

Título: COORDINACIÓN Y NIVELACIÓN DE LA MATERIA “TEORIA DE MECANISMOS Y MÁQUINAS” EN LOS GRADOS DE INGENIERÍA INDUSTRIAL

Raúl Martín García

Departamento de Ingeniería Industrial e Ingeniería Civil, Escuela Politécnica Superior de Algeciras

raul.martin@uca.es

RESUMEN:

Teoría de Mecanismos y Máquinas (TMM) es una materia troncal de segundo curso de Grado de Ingeniería en Tecnologías Industriales (GITI) y de los grados especialistas en Ingeniería Mecánica (GIM), en Ingeniería Eléctrica (GIE) y en Ingeniería en Electrónica Industrial (GIEI), que se imparten en muchas escuelas de ingeniería a nivel nacional, aunque en este artículo nos situamos en la Escuela Politécnica Superior de Algeciras (EPS) y en el área de conocimiento de Ingeniería Mecánica (AIM) perteneciente al Departamento de Ingeniería Industria e Ingeniería Civil de la Universidad de Cádiz.

A través de un Proyecto de Innovación Docente aprobado por la Comisión de Innovación Docente de la UCA se consigue mejorar la coordinación de TMM en el Plan de Estudios tanto horizontal como vertical. Ello conlleva un conjunto de propuestas de cambio tanto en la estructura como en la programación (fundamentalmente con el temario) de la asignatura. También se consiguen unos apuntes de nivelación necesarios para que los alumnos comiencen a cursar la asignatura con garantías de éxito. Ambos logros deben repercutir en las tasas de éxito y de rendimiento de TMM.

PALABRAS CLAVE: Coordinación vertical y horizontal, nivelación de contenidos, teoría de mecanismos y máquinas.

INTRODUCCIÓN

Desde que se implantaron los nuevos planes de estudios en la EPS, los profesores que hemos impartido TMM hemos detectado un conjunto de **debilidades** que queremos tratar de eliminar (o al menos minimizar) con este proyecto, y que son las siguientes:

1. La mayoría de alumnos llegan a la asignatura con una **ausencia de contenidos básicos** (requisitos previos) relacionados con materias de primer curso, sobre todo de Física, aunque también de Matemáticas y Expresión Gráfica. Esto dificulta que puedan afrontar la asignatura con éxito desde su inicio.
2. **El elevado número de alumnos** matriculados (95 en el curso 2017/18, 104 en el curso 2018/19) dificulta un sistema de evaluación continua con una metodología docente activa en la que el alumno sea protagonista de su aprendizaje (enseñanza más personalizada).
3. Las **tasas de éxito y de rendimiento** están por debajo de la media de las titulaciones en las que se imparten en la EPS, tal y como muestra la tabla siguiente.

Asignatura	Tasa de Éxito	Tasa de Rendimiento
	Curso 2016/17	Curso 2016/17
TMM GITI	0,38	0,21
TMM GIM	0,77	0,63
TMM GIEI	0,40	0,22
TMM GIE	0,40	0,27

Tabla 1. Tasas de éxito y de rendimiento de TMM.

Para abordar estos tres puntos se llevaron a cabo las siguientes acciones:

- Coordinación horizontal y vertical dentro del plan de estudios, para evitar repetir contenidos y valorar la

utilidad de nuestra materia para otras asignaturas relacionadas directamente con TMM, teniendo siempre presente la memoria oficial del título. Como resultado revisamos la estructura (ficha 1A) y la programación (ficha 1B: objetivos, metodología, temario, actividades prácticas, sistema de evaluación, etc.) proponiendo cambios de cierta relevancia.

- Diseño de un documento a modo de apuntes que recoge los contenidos de **Nivelación** necesarios para que el alumnado pueda afrontar y seguir la asignatura con ciertas garantías de éxito. Para ello será fundamental la labor de COORDINACION vertical “hacia abajo” con los profesores de las materias de primer curso referidas.

La experiencia y los resultados obtenidos en este proyecto permitirían la mejora de las tasas de éxito y rendimiento en cursos posteriores. Asimismo, los resultados de estos indicadores no se podrán empezar a medir en su totalidad hasta la conclusión del curso 2018/19, cuando las medidas de mejora propuestas se pongan en práctica.

