acuerdo en la utilidad de la iniciativa.

Retomando los resultados del análisis cluster, se diferencian los siguientes grupos de alumnos:

Grupo A. (1/3 de los alumnos): Las pruebas de evaluación inicial constatan que tienen un buen nivel de diédrico y de álgebra, lo que le permite aprovechar la formación para responder de forma adecuada el resto de cuestiones. Manifiestan que resuelven los ejercicios empleando un 50% mediante dibujo técnico y un 50% mediante matemáticas.

Grupo B. (1/3 de los alumnos): Alumnos que denotan saber de sistema diédrico, pero no de álgebra. La formación recibida por estos alumnos no les permite resolver los problemas finales, por lo que su proceso formativo se ve limitado por la ausencia de base de matemáticas.

Grupo C. (1/3 de los alumnos): Alumnos que denotan no tener conocimientos elementales ni de sistema diédrico ni de álgebra, pero que son capaces de aprovechar la formación para resolver los problemas finales que se les plantean. Según manifiestan, resuelven los problemas de diferente forma, pues los hay que usan exclusivamente las matemáticas hasta los que lo resuelven casi exclusivamente mediante el dibujo.

CONCLUSIONES

En líneas generales, la iniciativa de mezclar la enseñanza de la geometría a través de la geometría descriptiva (sistema diédrico) y geometría algebraica (matemáticas) tiene interés y es valorado positivamente por parte del alumnado. Si bien, su incidencia sobre resultados de aprendizaje positivos depende fuertemente del nivel inicial del alumno y de su capacidad para recibir una formación conjunta de ambas disciplinas.

LÍNEAS FUTURAS

Las líneas futuras de este proyecto son: Por un lado, la ampliación del desarrollo teórico y práctico del sistema diédrico y su traducción a lenguaje algebraico: abatimientos, giros, cambios de plano, cuerpos, secciones, etc. que serán de utilidad como material docente para los alumnos de ingeniería. Por otro lado, la traducción matemática servirá para el desarrollo y programación de un software informático de resolución gráfica de problemas de sistema diédrico.

ANEXOS

Sol-201800111295-tra _Anexo 1.pdf

Diedrigebra

Proyecto de Innovación docente.

Universidad de Cádiz

Departamento de Matemáticas[1]
Departamento de Ingeniería Mecánica y Diseño Industrial[2]

Soledad Moreno Pulido[1]
Miguel Ángel Pardo Vicente[2]
Pablo Pavón Domínguez[2]
Javier Palacios Calatayud[1]

Contents

1 Sistema Diédrico

El Sistema Diédrico es un sistema de representación geométrico que, empleando una proyección cilíndrica ortogonal, representa las tres dimensiones del espacio sobre las dos dimensiones del plano. Para ello se disponen dos planos perpendiculares entre sí llamados planos de proyección: Plano horizontal (PH) y plano vertical (PV). La intersección entre el PH y el PV se denomina línea de tierra (LT). Sobre dichos planos se efectúan las proyecciones de los elementos que intervienen (Fig. 1). La primera proyección se obtiene sobre el PH y la segunda sobre el PV. En ocasiones es necesario introducir una tercera proyección sobre un plano auxiliar (PauxP), que será paralelo al plano de perfil (PP_{aux}). La intersección entre el PV y el PP se denomina línea de perfil (LP).

Nótese que la tercera proyección se puede realizar sobre cualquier plano paralelo al Plano de Perfil (PP), incluido el propio Plano de Perfil. Por simplicidad en la notación, se va a considerar que la tercera proyección se realiza sobre PP = (PP_{aux}).

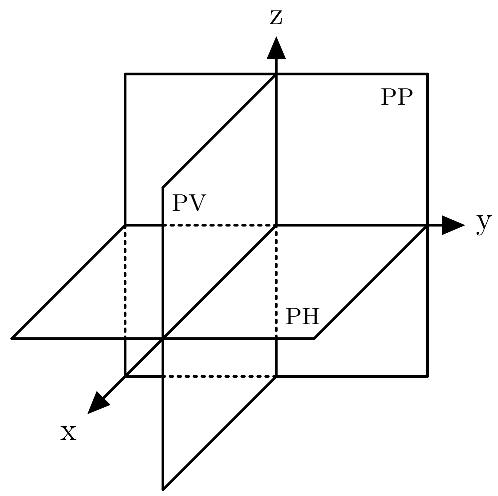


Figura 1. Ubicación de los planos en el sistema.

Según este sistema, los planos horizontal y vertical dividen el espacio en cuatro sectores llamados cuadrantes. A su vez, en los cuadrantes se sitúan dos planos bisectores que pasan por la línea de tierra y que forman 45° con el plano horizontal y vertical, dividiendo los cuadrantes en ocho octantes (Fig. 2).

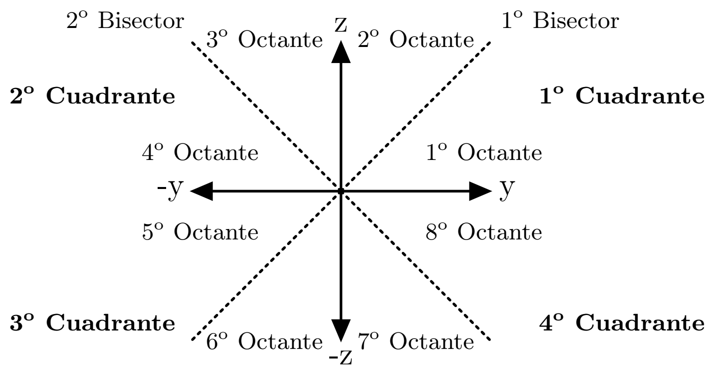


Figura 2. Octantes del sistema.

Para poder representar en este sistema los elementos geométricos básicos: punto, recta y plano, se proyectan ortogonalmente sobre los planos de proyección, quedando cada elemento definido por sus proyecciones ortogonales, en el caso del punto y la recta. En el caso del plano, este queda definido por las rectas de intersección de dicho plano con los planos de proyección. A estas intersecciones se les denomina trazas.

Sin embargo, el sistema de planos descrito anteriormente sigue siendo tridimensional y su representación en plano sigue siendo compleja. Para poder definir un elemento del espacio sobre un plano se realiza un abatimiento del plano horizontal sobre el vertical, utilizando la línea de tierra como charnela (Fig. 3a). De igual modo, cuando es necesario, se abate el plano de perfil sobre el plano vertical utilizando la línea de perfil como bisagra. De este modo, las tres dimensiones quedan reducidas a dos y los elementos quedan definidos por sus proyecciones o trazas (Fig. 3b).

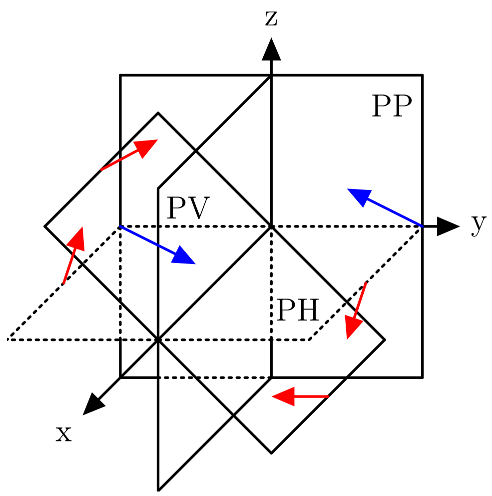


Figura 3a. Abatimiento de los planos del sistema.

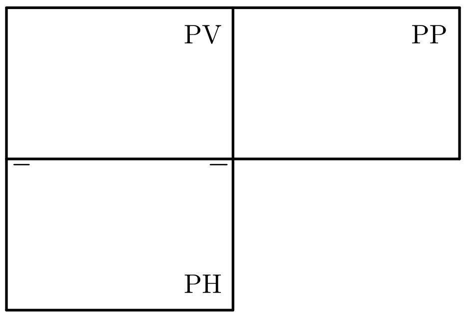


Figura 3b. Planos abatidos.

2 Consideraciones para la traducción al lenguaje algebraico

Para traducir este sistema gráfico al lenguaje algebraico se plantean las siguientes consideraciones:

Se define un triedro ortogonal formado por los ejes X, Y, Z cuyo origen O se sitúa en la intersección de los tres planos de proyección y se la asignan las coordenadas (0,0,0) (ver Fig. 4). Del este modo, el origen O también se puede definir como la intersección entre la línea de tierra (LT) y la línea de perfil (LP). La proyección u obtención de las trazas de un elemento siempre se realiza siguiendo el mismo orden de proyección: La primera proyección se realiza sobre el Plano Horizontal (PH), la segunda sobre el Plano Vertical (PV) y la tercera, de ser necesaria, sobre el Plano de Perfil (PP). La medida en el eje X se denomina desviación; en el eje Y, alejamiento; y en el Z, cota. Se representan los tres planos de proyección de forma independiente, permitiendo trabajar en un sistema de dos componentes con valores positivos y negativos (Fig. 5).

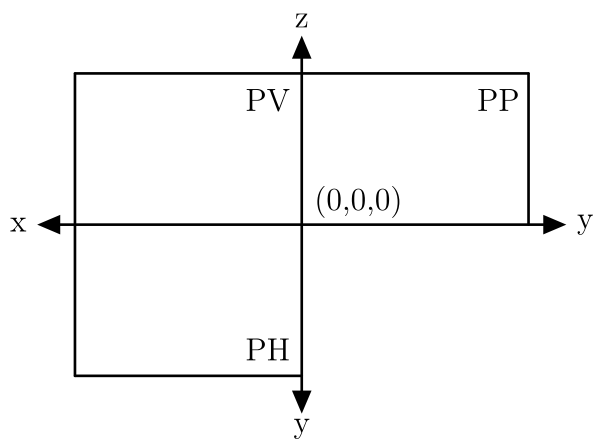


Figura 4. Planos del sistema abatidos.

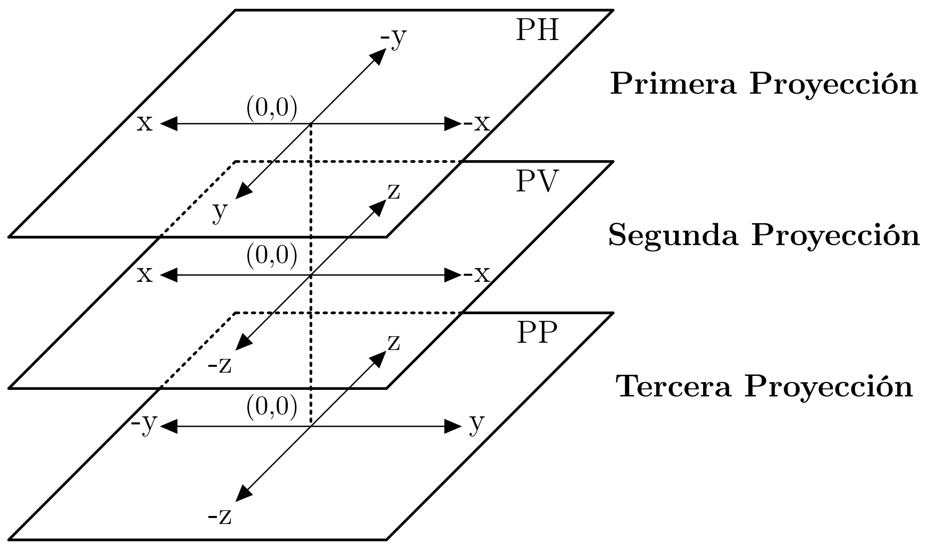


Figura 5. Orden de prelación de proyecciones en los planos.

3 Representación del punto

De acuerdo al Sistema Diédrico, la representación de un punto A se realiza proyectando ortogonalmente sobre los planos PH, PV y PP, obteniendo las proyecciones a_1, a_2 y a_3. En la primera proyección (PH), se definen las componentes desviación (x_a) y alejamiento (y_a); en la segunda proyección (PV) se confirma el desviación (x_a) y se indica la cota (z_a). Si fuese necesario, se recurre a la tercera proyección (PP), en la que se definen (o confirman) alejamiento (y_a) y cota (z_a).

En el siguiente ejemplo, el punto A quedará contenido en el plano de perfil (PP), tomándose la desviación, (x_a) como valor constante e igual a cero. Por lo tanto, la posición del punto quedará definida por sus proyecciones a_1 y a_2, suficientes, como se ha visto, para definir las componentes (x_a), (y_a), (z_a) del punto A.