Por último y en relación con las líneas de acción principales recogidas en la convocatoria de Innovación Docente a la que pertenece este proyecto, éste tiene relación directa con:

- Cómo colaborar entre profesores para enriquecer la actividad docente en el aula.
- Cómo optimizar la dedicación del profesor y la de los alumnos.
- Cómo coordinar actividades entre asignaturas para optimizar el aprendizaje.

ESTRUCTURA Y CONTENIDO DE TMM

En los planes de estudios anteriores a los Grados existía en los primeros cursos de ingeniería una asignatura de mecánica general, antesala de asignaturas como TMM. Con la implantación de los Grados esta asignatura sorprendentemente desapareció a pesar de aumentar en un curso las titulaciones de ingeniería técnica que pasaron de tres a cuatro años. Los profesores del AIM denunciarnos y advertimos en su momento de las consecuencias que tendría esta decisión para la formación en ingeniería mecánica en los nuevos títulos. Es evidente que ello ha perjudicado a TMM en la ausencia de contenidos básicos (requisitos previos) relacionados con materias de primer curso referidas en el apartado anterior.

Actualmente TMM presenta en la EPS los siguientes datos relacionados con su estructura de créditos (ficha 1A) en ambas escuelas de ingeniería: 7,5 créditos ECTS de los cuales 5,25 son créditos teóricos (A) y 2,25 son créditos teórico-prácticos (X).

Sin embargo, esta misma asignatura en la Escuela Superior de Ingeniería presenta una distribución de créditos y una programación diferentes, a pesar de compartir las mismas memorias de títulos de Grado.

COORDINACIÓN HORIZONTAL Y VERTICAL

La metodología empleada para coordinar TMM ha sido la siguiente:

- Se obtuvo la lista de asignaturas relacionadas con TMM de la memoria de los títulos donde se imparte (GITI, GIM, GIEI y GIE). Se recopiló información prestando especial importancia al programa (contenidos) y al profesorado responsable.
- Se organizó una reunión a modo de entrevista con cada profesor responsable de las asignaturas relacionadas con TMM y que se muestran en la figura siguiente.

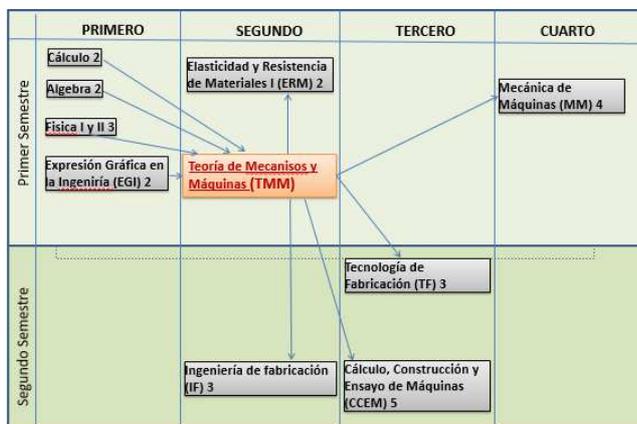


Figura 1. Relación de TMM con otras asignaturas.

Las Asignaturas implicadas son:

- Cálculo, Álgebra, Física I, Física II.
- Elasticidad y Resistencia de Materiales I.
- Ingeniería de Fabricación.
- Tecnología de Fabricación.
- Cálculo, Construcción y Ensayo de Máquinas.
- Mecánica de Máquinas.

La documentación empleada para las reuniones de coordinación fue la siguiente:

- Memorias de los títulos.
- Ficha 1B de las asignaturas implicadas.
- Ejemplo de ejercicios y exámenes.

El objetivo de las reuniones con cada profesor consistió en buscar debilidades a través del diálogo y de los documentos correspondientes (contenidos que faltan, repetidos o inadecuados, etc.) entre TMM y las asignaturas relacionadas, que permitiera proponer las correspondientes acciones de mejora.

Para cada objetivo se obtuvieron los siguientes resultados:

Objetivo 1.

En la tabla siguiente se recoge el compromiso con el primer objetivo.

Objetivo nº 1	Coordinar verticalmente "hacia abajo" la materia TMM con las materias relacionadas en cada uno de sus planes de estudios de la EPS
Indicador de seguimiento o evidencias:	Cambios relevantes en la estructura (ficha 1A). Cambios relevantes en la programación (ficha 1B).
Valor numérico máximo que puede tener el indicador:	Sin valor máximo en el número de cambios. Número de cambios relevantes y justificados en la estructura. Número de cambios relevantes y justificados en la programación. Resultado de la encuesta de valoración (de 0 a 5).

Tabla 2. Información sobre el Objetivo 1.

Los resultados obtenidos son los siguientes:

Ficha 1A (estructura a partir del curso 2018/19):

Sí se considera necesario realizar cambios relevantes en la estructura (ficha 1A) dotando a TMM de al menos 0,5 crédito de actividad práctica tipo C (prácticas de informática) a costa de los créditos tipo X. Estos créditos se dedicarían al manejo de software tipo OCTAVE, DERIVE y WINMECC.

Ficha 1B (programación a partir del curso 2018/19):

Sí se considera necesario realizar los siguientes cambios:

- Se reduce el temario eliminando los temas 1 (Sistemas de Fuerzas) y 2 (Equilibrio), cuyos contenidos se van a impartir en su totalidad en la asignatura Física de primer curso. Los contenidos de momentos de inercia y de centro de gravedad también se eliminan del temario. Esto permitirá que haya tiempo para impartir la asignatura en su totalidad (en el curso actual se quedaron sin impartir varios apartados del último tema por falta de tiempo).

- Se reduce el temario eliminando los apartados:
7.2.3. Principio de superposición.
7.2.4. Método gráfico analítico de las tensiones.
- Si se autorizan los 0,5 créditos tipo C, estos se emplearán en actividades prácticas del software Octave y/o Matlab recomendado por los colegas del departamento de Matemáticas como herramienta de cálculo para TMM.
- Se corrige la falta formativa de los alumnos a la hora de representar la curva cicloide y las curvas polinomiales, necesarias en el tema dedicado al estudio de los mecanismos de levas en TMM.

Objetivo 2:

En la tabla siguiente se recoge el compromiso con el segundo objetivo.

Objetivo nº 2	<i>Coordinar TMM horizontalmente y verticalmente "hacia arriba" con las materias relacionadas en cada uno de sus planes de estudios de la EPS</i>
Indicador que empleará para cuantificar la consecución de objetivos:	Cambios relevantes en la estructura (ficha 1A). Cambios relevantes en la programación (ficha 1B). Valoración mediante encuesta.
Valor numérico máximo que puede tener el indicador:	Sin valor máximo en el número de cambios. Número de cambios relevantes y justificados en la estructura. Número de cambios relevantes y justificados en la programación. Resultado de la encuesta de valoración (de 0 a 5).

Tabla 3. Información sobre el Objetivo 1.

Los resultados obtenidos son los siguientes:

Ficha 1A (estructura a partir del curso 2018/19):

No se considera necesario realizar cambios relevantes en la estructura (ficha 1A).

Ficha 1B (programación a partir del curso 2018/19):

Sí se considera necesario realizar los siguientes cambios:

- Se comparten ejercicios del tema dedicado a Análisis de Estructuras con la asignatura del mismo semestre Elasticidad y Resistencia de Materiales, de manera que estos ejercicios se empiecen a desarrollar en TMM y terminen de hacerlo en ERMI a nivel de diseño.
- Se comparten ejercicios prácticos relacionados con los mecanismos de trenes de engranajes y de barras articuladas relacionados con las máquinas herramientas (torno y limadora Witworth, respectivamente) con las cuales realizarán prácticas los alumnos en Ingeniería de Fabricación (4º semestre) y en Tecnología de Fabricación (5º semestre).
- Se fomentará la resolución de diagramas de cuerpo libre de cierta complejidad como requisito para poder abordar las asignaturas relacionadas con la mecánica de máquinas de tercero y cuarto curso.

Una vez obtenida la propuesta de acciones de mejora, queda su implementación la cual no se podrá hacer efectiva hasta el curso próximo 2018/19. Será entonces cuando se puedan comparar las tasas de éxito y de rendimiento "antes y después de".

Objetivo 3:

En la tabla siguiente se recoge el compromiso con el tercer objetivo comprometido.