Para poder transformar el lenguaje gráfico a matemático se toman del Sistema Diédrico las siguientes premisas:

- Si la representación de la primera proyección del punto A, a_1, se encuentra por debajo de la línea de tierra, el punto se encontrará en los cuadrantes primero o cuarto y tendrá una alejamiento positivo $(y_a > 0)$; mientras que si a_1 se encuentra por encima de la línea de tierra, el punto se hallará en los cuadrantes segundo o tercero y tendrá un alejamiento negativo $(y_a < 0)$.
- Si la representación de la segunda proyección, a_2, se encuentra por debajo de la línea de tierra, el punto se encontrará en los cuadrantes tercero o cuarto, dado que su cota será negativa $(z_a < 0)$; mientras que si a_2 se encuentra por encima de la línea de tierra, se encontrará en los cuadrantes primero y segundo, siendo en este caso su cota positiva $(z_a > 0)$.

Teniendo en cuenta estas premisas, podemos determinar matemáticamente en qué posición se encuentra el punto A, sabiendo que cada punto tiene 3 proyecciones posibles, y que, a su vez, cada una de las proyecciones se han definido mediante 2 coordenadas, siendo éstas las siguientes:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= (x_a, y_a) \\
a_2 &= (x_a, z_a) \\
a_3 &= (y_a, z_a)
\end{aligned}
$$

Siendo a_1 la proyección de un punto A sobre el plano horizontal, a_2 sobre el plano vertical y a_3 sobre el de perfil. Teniendo en cuenta el Sistema de Representación Diédrico, se pueden determinar 17 posiciones singulares del punto.

3.1 1º Cuadrante

De acuerdo con la Figura 6:

- Para B sus coordenadas serán, $y_b > 0$ y $z_b > 0$, $|y_b| > |z_b|$, hallándose por lo tanto el punto B en el primer octante.
- Para C sus coordenadas serán, $y_c > 0$ y $z_c > 0$, $|y_c| = |z_c|$, hallándose el punto C en el primer cuadrante y primer bisector.
- Para D sus coordenadas serán, $y_d > 0$ y $z_d > 0$, $|y_d| < |z_d|$, hallándose por lo tanto el punto D en el segundo octante.

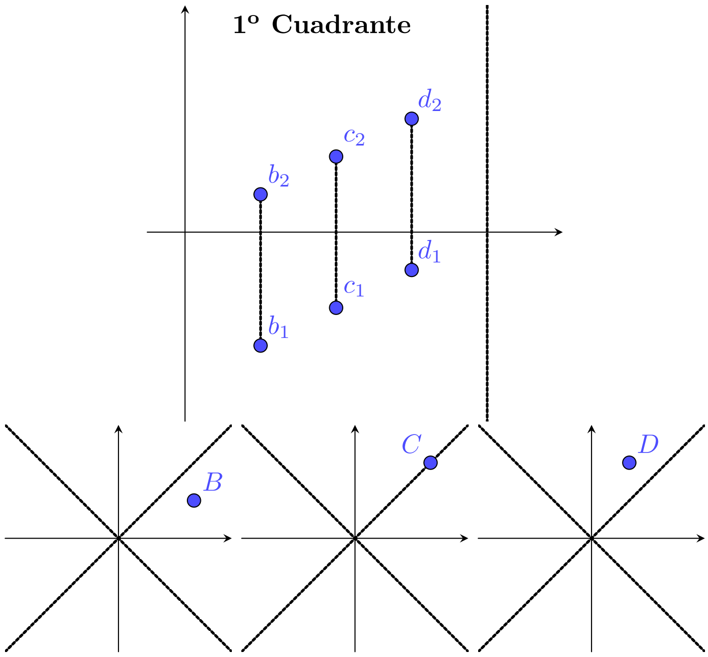


Figura 6. Representación de puntos en el primer cuadrante.

3.2 2º Cuadrante

De acuerdo con la Figura 7:

- Para F sus coordenadas serán, $y_f < 0$ y $z_f > 0$, $|y_f| < |z_f|$, hallándose por lo tanto el punto F en el tercer octante.
- Para G sus coordenadas serán, $y_g < 0$ y $z_g > 0$, $|y_g| = |z_g|$, hallándose el punto G en el segundo cuadrante y segundo bisector.
- Para H sus coordenadas serán, $y_h < 0$ y $z_h > 0$, $|y_h| > |z_h|$, hallándose por lo tanto el punto H en el cuarto octante.

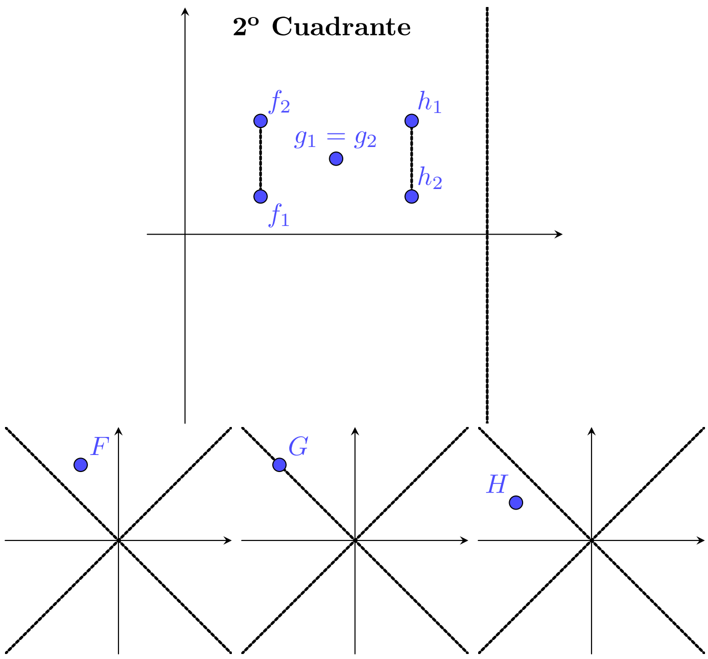


Figura 7. Representación de puntos en el segundo cuadrante.

3.3 3º Cuadrante

De acuerdo con la Figura 8:

- Para J sus coordenadas serán, $y_j < 0$ y $z_j < 0$, $|y_j| > |z_j|$, hallándose por lo tanto el punto J en el quinto octante.
- Para K sus coordenadas serán, $y_k < 0$ y $z_k < 0$, $|y_k| = |z_k|$, hallándose el punto K en el tercer cuadrante y primer bisector.
- Para L sus coordenadas serán, $y_l < 0$ y $z_l < 0$, $|y_l| < |z_l|$, hallándose por lo tanto el punto L en el sexto octante.

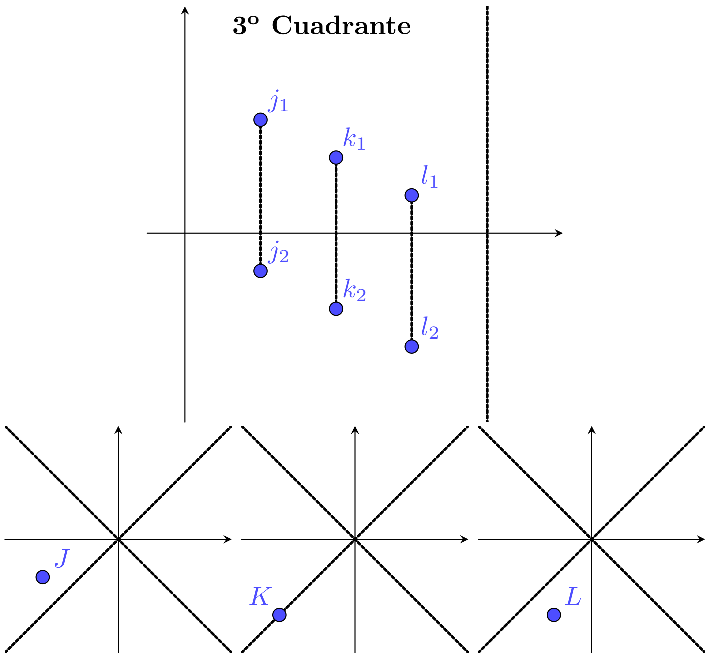
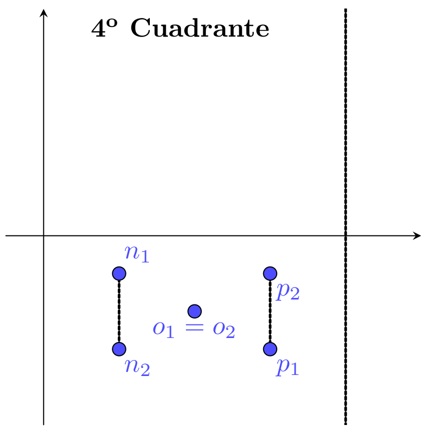


Figura 8. Representación de puntos en el tercer cuadrante.

De acuerdo con la Figura 9:

3.4 4º Cuadrante

- Para N sus coordenadas serán, $y_n > 0$ y $z_n < 0$, $|y_n| < |z_n|$, hallándose por lo tanto el punto N en el séptimo octante.
- Para O sus coordenadas serán, $y_o > 0$ y $z_o < 0$, $|y_o| = |z_o|$, hallándose el punto O en el cuarto cuadrante y segundo bisector.
- Para P sus coordenadas serán, $y_p > 0$ y $z_p < 0$, $|y_p| > |z_p|$, hallándose por lo tanto el punto P en el octavo octante.



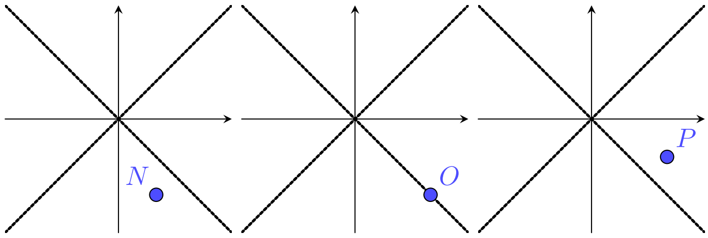


Figura 9. Representación de puntos en el cuarto cuadrante.

3.5 Localizaciones Singulares

Se pueden definir varias posiciones relativas de puntos adicionales cuando éstos se encuentran contenidos en los planos de proyección. De acuerdo con la Figura 10:

- Para A sus coordenadas serán, $y_a > 0$ y $z_a = 0$, hallándose el punto A contenido en la parte anterior del plano horizontal.
- Para E sus coordenadas serán, $y_e = 0$ y $z_e > 0$, hallándose el punto E contenido en la parte superior del plano vertical.
- Para I sus coordenadas serán, $y_i < 0$ y $z_i = 0$, hallándose el punto I contenido en la parte posterior del plano horizontal.
- Para M sus coordenadas serán, $y_m = 0$ y $z_m < 0$, hallándose el punto M contenido en la parte inferior del plano vertical.
- Para Q sus coordenadas serán, $y_q = z_q = 0$, hallándose el punto Q en la línea de tierra.

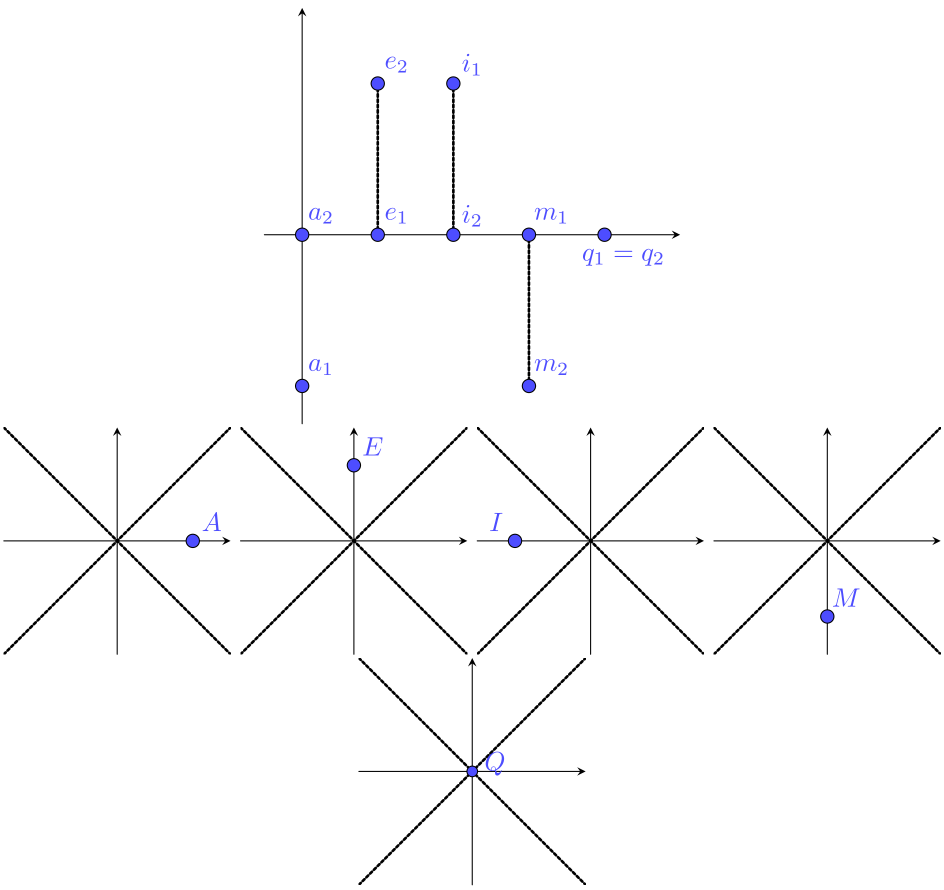


Figura 10. Representación de puntos contenidos en los planos de proyección.

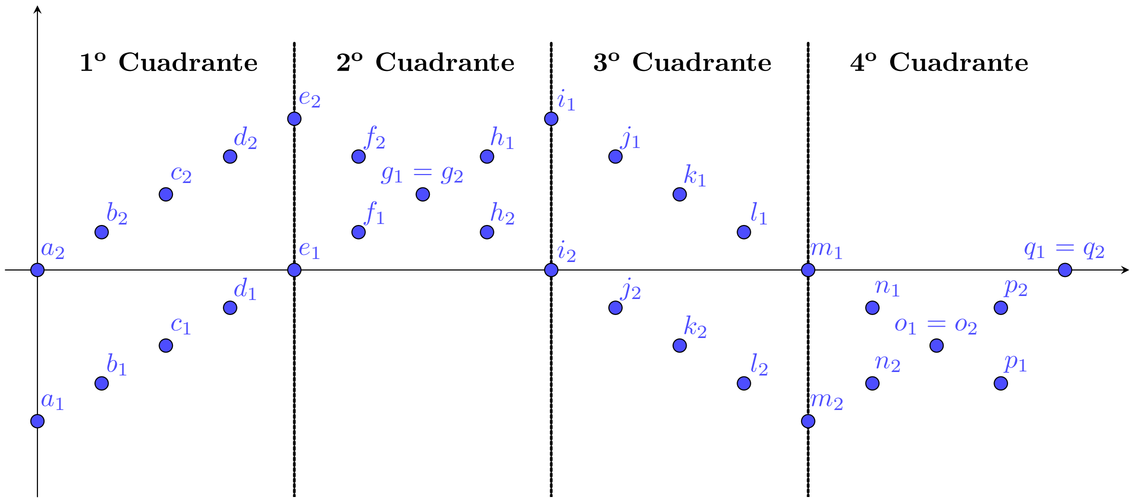


Figura 11. Proyecciones del alfabeto del punto.

4 Representación de la recta.

Una recta r en el espacio queda definida en diédrico por sus proyecciones ortogonales r_1 y r_2, sobre los planos de proyección. Si la recta r viniese definida por dos puntos A y B, se deberán hallar las proyecciones de dichos puntos $a_1(x_a, y_a)$ y $b_1(x_b, y_b)$ para componer $r_1 \equiv a_1b_1$ y $a_2(x_a, z_a)$ y $b_2(x_b, z_b)$ para componer $r_2 \equiv a_2b_2$.

Desde un punto de vista matemático, dados dos puntos diferentes A y B, definidos por sus coordenadas (x_a, y_a, z_a) y (x_b, y_b, z_b), respectivamente; es sabido que definen una recta y que es posible obtener sus ecuaciones, siendo únicamente necesarios dos puntos, o un vector y un punto (Ambos casos son equivalentes ya que con dos puntos se puede componer un vector). Las ecuaciones de la recta son las siguientes:

- Ecuación paramétrica de la recta (A partir de un punto x_o, y_o, z_o y un vector v_x, v_y, v_z):

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- Ecuación continua de la recta (Despejando el parámetro):

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + \lambda v_x \\ \\ y = y_0 + \lambda v_y \\ \\ z = z_0 + \lambda v_z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda = \frac{x-x_0}{v_x} \\ \\ \lambda = \frac{y-y_0}{v_y} \\ \\ \lambda = \frac{z-z_0}{v_z} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x-x_0}{v_x} = \frac{y-y_0}{v_y} = \frac{z-z_0}{v_z}$$

$$\frac{x-x_0}{v_x} = \frac{y-y_0}{v_y} = \frac{z-z_0}{v_z}$$

- Ecuaciones implícitas de la recta (Cogemos dos a dos las tres igualdades de las ecuación continua de la recta).

$$\frac{x-x_0}{v_x} = \frac{y-y_0}{v_y}$$
$$\frac{x-x_0}{v_x} = \frac{z-z_0}{v_z}$$
$$\frac{y-y_0}{v_y} = \frac{z-z_0}{v_z}$$

Caso General: Una recta R en el espacio tendría 3 proyecciones, r_1, r_2 y r_3, sobre los planos PH, PV y PP, respectivamente; y cuyas ecuaciones serían:

$$\frac{x-x_0}{v_x} = \frac{y-y_0}{v_y} \equiv r_1$$
$$\frac{x-x_0}{v_x} = \frac{z-z_0}{v_z} \equiv r_2$$
$$\frac{y-y_0}{v_y} = \frac{z-z_0}{v_z} \equiv r_3$$

En esta situación, una de las ecuaciones es combinación lineal de las otras dos, por lo que 2 proyecciones son suficientes para definir matemáticamente la recta. Decir además, que la recta de perfil, definida matemáticamente no lo está en diédrico, siendo éste el caso habitual para recurrir a la tercera proyección sobre un plano auxiliar de perfil.

Las regiones en las que alguna de las coordenadas de estas ecuaciones se hacen cero, son conocidas como ***trazas*** de la recta, y son los puntos de intersección entre los planos de proyección Horizontal o Vertical y la recta en cuestión (ver apartado 4.1).

Respecto al dibujo, las rectas no siempre se van a representar en el primer cuadrante. Para evitar confusiones, las proyecciones de la recta que se hallen fuera del primer cuadrante serán representadas mediante línea discontinua.

4.1 Trazas de la recta.

Las trazas de una recta se definen como los puntos de intersección entre la recta y los planos de proyección, Horizontal y Vertical. La traza sobre el plano Horizontal se designará como H y la traza sobre el plano Vertical como V. Los puntos traza de la recta siempre cumplen que para $z = 0$ en el caso de la traza horizontal, y $y = 0$ en el caso de la traza vertical. A continuación se desarrollan matemáticamente cada uno de los casos:

Traza Horizontal(z=0): $H \equiv \begin{cases} \frac{x-x_0}{v_x} = \frac{y-y_0}{v_y} \equiv r_1 \\ \frac{x-x_0}{v_x} = \frac{z-z_0}{v_z} \equiv r_2 \\ \frac{y-y_0}{v_y} = \frac{z-z_0}{v_z} \equiv r_3 \\ z = 0 \end{cases} \begin{cases} \frac{x-x_0}{v_x} = \frac{-z_0}{v_z} \\ \frac{y-y_0}{v_y} = \frac{-z_0}{v_z} \end{cases} \begin{cases} x = x_0 - \frac{v_x}{v_z} z_0 \\ y = y_0 - \frac{v_y}{v_z} z_0 \end{cases}$

Traza Vertical(y=0): $V \equiv \begin{cases} \frac{x-x_0}{v_x} = \frac{y-y_0}{v_y} \equiv r_1 \\ \frac{x-x_0}{v_x} = \frac{z-z_0}{v_z} \equiv r_2 \\ \frac{y-y_0}{v_y} = \frac{z-z_0}{v_z} \equiv r_3 \\ y = 0 \end{cases} \begin{cases} \frac{x-x_0}{v_x} = \frac{-y_0}{v_y} \\ \frac{-y_0}{v_y} = \frac{z-z_0}{v_z} \end{cases} \begin{cases} x = x_0 - \frac{v_x}{v_y} y_0 \\ z = z_0 - \frac{v_z}{v_y} y_0 \end{cases}$

4.2 Posiciones particulares.

La recta puede adoptar cualquier posición en el espacio, pudiendo guardar alguna relación con los planos de proyección. Las posiciones de la recta en sistema diédrico se definen como:

- Recta oblicua. $V_{AB} = (v_x, v_y, v_z)$, $(v_x, v_y, v_z \neq 0)$

$$\frac{x-x_0}{v_x} = \frac{y-y_0}{v_y} = \frac{z-z_0}{v_z}$$
$$\frac{x-x_0}{v_x} = \frac{y-y_0}{v_y} \equiv r_1$$
$$\frac{x-x_0}{v_x} = \frac{z-z_0}{v_z} \equiv r_2$$
$$\frac{y-y_0}{v_y} = \frac{z-z_0}{v_z} \equiv r_3$$

Figure 1: Representación espacial y diedrica de la recta oblicua.

- Recta horizontal. $V_{AB} = (v_x, v_y, 0),\ (v_x, v_y \neq 0)$

$$
\begin{aligned}
\frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y} &= \frac{z - z_0}{v_z} \\
\frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y} &\equiv r_1 \\
z = z_0 &\equiv r_2
\end{aligned}
$$

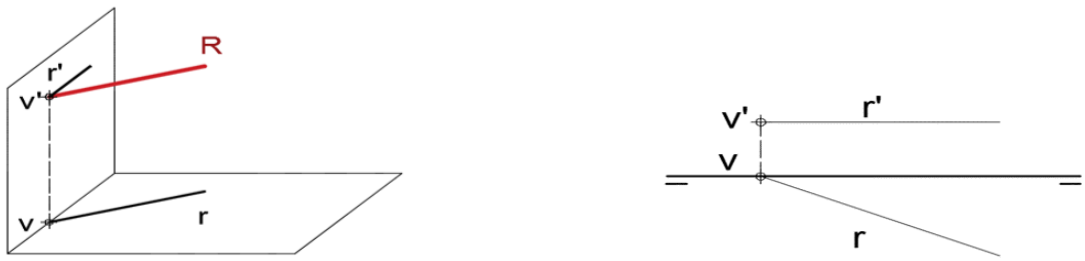


Figure 2: Representación espacial y diedrica de la recta horizontal.

- Recta frontal. $V_{AB} = (v_x, 0, v_z),\ (v_x, v_z \neq 0)$

$$
\begin{aligned}
\frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y} &= \frac{z - z_0}{v_z} \\
\frac{x - x_0}{v_x} = \frac{z - z_0}{v_z} &\equiv r_1 \\
y = y_0 &\equiv r_2
\end{aligned}
$$

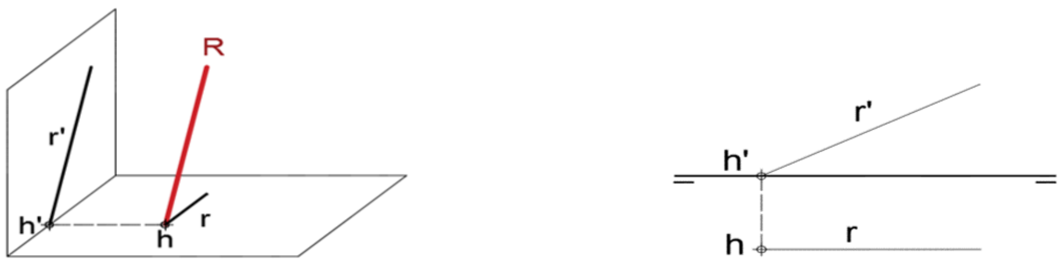


Figure 3: Representación espacial y diedrica de la recta frontal.