Objetivo nº 3	<i>Diseñar unos apuntes de NIVELACION cuyo estudio permita al alumnado afrontar la asignatura con garantías</i>
Indicador que empleará para cuantificar la consecución de objetivos:	Calidad, adecuación y nivel de comprensión de los apuntes. Aportaciones personales de los encuestados.
Valor numérico máximo que puede tener el indicador:	Encuesta a realizar a los profesores con vinculación permanente del Área de Ingeniería Mecánica donde valoren de 0 a 5 la calidad, adecuación y nivel de comprensión del documento "Apuntes de Nivelación para Teoría de Mecanismos y Máquinas", donde además se puedan recoger sus opiniones y aportaciones personales que lo enriquezcan aún más.

Tabla 4. Información sobre el Objetivo 1.

Como resultado de las reuniones realizadas en la parte de coordinación, se recopiló la información necesaria para a partir de los apuntes disponibles de cursos anteriores, sintetizar el documento Apuntes de Nivelación para Teoría de Mecanismos y Máquinas, sometido a valoración por los dos profesores del área de conocimiento en la EPS.

TASAS DE ÉXITO Y DE RENDIMIENTO

Las acciones de mejora propuestas con el desarrollo de este proyecto se empezarán a implementar para el curso 2018/19. Hasta final del primer semestre (febrero de 2019) no se empezará a disponer de las tasas de éxito y de rendimiento que permitan valorar en su totalidad la utilidad del proyecto, siendo necesario esperar a la convocatoria de septiembre para obtener las tasas definitivas.

No obstante, durante el presente curso este profesor (que imparte por primera vez esta asignatura de forma solitaria) ha añadido un nuevo objetivo no incluido en la solicitud inicial, para abordar a corto plazo el problema de las tasas de éxito y de rendimiento, improvisado una serie de acciones (consensuadas con el alumnado) en el sistema de evaluación. Las acciones han consistido en:

- Realizar tres exámenes parciales eliminatorios (octubre, diciembre y enero) durante el curso que sirvieran de motivación para seguir la asignatura. A los alumnos que quedaran con algún parcial pendiente examinarlos nuevamente.
- Repetir los exámenes finales de las tres convocatorias oficiales, para estimular al alumnado a seguir y aprovechar la asignatura.

El 100% de los alumnos opinaron que esta forma de evaluación, no prevista inicialmente en la programación de la asignatura, ha facilitado su seguimiento y aprovechamiento. El elevado número de alumnos matriculados (95 en el curso 2017/18, 104 en el curso 2018/19) dificulta un sistema de evaluación continua con una metodología docente activa en la que el alumno sea protagonista de su aprendizaje (enseñanza más personalizada). Se hace por tanto necesario el examen como la base del sistema de evaluación, y tener más oportunidades supone un factor de motivación importante para el alumnado.

Con esta simple, pero laboriosa acción, este profesor ha conseguido mejorar las tasas tal y como se muestra en la tabla siguiente.

Asignatura ²	Tasa de Éxito		Tasa de Rendimiento	
	Curso 2016/17	Curso 2017/18	Curso 2016/17	Curso 2017/18
TMM GITI	0,38	0,55	0,21	0,34
TMM GIM	0,77	0,50	0,63	0,30
TMM GIEI	0,40	0,42	0,22	0,33
TMM GIE	0,40	0,26	0,27	0,15

Tabla 5. Tasas de éxito y de rendimiento TMM

Los datos del curso 2016/17 son oficiales. Los referidos al curso 2017/18 se hacen públicos al cerrar el curso académico. Por ello, estos datos se han obtenido teniendo en cuenta los resultados de las convocatorias de febrero y junio, por lo que todavía tienen margen de mejora con la convocatoria de septiembre, sin la cual ya se observa mejoras en las titulaciones de GITI y de GIEI.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Atendiendo a los objetivos marcados inicialmente en el proyecto de innovación docente desarrollado:

- Se ha coordinado verticalmente y horizontalmente la asignatura TMM de las titulaciones de la EPS atendiendo a los objetivos marcados, afectando a cambios en la estructura y contenidos.
- Se han confeccionado unos apuntes de nivelación para garantizar que el alumnado pueda afrontar y seguir la asignatura con éxito.
- Se mantendrá el sistema de evaluación continua basado en exámenes parciales y repetición de finales mientras la asignatura siga teniendo un elevado número de alumnos.
- Se vuelve a denunciar públicamente, y así se remitirá a las autoridades correspondientes, los efectos negativos consecuencia de eliminar en los títulos de Grado la materia tradicional de primer curso dedicada a la mecánica general, y que tanto está afectando a las tasas de éxito y de rendimiento de TMM. Esta nueva denuncia será apoyada por los compañeros de la Escuela Superior de Ingeniería (con la cual compartimos títulos) ya que en momento también lo denunciaron y tienen el mismo problema que nosotros con TMM.

ANEXOS

sol-201700083058-tra_Anexo1.pdf

AGRADECIMIENTOS

A los profesores de la EPS que han colaborado y permitido obtener los resultados de este proyecto:

- Cálculo, Álgebra: Prof. D. JOSE CARLOS CAMACHO MORENO

- Física I, Física II: Profa. Dña. MARÍA ARECELI GARCÍA YAGUE
- Elasticidad y Resistencia de Materiales I: Prof. D. MIGUEL ÁNGEL MANCHA GARCÍA
- Ingeniería de Fabricación, Tecnología de Fabricación: Prof. D. AMANDO HERRERO GONZÁLEZ
- Cálculo, Construcción y Ensayo de Máquinas; Mecánica de Máquinas: Prof. D. ANTONIO ILLANA MARTOS

APUNTES DE NIVELACION PARA TEORÍA DE MECANISMOS Y MÁQUINAS

AUTOR:

Raúl Martín García

**Área de Ingeniería Mecánica
DPTO. DE INGENIERÍA INDUSTRIAL E I. CIVIL**

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR DE ALGECIRAS

Presentación

Estos apuntes han sido confeccionados por el profesor D. Raúl Martín García exclusivamente para la asignatura Teoría de Mecanismos y Máquinas de segundo curso del Grado de Ingeniería en Tecnologías Industriales y del Grado en Ingeniería Mecánica de la Escuela Politécnica Superior de la Universidad de Cádiz. Su objeto es servir como apuntes de nivelación para que los alumnos puedan repasarlo (supuestamente han desarrollado estos conceptos en la materia Física de primer curso) antes del comienzo de la asignatura y puedan así abordarla con mayores garantías.

Cualquier observación sobre el texto dirigida a la mejora del mismo será agradecida y atendida por el autor. Pueden dirigirse a raul.martin@uca.es.

A continuación se muestra una guía de los objetivos académicos a conseguir por el alumno con el estudio de cada tema.

LISTA DE OBJETIVOS ACADÉMICOS.

TEMA 1. SISTEMA DE FUERZAS.

- Manejo de diferentes unidades de fuerza según sistema empleado.
- Representar vectorialmente y gráficamente cualquier fuerza o sistema de fuerzas en el plano y en el espacio.
- Conocer los diferentes tipos de fuerzas según su criterio de clasificación.
- Conocer y aplicar el Principio de Transmisibilidad.
- Concepto de sólido o cuerpo rígido.
- Obtener coordenadas y ángulos directores de una fuerza.
- Sumar fuerzas analítica o gráficamente.
- Concepto y cálculo del momento de una fuerza respecto a un punto cualquiera del plano o espacio mediante varias formas (entre ellas Teorema de varignon). Saber las condiciones que anulan dicho momento.
- Concepto y cálculo del momento de una fuerza respecto a un eje cualquiera del plano o espacio mediante varias formas (entre ellas como la proyección de momento respecto a un punto del eje). Saber las condiciones que anulan dicho momento.
- Concepto de "par de fuerzas", y conocer sus propiedades.
- Saber simplificar un sistema plano de fuerzas y conocer sus propiedades.
- Saber simplificar un sistema espacial de fuerzas y conocer sus propiedades.
- Resolver problemas relacionados con los objetivos anteriores.

TEMA 2. EQUILIBRIO DEL CUERPO RIGIDO.

- Tener claro el concepto de equilibrio y su relación con la aceleración y los sistemas inerciales.