- Recta perfil. $V_{AB} = (0, v_y, v_z),\ (v_y, v_z \neq 0)$

$$
\begin{aligned}
\frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y} &= \frac{z - z_0}{v_z} \\
\frac{y - y_0}{v_y} = \frac{z - z_0}{v_z} &\equiv r_1 \\
x = x_0 &\equiv r_2
\end{aligned}
$$

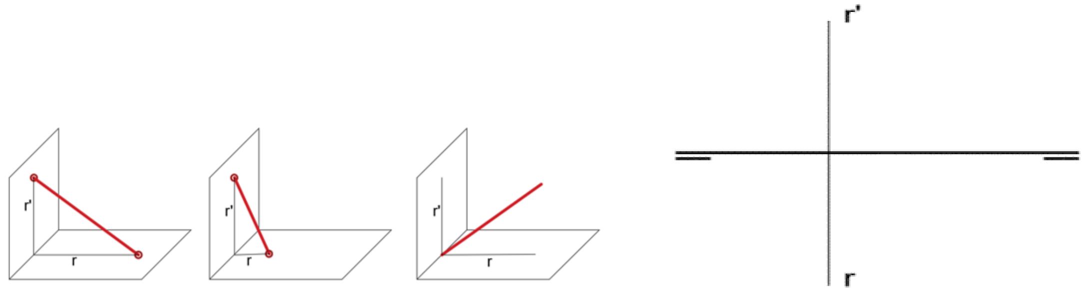


Figure 4: Representación espacial y diedrica de la recta de perfil.

Figure 5: Representación espacial y diedrica de la recta de perfil.

- Recta de punta. $V_{AB} = (0, v_y, 0),\ (v_y \neq 0)$

$$\frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y} = \frac{z - z_0}{v_z}$$
$$y = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R} \equiv r_1$$
$$x = x_0 \equiv r_2$$
$$z = z_0 \equiv r_3$$

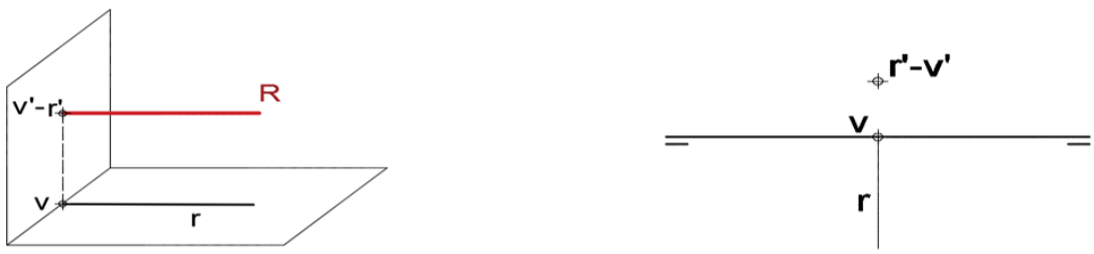


Figure 6: Representación espacial y diedrica de la recta de punta.

- Recta vertical. $V_{AB} = (0, 0, v_z),\ (v_z \neq 0)$

$$\frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y} = \frac{z - z_0}{v_z}$$
$$z = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R} \equiv r_1$$
$$x = x_0 \equiv r_2$$
$$y = y_0 \equiv r_3$$

Figure 7: Representación espacial y diedrica de la recta vertical.

- Recta paralela a la línea de tierra. $V_{AB} = (v_x, 0, 0),\ (v_x \neq 0)$

$$\frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y} = \frac{z - z_0}{v_z}$$
$$x = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R} \equiv r_1$$
$$y = y_0 \equiv r_2$$
$$z = z_0 \equiv r_3$$

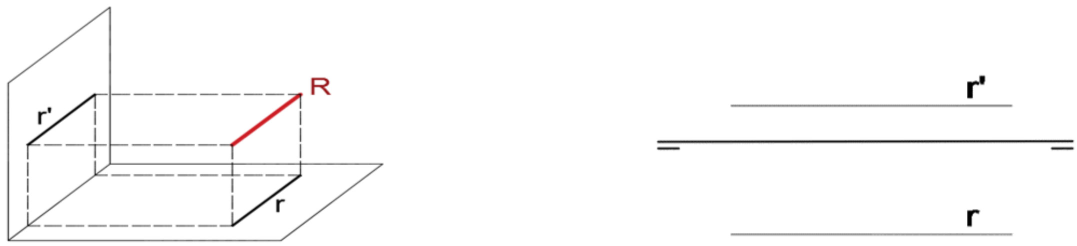


Figure 8: Representación espacial y diedrica de la recta paralela a la línea de tierra.

4.3 Pertenencia de un punto a una recta.

Para comprobar si un punto $A(x_A, y_A, z_A)$, de proyecciones $a_1(x_A, y_A)$ y $a_2(x_A, z_A)$, pertenece a una recta R, definida por un punto x_o, y_o, z_o y un vector v_x, v_y, v_z, se ha de constatar si dichas coordenadas del punto $A(x_A, y_A, z_A)$, verifican las tres ecuaciones del caso general.

$$\frac{x_A - x_0}{v_x} = \frac{y_A - y_0}{v_y}$$
$$\frac{x_A - x_0}{v_x} = \frac{z_A - z_0}{v_z}$$
$$\frac{y_A - y_0}{v_y} = \frac{z_A - z_0}{v_z}$$

Un punto no pertenecerá a una recta si las coordenadas del punto no cumplen, al menos, algunas de las ecuaciones implícitas de la recta.

5 Representación del plano.

Un plano queda definido por 3 puntos no alineados (A, B y C) con los que se puedan componer hasta tres vectores linealmente independientes AB (v), BC (w) o AC(u), de los cuales son necesarios 2 para determinar el plano.

- Ecuaciones paramétricas del plano (A partir de un punto x_o, y_o, z_o y dos vectores linealmente independientes v_x, v_y, v_z y w_x, w_y, w_z):

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} \text{, donde } \lambda \text{ , } \mu \in \mathbb{R}$$

Sea un plano P en el espacio, definido en diédrico por sus trazas horizontal, quedará definido por los puntos resultantes de la intersección de las líneas de trazas con los ejes de nuestro sistema de proyección (3 puntos no alineados).

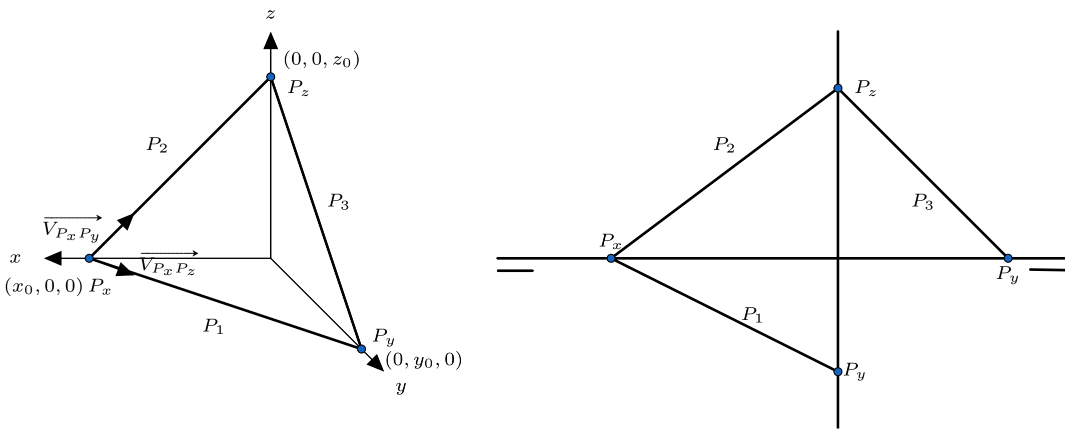


Figura 12. Proyecciones del alfabeto del punto.

De esta forma se obtienen 3 puntos no alineados necesarios para generar un plano. Para definir un plano serán por lo tanto necesarios, 1 punto y 2 vectores.

$$1\ punto = A, B \text{ o } C$$
$$2\ vectores = \begin{bmatrix} \overrightarrow{AC} = (v_x, v_y, v_z) \\ \overrightarrow{BC} = (w_x, w_y, w_z) \end{bmatrix}$$

En función de cada ejercicio, el orden de prioridad de los datos sería el siguiente para poder realizar el cálculo y hallar el plano.

$$\boxed{\mathrm{P}_x \rightarrow P_y \rightarrow P_z}$$
$$\boxed{\vec{V}_{P_x P_y} \rightarrow \vec{V}_{P_x P_z} \rightarrow \vec{V}_{P_y P_z}}$$

ECUACIONES IMPLÍCITAS DEL PLANO (1 punto y 1 vector normal)
A partir de los dos vectores que generan el plano, se puede obtener el vector normal ($\vec{n}$) al plano mediante el producto vectorial. El vector normal es perpendicular a los vectores anteriores.

$$\vec{n} = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BC} \begin{bmatrix} i & j & k \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{bmatrix}$$

Con un punto del plano y el vector normal $\vec{n}$ se obtiene la ecuación del plano.

Ecuación implícita del plano.

$$(x - x_0) \cdot n_x + (y - y_0) \cdot n_y + (z - z_0) \cdot n_z = 0 \equiv \alpha$$

5.1 Tipos de planos.

A continuación se van a representar los diferentes tipos de planos que pueden existir, junto con sus vectores normales.

- Plano horizontal. Su vector normal es el $(0, 0, 1)$.

$$(z - z_0) \cdot n_z = 0$$

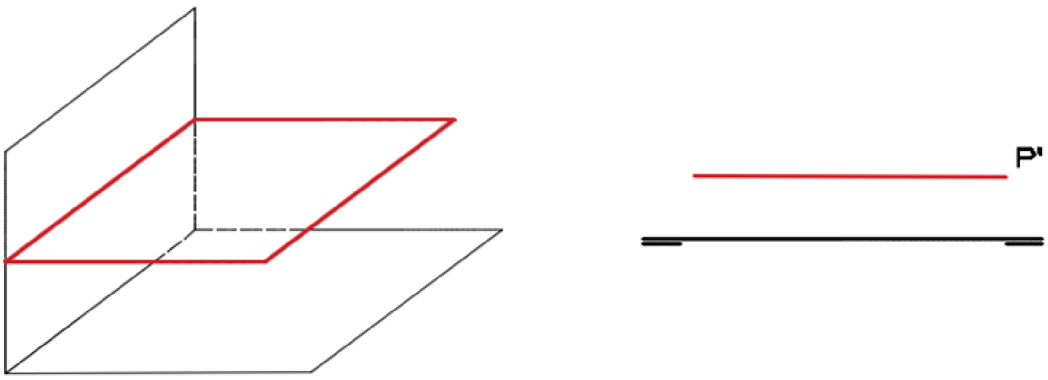


Figure 9: Representación espacial y diedrica del plano horizontal.

- Plano vertical. Su vector normal es el $(0, 1, 0)$.

$$(y - y_0) \cdot n_y = 0$$

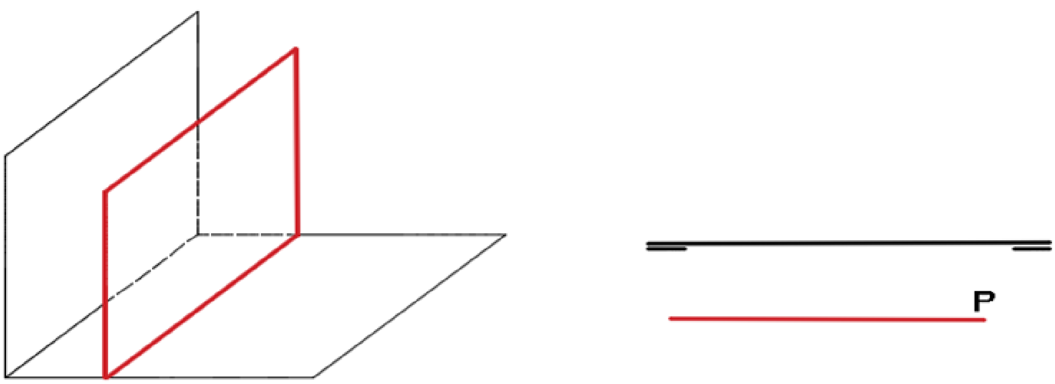


Figure 10: Representación espacial y diedrica del plano vertical.

- Plano perfil. Su vector normal es el $(1, 0, 0)$.

$$(x - x_0) \cdot n_x = 0$$

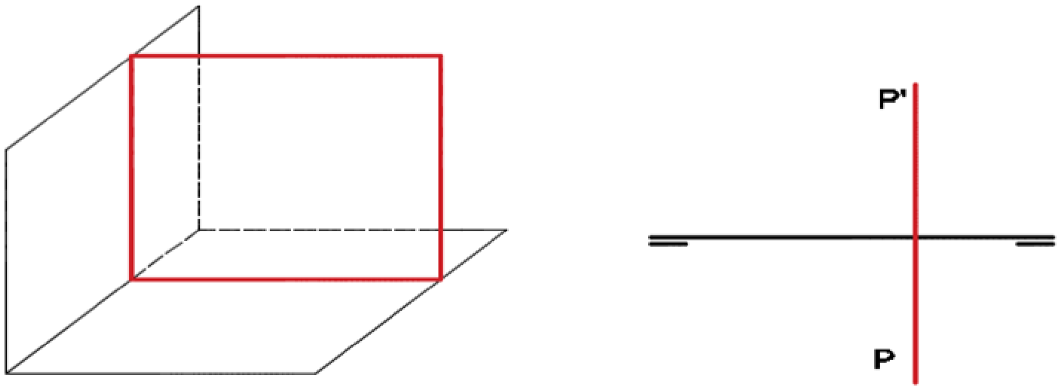


Figure 11: Representación espacial y diedrica del plano perfil.

- Plano genérico u oblicuo. Su vector normal es el (n_x, n_y, n_z).

$$(x - x_0) \cdot n_x + (y - y_0) \cdot n_y + (z - z_0) \cdot n_z = 0$$

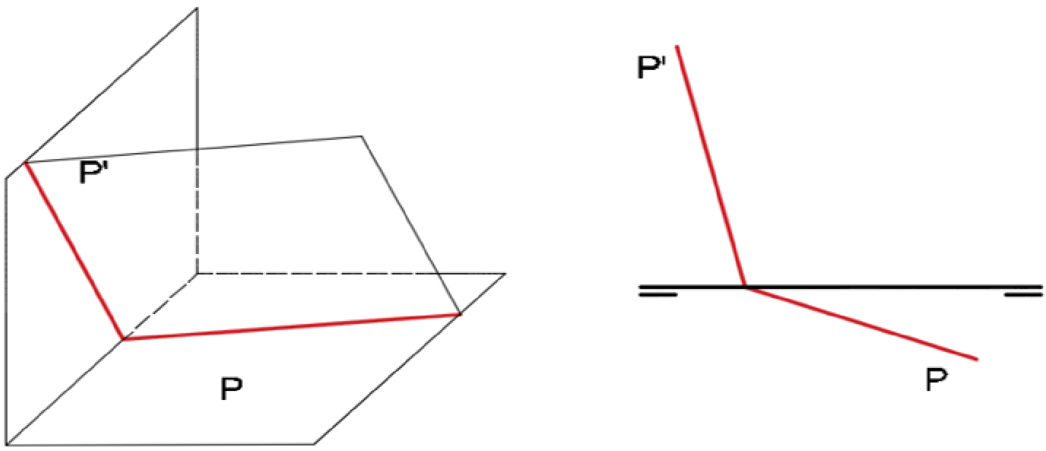


Figure 12: Representación espacial y diedrica del plano genérico/oblicuo.

- Plano proyectante vertical. Uno de los vectores que lo generan es perpendicular a la línea de tierra $(0, 1, 0)$, el otro debe de estar contenido en el plano.

$$(x - x_0) \cdot n_x + (y - y_0) \cdot n_y = 0$$

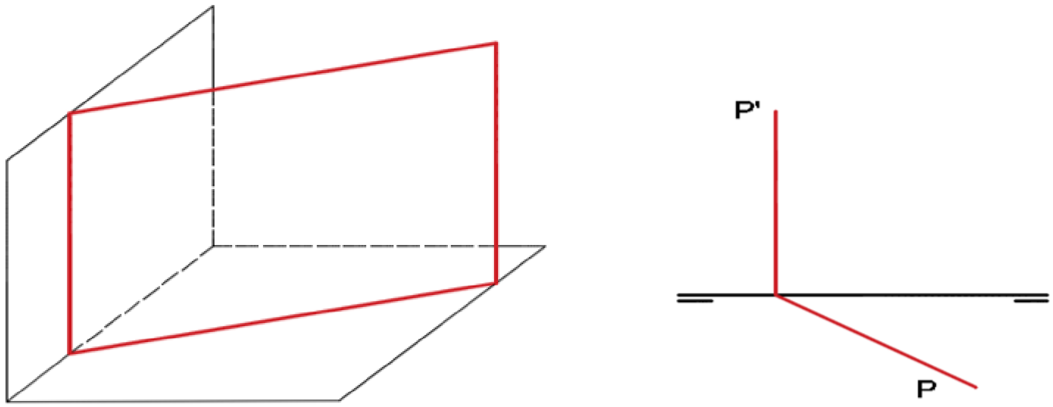


Figure 13: Representación espacial y diedrica del plano proyectante vertical.

- Plano proyectante horizontal. Uno de sus vectores que lo generan es perpendicular a la línea de tierra $(0, 0, 1)$, el otro debe de estar contenido en el plano.

$$(x - x_0) \cdot n_x + (z - z_0) \cdot n_z = 0$$

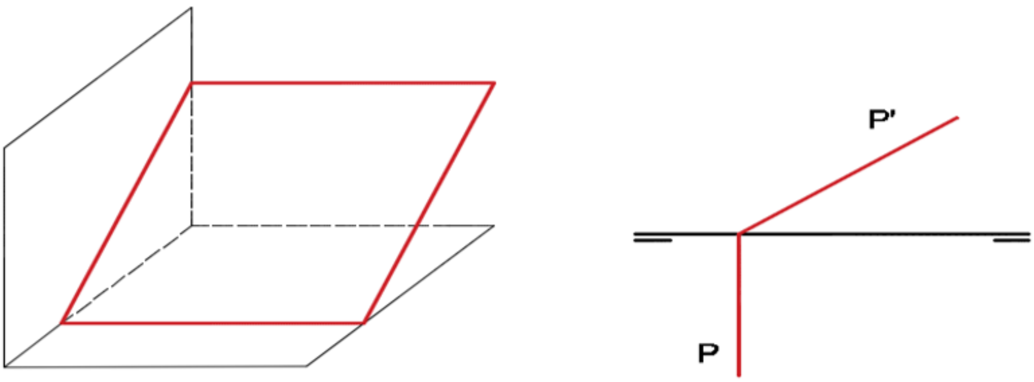


Figure 14: Representación espacial y diedrica del plano proyectante horizontal.

- Plano paralelo a la línea de tierra. Uno de sus vectores que lo generan es $(1, 0, 0)$, mientras que el otro vector posee dos trazas.

$$(y - y_0) \cdot n_y + (z - z_0) \cdot n_z = 0$$

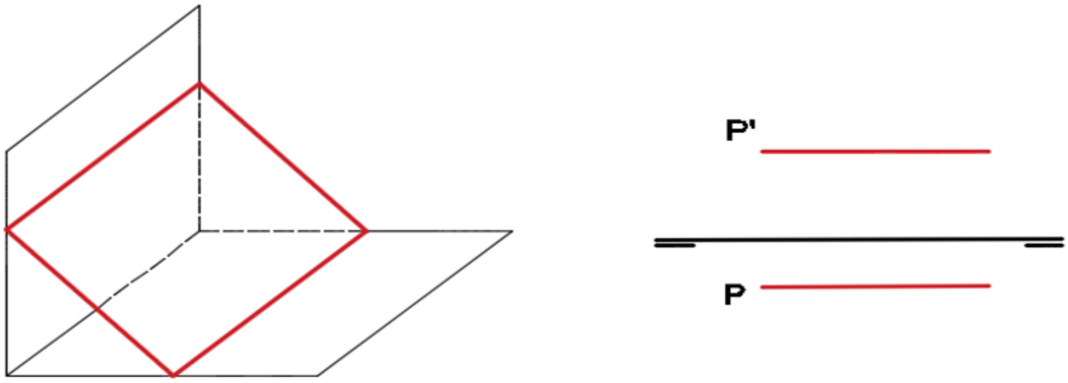


Figure 15: Representación espacial y diedrica del plano paralelo a la línea de tierra.

- Plano contenido en la línea de tierra. Uno de sus vectores que lo generan es $(0,0,1)$, mientras que el otro vector es "la tercera proyección".

$$(y-y_0)\cdot n_y+(z-z_0)\cdot n_z=0$$

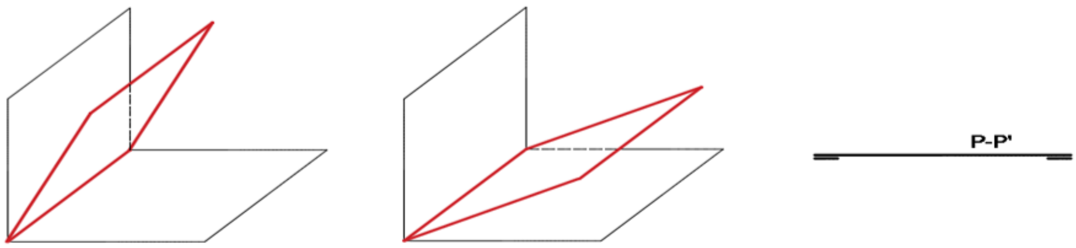


Figure 16: Representación espacial y diedrica del plano contenido en la línea de tierra.

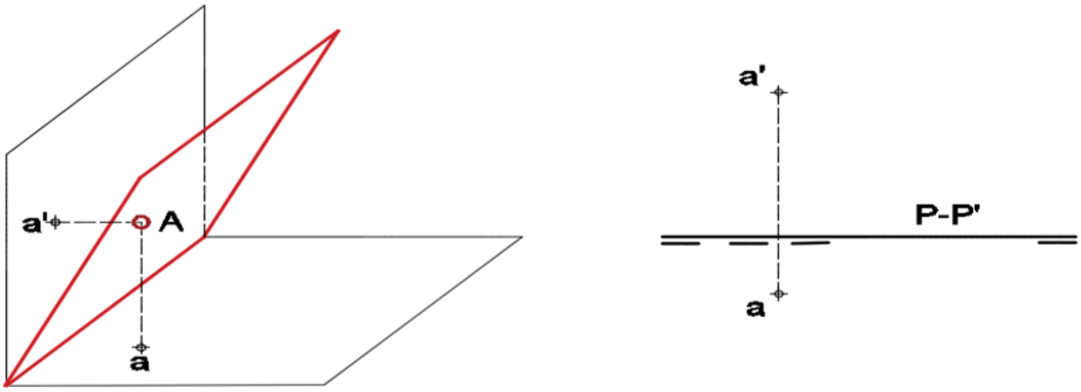


Figure 17: Representación espacial y diedrica del plano contenido en la línea de tierra.

  - Plano 1º Bisector. Las coordenadas de la tercera proyección (y,z) son iguales y además del mismo signo (mismo valor absoluto).
  - Plano 2º Bisector. Las coordenadas de la tercera proyección (y,z) son iguales en valor absoluto pero de distinto signo.

5.2 Pertenencias.

- Una recta pertenece a un plano: La dirección de la recta sea combinación lineal de los dos vectores que generan el plano.

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix}$$

o equivalentemente, rango de $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 2$

$$A = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{bmatrix} \underset{\text{Gauss}}{=} \begin{bmatrix} u'_x & / & / \\ 0 & v'_y & / \\ 0 & 0 & w'_z \end{bmatrix}$$

Obteniendo de este modo la forma escalón de la matriz, con pivotes, en la que el rango de A ha de ser 2 (rango$(A) = 2$, es decir, dos pivotes distintos de 0 $[u'_x, v'_y, w'_z]$).

- Un punto pertenece a un plano: $A \rightarrow (x_a, y_a, z_a) \in \alpha$ si al sustituir (x_a, y_a, z_a) en la ecuación implícita del plano se satisface $(x - x_0) \cdot n_x + (y - y_0) \cdot n_y + (z - z_0) \cdot n_z = 0 \equiv \alpha$

- También sería valido que el vector normal del plano sea perpendicular al vector director de la recta y además que un punto de la recta pertenezca al plano.

$$\begin{bmatrix} A \in r \quad \text{y} \quad A \in \alpha \\ \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \end{bmatrix}$$

6 Paralelismo y Perpendicularidad.

6.1 Paralelismo y Perpendicularidad.

1. **Paralelismo.**

- **Recta Paralela a otra.**
Dos rectas serán paralelas, si sus proyecciones son paralelas y recíprocamente. Se exceptúan las rectas de perfil, ya que las proyecciones de dichas rectas son idénticas en los planos horizontal y vertical, pero no tienen por que ser la misma en el plano perfil. Esto hará necesaria la representación en el plano perfil de las rectas para eliminar dicha incertidumbre.

Matemáticamente, si dos rectas son paralelas, sus vectores han de ser Linealmente Dependientes. Es decir, son proporcionales.