- Conocer y entender los tipos de soportes y anclajes y sus correspondientes reacciones, tanto en el plano como en el espacio.
- Saber obtener el diagrama de cuerpo libre de un cuerpo rígido o parte de éste.
- Conocer las diferentes categorías de equilibrio según las características del sistema de cargas actuante, tanto en el plano como en el espacio.
- Conocer y aplicar las condiciones (de diferentes formas) necesarias para que un cuerpo esté en equilibrio, en el plano o en el espacio. En definitiva saber resolver un problema general de equilibrio isoestático.
- Saber ligar un cuerpo al plano, teniendo claro para ello los conceptos de ligadura parcial o impropia.
- Saber diferenciar entre problemas de equilibrio hiperstático e isostático, y su relación con el objetivo anterior.
- Saber resolver problemas de equilibrio en el plano gráficamente empleando el polígono de fuerzas.
- Resolver problemas relacionados con los objetivos anteriores.

TEMA 3. CENTROS DE GRAVEDAD Y MOMENTOS DE INERCIA

- Concepto de fuerza distribuida y conocimiento de su tipología.
- Manejo de cargas distribuidas para la resolución de problemas de equilibrio. Aplicar a vigas.
- Diferenciar entre centro de gravedad y centro de masa.
- Distinguir entre centroide y centro de gravedad.
- Saber calcular centroides de cualquier línea espacial, superficie espacial, figura plana o volumétrica, ya sea por sumatorios o por integración.
- Saber calcular centro de gravedad de cualquier cuerpo, referido a cualquier sistema de coordenadas, ya sea por sumatorios o por integración.
- Obtener desenvoltura en el manejo de tablas de centroides y centros de gravedad para la resolución de casos compuestos.
- Conocer los Teoremas de Pappus-Guldin y sus ventajas. Saber aplicarlos convenientemente.
- Saber calcular el momento de inercia por integración para casos sencillos.
- Conocer la relación entre momento de inercia y los perfiles de vigas de construcción.
- Conocer y saber aplicar el Teorema de Steiner.
- Manejar adecuadamente las tablas de momento de inercia para los cuerpos más conocidos.
- Resolver problemas relacionados con los objetivos anteriores.

ÍNDICE GENERAL

TEMA 1. SISTEMAS DE FUERZAS (Páginas 1 a 25)

TEMA 2. EQUILIBRIO DEL CUERPO RÍGIDO (Páginas 26 a 53)

TEMA 3. CENTROS DE GRAVEDAD Y MOMENTOS DE INERCIA (Páginas 54 a 89)

TEMA 1. SISTEMAS DE FUERZAS

- 1.1. FUERZAS, CONCEPTOS PRINCIPALES.
- 1.2. COORDENADAS Y ÁNGULOS DIRECTORES DE UNA FUERZA.
- 1.3. MOMENTO DE UNA FUERZA RESPECTO A UN PUNTO.
- 1.4. MOMENTO DE UNA FUERZA RESPECTO A UN EJE.
- 1.5. PAR DE FUERZAS. SISTEMA FUERZA-PAR.
- 1.6. SISTEMAS PLANOS DE FUERZAS Y SU SIMPLIFICACION.
- 1.7. SISTEMAS ESPACIALES DE FUERZA Y SU SIMPLIFICACION.
- 1.8. EJERCICIOS RESUELTOS.

1.1. FUERZA, CONCEPTOS PRINCIPALES.

Fuerza

- es la **acción mecánica** ejercida por un cuerpo sobre otro (tirón, "empuje", carga, ...)
- Unidades de fuerza:

$$1 \text{ Kg} = 9,81 \text{ N}$$

Conversión De Unidades Inglesas a S. I.	
Equivale a:	
1 Lbm	0,453592 Kg
1 Slug	14,5939 Kg

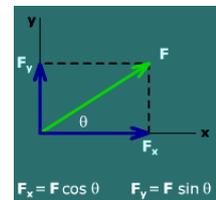
Conversión De S. I. a Unidades Inglesas	
Equivale a:	
1 Kgf	2,204623 Lbm
1 Kgf	0,068522 Slug

- **Dinamómetro:**

Mide la magnitud de una fuerza en condiciones estáticas

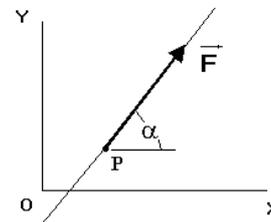
- Se representa con un **vector** gráfica o analíticamente