En el caso particular de una recta paralela al plano perfil, será necesario la proyección del perfil sobre el plano perfil, ya que nos generará una indeterminación que no se puede salvar visualmente (matemáticamente queda determinada por el vector director de la recta).

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv A + \vec{v_r} \\ s \equiv B + \vec{v_r} \end{array}\right\} \text{Ecuaciones de dos rectas paralelas}$$

Dos rectas son paralelas r y s son paralelas si tienen el mismo vector director unitario y no son coincidentes (existe B $\in$ s tal que B $\notin$ r).

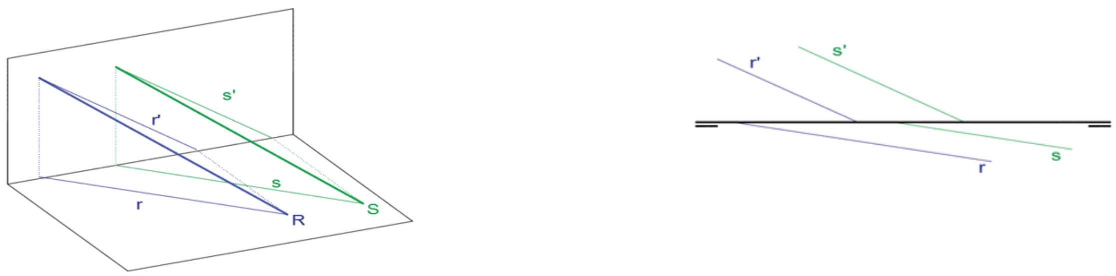


Figure 18: Representación espacial y diedrica del dos rectas paralelas.

- **Planos paralelos.**
Si dos planos son paralelos, sus trazas homónimas son paralelas.
Matemáticamente, para que dos planos sean paralelos, sus vectores normales deben de ser Linealmente Dependientes, es decir, ser proporcionales, pues ambas normales tienen la misma dirección.

Dos planos α y β son paralelos si:
(1) Existe A $\in \beta$ tal que A $\notin \alpha$ (no coincidentes) y :
  (a) Tienen el mismo vector normal unitario.

(b) Los vectores u_1 y u_2 sean combinaciones lineales de v_1 y v_2:

$$\begin{aligned} \text{rango}(u_1|u_2) &= 2 \\ \text{rango}(v_1|v_2) &= 2 \\ \text{rango}(u_1|u_2|v_1|v_2) &= 2 \end{aligned}$$

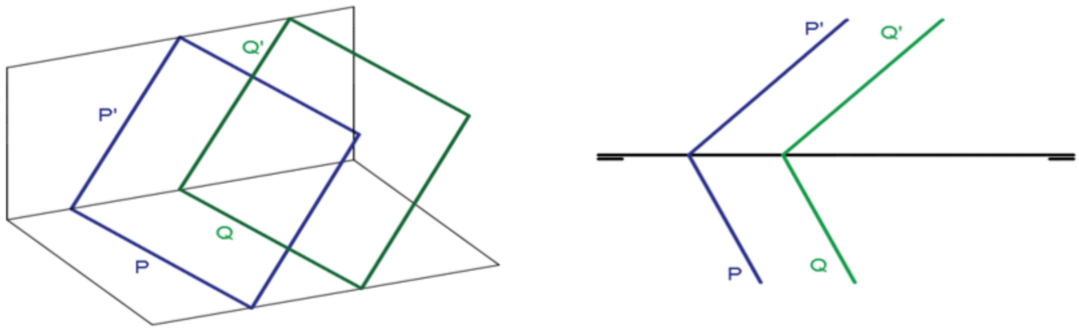


Figure 19: Representación espacial y diedrica del dos planos paralelos.

- **Recta Paralela a plano.**
  Una recta y un plano son paralelos si dicha recta es paralela a otra recta contenida en el plano.

  Matemáticamente se verifica si el producto escalar entre el vector normal al plano y el vector director de la recta es nulo, es decir, son perpendiculares entre si.

  Otra forma de determinarlo es conociendo que cualquier dirección que sea combinación lineal de las direcciones del plano, formará una recta paralela al plano dado un punto cualquiera del espacio.

  $$\vec{v} \rightarrow \text{vector director de la recta}$$

  $$\vec{v} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \;\text{ para cualquier }\; \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

  Existe A∈r tal que A$\notin \alpha$ y:

  - $\vec{v}$ es combinación lineal de u_1 y u_2.
  - El vector normal al plano es normal al vector director de la recta. $\vec{N} \cdot \vec{v} = 0$, es decir, son perpendiculares.

Figure 20: Representación espacial del paralelismo entre recta y plsno.

2. **Perpendicularidad.**
   - **Teoremas de perpendicularidad.**
     - Si una recta r es perpendicular a un plano, es perpendicular a todas las rectas contenidas en el.
     - **Teorema de las tres perpendicularidades.** Si dos rectas son perpendiculares y una de ellas es paralela a un plano o pertenece a él, sus proyecciones ortogonales sobre el plano son perpendiculares
   - **Recta perpendicular al plano.**
     La condición de perpendicularidad entre la recta y el plano es que las proyecciones de dicha recta sean perpendiculares a las trazas del plano. Es decir, que la ecuación de las proyecciones de la recta y las trazas de plano sean nulas al realizar el producto escalar.

     r es perpendicular al plano α si el vector director unitario de la recta es el mismo que el vector normal unitario al plano. ($\vec{n} = \vec{v}$)
   - **Plano perpendicular a otro.**
     Geométricamente, es posible demostrar que cualquier plano que pase por una recta que este contenida en otro plano, son perpendiculares.

     - El vector normal de uno tiene que ser perpendicular al vector normal del otro: ($\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0$).
     - El vector normal de uno ($\vec{n_1}$) sea combinación lineal de los vectores del otro ($\vec{n_2}$). (rango($\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{n_1}$) = 2).
   - **Recta perpendicular a otra.**
     Para que una recta sea perpendicular a otra, se contendrá una de las rectas en un plano, generando de este modo la trazas del plano. A continuación, se trazan las proyecciones de la recta perpendiculares a las trazas, siendo esta recta perpendicular a la contenida en el plano.

     El vector director de una de las rectas tiene que ser perpendicular al vector director de la otra ($\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$). De esta condición derivan dos casos:
     - **Que las rectas se intersecten.** Se ha de verificar que exista un punto en común entre ambas rectas. Es decir, que al plantear un sistema de ecuaciones con las dos rectas, exista una solución y esta sea un punto (existe A $\in$ r tal que A $\in$ s).
     - **Que las rectas se crucen.** Se ha de verificar que no exista ningún punto en común entre ambas rectas. Es decir, que al plantear un sistema de ecuaciones con ambas rectas, no exista una solución (existe A $\in$ r tal que A $\notin$ s).
   - **Perpendicular común a dos rectas que se cruzan.**
     Sean dos rectas r_1 y r_2, calculo $\vec{n}$ de forma que:

     $$\left.\begin{array}{l} \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \\ \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \end{array}\right\}$$

     Genero el plano que conforman $\vec{v}$ y $\vec{n}$ (π_1). Intresectamos este plano π_1 con la recta de dirección $\vec{u}$ y me de un punto A.
     La recta perpendicular común es la recta que pasa por A y tiene como vector director $\vec{n}$.

6.2 Elementos notables.

1. **Línea de máxima pendiente.**

   Esta recta es la que forma 90° con respecto a la traza horizontal del plano. Para calcularla se ha de seguir el siguiente procedimiento:

   Sea A un punto del plano y $\vec{\omega}$ el vector director de la traza horizontal de dicho plano, se debe de hallar un punto que cumpla generar una recta perpendicular con la traza horizontal y que pase por A.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{\omega} = (x_a - x_b, y_a - y_b, z_a - z_b) \cdot (\omega_x, \omega_y, \omega_z) = 0$$

   Una vez se tiene $\overrightarrow{AB}$ y el punto A, se construye la línea de máxima pendiente con las ecuaciones de la recta:

$$\frac{x - x_a}{v_x} = \frac{y - y_a}{v_y} \equiv r_1$$
$$\frac{x - x_a}{v_x} = \frac{z - z_a}{v_z} \equiv r_2$$
$$\frac{y - y_a}{v_y} = \frac{z - z_a}{v_z} \equiv r_3$$

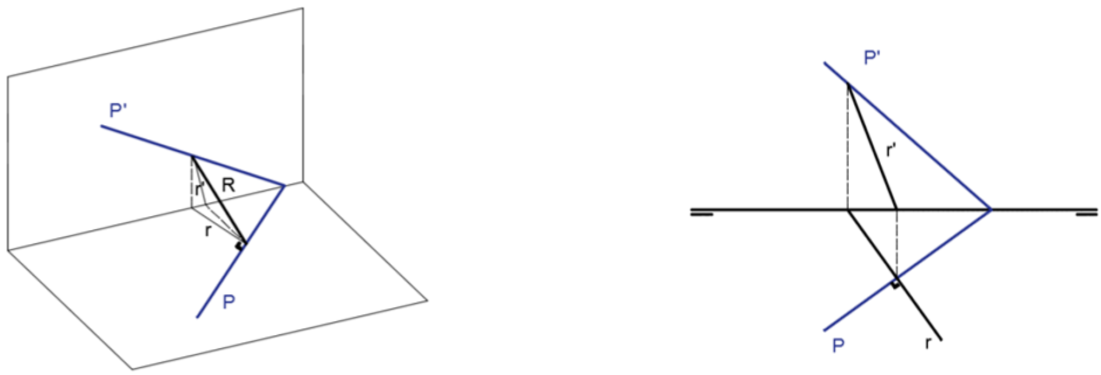


Figure 21: Representación espacial y diedrica de la recta de máxima pendiente.

2. **Línea de máxima inclinación.**

   Esta recta es la que forma un ángulo de 90° con respecto a la traza vertical del plano.

   Sea A un punto del plano y $\vec{\omega}$ el vector director de la traza vertical de dicho plano, se debe de hallar un punto B que cumpla generar una recta perpendicular con la traza vertical y que pase por A.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{\omega} = (x_a - x_b, y_a - y_b, z_a - z_b) \cdot (v_x, v_y, v_z) = 0$$

   Una vez se tiene $\overrightarrow{AB}$ y el punto B, se construye la línea de máxima pendiente con las ecuaciones de la recta:

$$\frac{x - x_a}{v_x} = \frac{y - y_a}{v_y} \equiv r_1$$
$$\frac{x - x_a}{v_x} = \frac{z - z_a}{v_z} \equiv r_2$$
$$\frac{y - y_a}{v_y} = \frac{z - z_a}{v_z} \equiv r_3$$

3. **Recta Horizontal/Vertical que pasa por el punto A de un plano oblicuo y esta contenida en este.**

7 Distancias

7.1 Distancia entre dos puntos A y B.

La distancia entre ambos puntos es fácilmente cuantificable mediante el uso de la formula de la distancia entre dos puntos:

$$d = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 + (z_a - z_b)^2}$$

Si se quisiera realizar dicha medida sobre el dibujo, sería necesario abatir la recta para poder medir sobre su verdadera magnitud.

7.2 Distancia de un punto a una recta.

Se halla trazando una perpendicular a dicha recta que pase por dicho punto. Esto se logra obteniendo un vector perpendicular al vector director de la recta al emplear los puntos A y B como restricción y realizando el producto escalar.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{\omega} = (x_a - x_b, y_a - y_b, z_a - z_b) \cdot (\omega_x, \omega_y, \omega_z) = 0$$

Siendo $\vec{\omega}$ el vector director y A el punto que tengo externo a la recta y B el que busco en la recta. Con el punto B que se obtiene de la intersección de ambas rectas se vuelve a aplicar a ecuación para la distancia entre dos puntos.

$$d = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 + (z_a - z_b)^2}$$

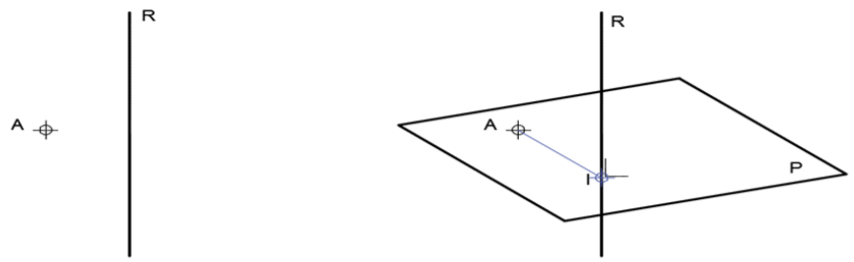


Figure 22: Distancia entre un punto y una recta.

7.3 Distancia de un punto a un plano.

Empleando el vector normal al plano y las coordenadas del punto A en cuestión, se usan las ecuaciones de la recta para sacar una recta perpendicular al plano que pase por el punto A.

$$\frac{x - x_a}{n_x} = \frac{y - y_a}{n_y} \equiv r_1$$
$$\frac{x - x_a}{n_x} = \frac{z - z_a}{n_z} \equiv r_2$$
$$\frac{y - y_a}{n_y} = \frac{z - z_a}{n_z} \equiv r_3$$

$$(x - x_a) \cdot n_x + (y - y_a) \cdot n_y + (z - z_a) \cdot n_z = 0$$

Las coordenadas del punto B del plano se obtendrán como resultado del sistema de ecuaciones generado entre el plano y la recta generada por el punto A y el vector normal del plano.
Una vez tengo las coordenadas del punto de intersección, vuelvo a aplicar la formula de la distancia entre dos puntos.

$$d = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 + (z_a - z_b)^2}$$

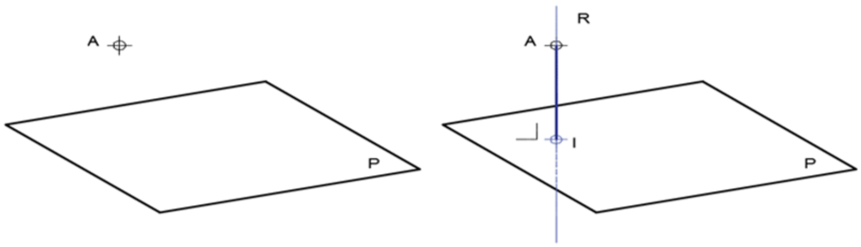


Figure 23: Distancia de un punto a un plano.

7.4 Distancia entre rectas paralelas.

Genero un plano empleando el vector director de una de las rectas como vector normal del plano, generando dos puntos de intersección, A y B, entre el plano y cada una de las rectas. Una vez tengo esto, vuelvo a aplicar la ecuación para la distancia entre dos puntos.

$$(x - x_a) \cdot n_x + (y - y_a) \cdot n_y + (z - z_a) \cdot n_z = 0$$

$$\frac{x - x_0}{n_x} = \frac{y - y_0}{n_y} \equiv r_1$$
$$\frac{x - x_0}{n_x} = \frac{z - z_0}{n_z} \equiv r_2$$
$$\frac{y - y_0}{n_y} = \frac{z - z_0}{n_z} \equiv r_3$$

$$d = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 + (z_a - z_b)^2}$$

Otro método sería el siguiente, con el vector director de la recta r y el del plano α que contiene a ambas rectas, genero un tercer vector perpendicular a ambos $\vec{t}$ y contenido en el plano. A continuación se elige un punto cualquiera A de una de la rectas y se genera una recta con dicho punto y el vector $\vec{t}$. La intersección de esta recta perpendicular a la otra nos dará un punto B.

$$\frac{x - x_0}{t_x} = \frac{y - y_0}{t_y} \equiv r_1$$
$$\frac{x - x_0}{t_x} = \frac{z - z_0}{t_z} \equiv r_2$$
$$\frac{y - y_0}{t_y} = \frac{z - z_0}{t_z} \equiv r_3$$

Finalmente se calcula la distancia entre A y B.

$$d = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 + (z_a - z_b)^2}$$

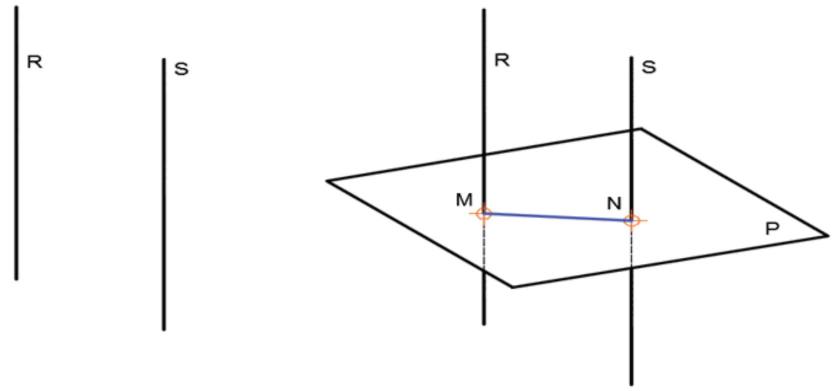


Figure 24: Distancia entre dos rectas paralelas

7.5 Distancia entre planos paralelos.

Empleo un punto cualquiera A de uno de los planos y su vector normal para generar una recta perpendicular al mismo. Dicha recta cortará a ambos planos perpendicularmente, por lo que se emplean los puntos de intersección, A y B, para hallar la distancia entre ambos planos mediante el uso de la ecuación de la distancia entre puntos.

$$(x - x_a) \cdot n_x + (y - y_a) \cdot n_y + (z - z_a) \cdot n_z = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{x - x_a}{n_x} &= \frac{y - y_a}{n_y} \equiv r_1 \\ \frac{x - x_a}{n_x} &= \frac{z - z_a}{n_z} \equiv r_2 \\ \frac{y - y_a}{n_y} &= \frac{z - z_a}{n_z} \equiv r_3 \end{aligned}$$

$$d = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 + (z_a - z_b)^2}$$

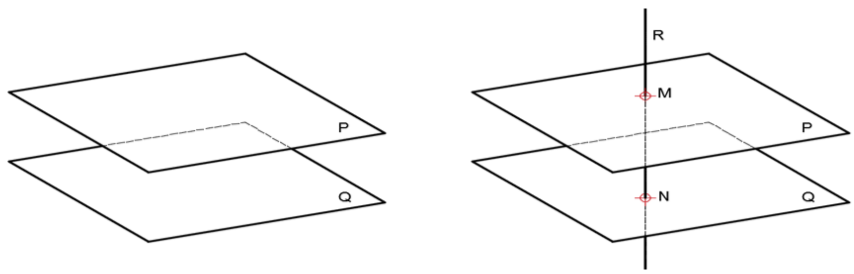


Figure 25: distancia entre dos plano paralelos

7.6 Distancia entre rectas que se cruzan.

Sean dos rectas r_1 y r_2, calculo $\vec{n}$ de forma que:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \\ \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \end{array}\right\}$$

Genero el plano que conforman $\vec{v}$ y $\vec{n}$ (π_1). Intresectamos este plano π_1 con la recta de dirección $\vec{u}$ y me de un punto A.
La recta perpendicular común es la recta que pasa por A y tiene como vector director $\vec{n}$.
Para sacar la distancia entre las dos rectas se tendrá que coger la perpendicular que pasa por A y corta a la recta con dirección $\vec{v}$ y se saca el punto B. La distancia será AB.

$$d = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 + (z_a - z_b)^2}$$

8 Intersecciones

8.1 Entre rectas:

Dos rectas en el mismo plano se cortan en un punto si no son coincidentes y el sistema de ecuaciones formado par las ecuaciones implícitas de una de la otra tenga solución (única).

$$\mathrm{I} \equiv \left\{ \begin{array}{l} r \equiv \frac{x-x_0}{n_x} = \frac{y-y_0}{n_y} = \frac{z-z_0}{n_z} \\ s \equiv \frac{x-x_0}{n_x} = \frac{y-y_0}{n_y} = \frac{z-z_0}{n_z} \end{array} \right\} \rightarrow \text{Sol. Unica} \qquad I(x_I, y_I, z_I)$$

Dos rectas distintas en el espacio pueden cortarse dando como intersección un punto, pueden ser paralelas (no se cortan) o se pueden cruzar (tampoco se cortan).

8.2 Entre dos planos:

Dos planos no paralelos y no coincidentes se cortan en una recta cuyas ecuaciones implícitas son las ecuaciones de un plano α y las de otro plano β.

$$\mathrm{i} \equiv \left\{ \begin{array}{l} \alpha \equiv (x-x_0)\cdot n_x + (y-y_0)\cdot n_y + (z-z_0)\cdot n_z = 0 \\ \beta \equiv (x-x_0)\cdot n_x + (y-y_0)\cdot n_y + (z-z_0)\cdot n_z = 0 \end{array} \right.$$

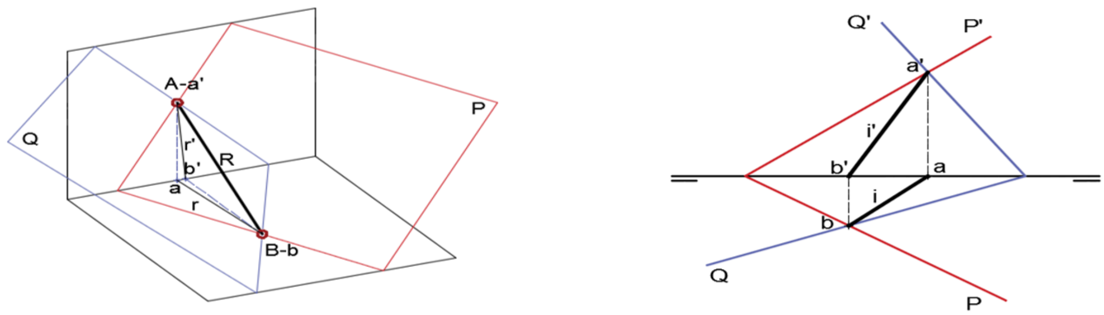


Figure 26: Representación espacial y diedrica del plano proyectante vertical.

Casos particulares.

- Intersección de planos de perfil.
- Intersección de un plano oblicuo con un plano proyectante.

8.3 Entre una recta y un plano:

Dado un plano y una recta r que no esté contenida en él ni sea paralela al mismo, la solución única del sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones implícitas del plano y de la recta.

$$\mathrm{i} \equiv \left\{ \begin{array}{c} \alpha \equiv (x-x_0)\cdot n_x + (y-y_0)\cdot n_y + (z-z_0)\cdot n_z = 0 \\ r \equiv \frac{x-x_0}{n_x} = \frac{y-y_0}{n_y} = \frac{z-z_0}{n_z} \end{array} \right. \rightarrow \text{Sol. Unica} \qquad I(x_I, y_I, z_I)$$

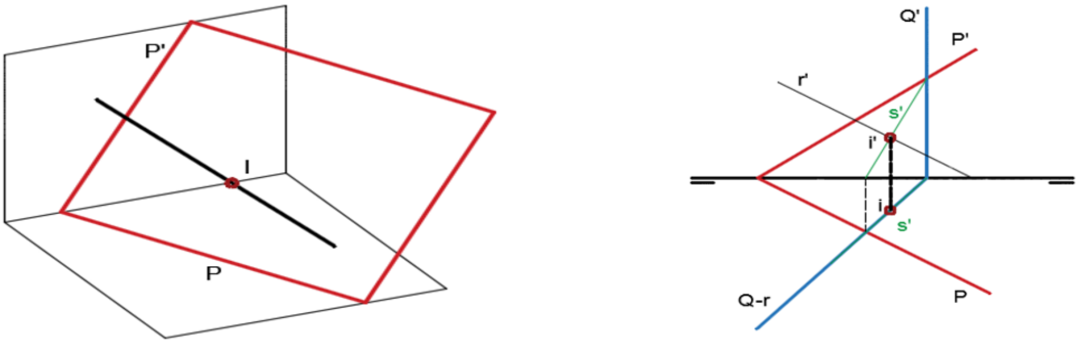


Figure 27: Representación espacial y diedrica del plano proyectante vertical.

Caso particular al plano perfil: Se proyectan la recta y el plano en el plano de perfil y la intersección de ambas trazas es la proyección de la intersección (I) en el plano perfil.

9 Ejercicios Recta.

(1) Recta definida por 2 puntos.

(a) En el primer cuadrante.

$$\begin{array}{ll} A=(3,5,8) & -3x+2y=1 \\ B=(1,2,4) & -4x+2z=4 \\ \vec{v}=(-2,-3,-4) & -4y+3z=4 \end{array}$$

(b) En el segundo cuadrante.

$$\begin{array}{lr} A=(2,-3,3) & -2x+y=-7 \\ B=(2,-5,3) & z=3 \\ \vec{v}=(0,6,-6) & z=3 \end{array}$$

(c) En el segundo y cuarto cuadrante.

$$\begin{array}{lr} A=(3,5,8)\in 2^{o}C & x=2 \\ B=(1,2,4)\in 4^{o}C & x=2 \\ \vec{v}=(-2,-3,-4) & y+z=0 \end{array}$$

(2) Pertenecen los puntos a la recta?.

$$\begin{array}{lrr} A=(2,0,2) & x-y=2 & K=(4,2,1) \\ B=(6,4,0) & x+2z=6 & L=(3.5,0,1.5) \\ \vec{v}=(4,4,-2) & y+2z=4 & J=(3,-2,-1) \end{array}$$

(3) Modelado de rectas notables.

(a) Recta general.

$$\begin{array}{lr} A=(5,3,0) & -x+y=-2 \\ B=(2,0,3) & x+z=5 \\ \vec{v}=(-3,-3,3) & y+z=3 \end{array}$$

(b) Recta Horizontal.

$$\begin{array}{lr} A=(5,6,3) & x+y=5 \\ B=(2,3,3) & z=3 \\ \vec{v}=(-3,3,0) & z=3 \end{array}$$

(c) Recta frontal.

$$\begin{array}{lr} A=(5,3,0) & y=3 \\ B=(2,3,3) & x+z=5 \\ \vec{v}=(-3,0,3) & y=3 \end{array}$$

(d) Recta de punta.

$$\begin{aligned} A &= (2,0,3) & x &= 2 \\ B &= (2,4,3) & z &= 3 \\ \vec{v} &= (0,4,0) & y &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(e) Recta vertical.

$$\begin{aligned} A &= (1,2,3) & x &= 1 \\ B &= (1,2,0) & y &= 2 \\ \vec{v} &= (0,0,-3) & z &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(f) Recta de perfil 1 (Contenida en el primer bisector).

$$\begin{aligned} A &= (2,0,3) & x &= 2 \\ B &= (2,2,0) & x &= 2 \\ \vec{v} &= (0,2,-3) & 3y + 2z &= 6 \end{aligned}$$

(g) Recta de perfil 2 (contenida en un plano paralelo a la línea de tierra).

$$\begin{aligned} A &= (2,0,0) & x &= 2 \\ B &= (2,3,3) & x &= 2 \\ \vec{v} &= (0,3,3) & z &= 3 \end{aligned}$$

(h) Recta paralela a la línea de tierra.

$$\begin{aligned} A &= (2,3,3) & y &= 3 \\ B &= (4,3,3) & z &= 3 \\ \vec{v} &= (2,0,0) & x &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(i) Recta en el segundo diedro.

$$\begin{aligned} A &= (2,0,6) & -3x - 4y &= -6 \\ B &= (6,-3,0) & -3x - 2z &= -18 \\ \vec{v} &= (4,-3,-6) & -2y + z &= 9 \end{aligned}$$

(4) Determinación de trazas.

(a) Recta que pasa por tres diedros..

$$\begin{aligned} A &= (2,-4,6) & 4x - 3y &= 20 \\ B &= (8,4,-3) & -3x - 2z &= 18 \\ \vec{v} &= (6,8,9) & -9y - 8z &= -12 \end{aligned}$$

Si $y = 0$, entonces de las ecuaciones obtengo que los valores de x e y son, $x = 5$ y $z = 1.5$, siendo la posición de la traza vertical las coordenadas $(5, 0, 1.5)$. Para $z = 0$, los valores de x e y serán, $x = 6$ y $y = \frac{4}{3}$, siendo las coordenadas de la traza horizontal $(6, \frac{4}{3}, 0)$.

(b) Recta que pasa por dos diedros.

$$\begin{aligned} A &= (2,4,3) & -4x - 3y &= -20 \\ B &= (8,-4,3) & z &= 3 \\ \vec{v} &= (6,-8,0) & z &= 3 \end{aligned}$$

Si $y = 0$, entonces de las ecuaciones obtengo que los valores de x e y son, $x = 5$ y $z = 3$, siendo la posición de la traza las coordenadas $(5, 0, 3)$. Está es una traza vertical, debido a que la coordenada y se hace 0.

(5) Recta que pase por un punto A y sea perpendicular al plano P.

(6) Recta que pase por un punto A y sea paralela a una recta r.

$$\begin{aligned} A &= (1,2,3) & x &= 1 \in t_1 \\ B &= (1,2,0) & y &= 2 \in t_1 \\ \vec{v} &= (0,0,-3) & z &\in \mathbb{R} \in t_1 \\ C &= (3,6,5) & y &= 2 \in t_2 \end{aligned}$$

Sabiendo que el vector $\vec{v} = (0, 0, -3)$ puede ser usado como vector libre, por lo que podremos emplearlo como vector director de ambas rectas.Sustituyendo en las ecuaciones de la recta, podremos deducir las ecuaciones de la recta r_2, pues de esta tenemos ya un punto, y el vector director.

$$\begin{aligned} \frac{x - x_0}{v_x} &= \frac{y - y_0}{v_y} \equiv r_1 \\ \frac{x - x_0}{v_x} &= \frac{z - z_0}{v_z} \equiv r_2 \\ \frac{y - y_0}{v_y} &= \frac{z - z_0}{v_z} \equiv r_3 \end{aligned}$$

Las cuales quedarían de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{x - 3}{0} &= \frac{y - 6}{0} \\ \frac{x - 3}{0} &= \frac{z - 5}{-3} \\ \frac{y - 6}{0} &= \frac{z - 5}{-3} \end{aligned}$$

De lo que obtendré:

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \\ -3x + 9 &= 0 \\ -3y + 18 &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto mi recta t_2, paralela a t_1, será:

$$\begin{aligned} x &= 3 \\ y &= 6 \\ z &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(7) Recta contenida en la línea de tierra.

$$\begin{array}{ll} A = (2,0,0) & y = 0 \\ B = (6,0,0) & z = 0 \\ \vec{v} = (4,0,0) & x \in \mathbb{R} \end{array}$$

(8) Recta contenida en el segundo bisector.

(a) Primer bisector.

$$\begin{array}{lr} A = (8,0,0) & 4x + 5y = 32 \\ B = (3,4,4) & 4x + 5z = 32 \\ \vec{v} = (-5,4,4) & y - z = 0 \end{array}$$

(b) Segundo bisector.

$$\begin{array}{lr} A = (3,0,0) & x = 3 \\ B = (3,4,-4) & x = 3 \\ \vec{v} = (0,4,-4) & -y - z = 0 \end{array}$$

(9) Dada una recta, determinar sus trazas. "Ver ejercicio (4)"

10 Ejercicios Plano.

(1) Dados tres puntos no alineados, obtener el plano definido por dichos puntos.

$$
\begin{aligned}
A &= (1, 2, 3) \\
B &= (3, 1, 2) \\
C &= (2, 3, 1)
\end{aligned}
$$

De estos puntos obtengo los vectores:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= (2, -1, -1) \\
\overrightarrow{AC} &= (1, 1, -2)
\end{aligned}
$$

De los que obtengo el vector normal al plano,

$$\vec{n} = (3, 3, 3) = (1, 1, 1)$$

Una vez obtenido esto, sustituyo en la ecuación implícita del plano el vector normal y uno de los puntos,

$$(x-1) \cdot 1 + (y-2) \cdot 1 + (z-3) \cdot 1 = 0$$

Obteniendo de este modo la ecuación del plano.

$$x + y + z - 6 = 0$$

(2) Punto + recta.

Con el punto A y la recta R, generada a partir de los puntos B y C, tengo,

$$
\begin{aligned}
A &= (1, 2, 3) \\
B &= (3, 1, 2) \\
C &= (2, 3, 1) \\
\overrightarrow{AB} &= (2, -1, -1) \\
\overrightarrow{BC} &= (-1, 2, -1) \\
r(BC) &\equiv \left\{ \begin{array}{r} 2x + y = 7 \\ -x + z = -1 \\ -y - 2z = -5 \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

Con los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ obtengo el vector normal al plano,

$$\vec{n} = (3, 3, 3) = (1, 1, 1)$$

Una vez obtenido esto, sustituyo en la ecuación implícita del plano el vector normal y uno de los puntos,

$$(x-1) \cdot 1 + (y-2) \cdot 1 + (z-3) \cdot 1 = 0$$

Obteniendo de este modo la ecuación del plano.

$$x + y + z - 6 = 0$$

(3) Dos Rectas que se cortan.

Con las dos rectas tengo dos vectores directores, e igualándolas, obtengo el punto de corte, con lo que puedo sacar el vector normal y el punto c del plano

$$\begin{aligned} A &= (1,2,3) \\ B &= (3,1,2) \\ C &= (2,3,1) \\ \overrightarrow{AB} &= (2,-1,-1) \\ \overrightarrow{BC} &= (-1,2,-1) \\ r_1(AB) &\equiv \begin{cases} -x-2y=-5 \\ -x-2z=-7 \\ -y+z=1 \end{cases} \\ r_2(BC) &\equiv \begin{cases} 2x+y=7 \\ -x+z=-1 \\ -y-2z=-5 \end{cases} \end{aligned}$$

Con los vectores de r_1 y r_2 obtengo la normal al plano

$$\vec{n} = (3,3,3) = (1,1,1)$$

Una vez obtenido esto, sustituyo en la ecuación implícita del plano el vector normal y uno de los puntos,

$$(x-1)\cdot 1 + (y-2)\cdot 1 + (z-3)\cdot 1 = 0$$

Obteniendo de este modo la ecuación del plano.

$$x+y+z-6=0$$

(4) Dos rectas paralelas.

Con las dos rectas tengo dos vectores directores, e igualándolas, obtengo el punto de corte, con lo que puedo sacar el vector normal y el punto c del plano

$$\begin{aligned} A &= (1,2,3) \\ B &= (4,5,6) \\ C &= (3,2,1) \\ \overrightarrow{AB} &= (0,-2,0) \\ \overrightarrow{BC} &= (-1,-3,-5) \\ r_1(A) &\equiv \begin{cases} -3x+y=-1 \\ -5x+z=-2 \\ -5y+3z=-1 \end{cases} \\ r_2(BC) &\equiv \begin{cases} -3x+y=-7 \\ -5x+z=-14 \\ -5y-3z=-7 \end{cases} \end{aligned}$$

Con los vectores de r_1 y $\overrightarrow{AC}$ obtengo la normal al plano

$$\vec{n} = (5,0,-1)$$

Una vez obtenido esto, sustituyo en la ecuación implícita del plano el vector normal y uno de los puntos,

$$(x-1)\cdot 5+(y-2)\cdot 0+(z-3)\cdot(-1)=0$$

Obteniendo de este modo la ecuación del plano.

$$5x-z-2=0$$

(5) Trazar un plano que contenga al punto A y pase por la línea de tierra.

Dispongo del punto A y el vector $\overrightarrow{AOrigen}$ contenido en el plano. También se que la recta contenida en la línea de tierra esta contenida en el plano, luego su vector director es $\vec{v}=(1,0,0)$.

$$\begin{aligned} A &= (1,2,3) \\ \overrightarrow{AO} &= (1,2,3) \end{aligned}$$

Con el vector $\overrightarrow{AO}$ y el $\vec{v}$, obtengo el vector normal al plano.

$$\vec{n}=(0,-3,2)$$

Una vez obtenido esto, sustituyo en la ecuación implícita del plano el vector normal y uno de los puntos,

$$(x-1)\cdot 0+(y-2)\cdot(-3)+(z-3)\cdot 2=0$$

Obteniendo de este modo la ecuación del plano.

$$-3y+2z=0$$

(6) Dada la recta R trazar un plano proyectante vertical que contenga a R

Con 2 puntos A y B tengo una recta que va a estar contenida en el plano. Conozco también que uno de los vectores unitarios del plano es $\vec{v}=(0,1,0)$.

$$\begin{aligned} A &= (4,2,6) \\ B &= (6,5,0) \\ \overrightarrow{AB} &= (2,3,-6) \\ \vec{v} &= (0,1,0) \\ r(AB) &\equiv \begin{cases} 3x-2y=8 \\ -3x-z=-18 \\ -2y-z=-10 \end{cases} \end{aligned}$$

Uso el vector unitario y y el de la recta para sacar el vector normal,

$$\vec{n}=(6,0,2)=(3,0,1)$$

Una vez obtenido esto, sustituyo en la ecuación implícita del plano el vector normal y uno de los puntos de la recta,

$$(x-4)\cdot 3+(y-2)\cdot 0+(z-6)\cdot 1=0$$

Obteniendo de este modo la ecuación del plano.

$$3x+z-18=0$$