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$$



- ⊙ Como vector que es, posee:

- Módulo, valor o intensidad
- Dirección (α) y sentido
- Punto de aplicación



- Sus **efectos** pueden ser:

Externos – exteriores al *sistema*, trata de trasladarlo o rotarlo
Internos – tensiones (Elasticidad y Resistencia de Materiales)

Tipos de fuerzas

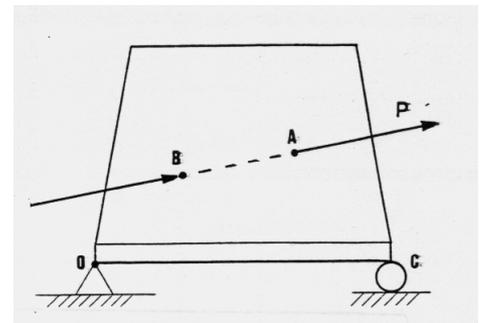
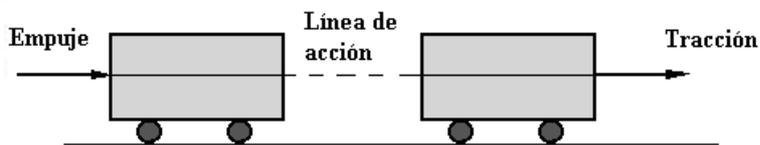
- Según forma de aplicación tenemos
 - ⊙ Fuerzas concentradas: aplicadas en un punto (caso ideal)
 - ⊙ Fuerzas distribuidas: actúan sobre todos los puntos de una línea, superficie o volumen (caso real)
- Según medio de transmisión
 - Fuerzas ejercidas mediante cables, correas, cadenas
 - ⊙ Son de tracción
 - ⊙ Van dirigidas según la dirección del cable (tangente en cada punto al cable)
 - Fuerzas elásticas
 - ⊙ Se oponen a la deformación sufrida por el elemento elástico (resorte)
 - ⊙ Ley de Hooke $F = -k \cdot x$
 - Fuerza de la gravedad
- Según su variabilidad
 - ⊙ Fuerzas constantes
 - ⊙ Fuerzas variables

Principio de transmisibilidad:

"Los efectos exteriores de una fuerza sobre un cuerpo rígido no varían al modificar el punto de aplicación de la fuerza a lo largo de su línea de acción"

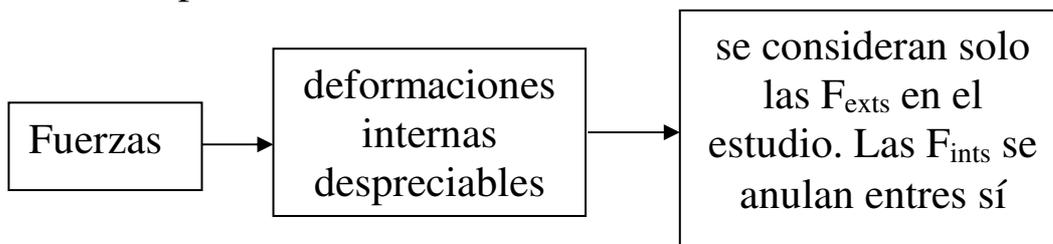
las fuerzas pueden tratarse como vectores deslizantes.

- ⊙ Ej. tirar de un carro por su cara frontal o dorsal
- ⊙ A nivel de efectos internos (esfuerzos y deformación) sí puede tener mucha influencia



Sólido Rígido

- Cuerpo considerado indeformable



- Cuando hablamos de cuerpo lo hacemos también de sistema rígido
 - ⊙ El sistema lo delimitamos nosotros y por tanto las $F_{\text{exteriores}}$ que actúan sobre el mismo
 - ⊙ Un sistema puede estar formado por varios cuerpos o por parte de un cuerpo
- Según esté o no enlazado con otros cuerpos se denominará: Ligado o Libre

- Todos los sistemas o cuerpos con los que trabajemos los consideraremos Rígidos
- Sistema de fuerzas:
 - Conjunto de fuerzas que actúan sobre un sistema/cuerpo rígido
 - Sistemas de fuerzas equivalentes:

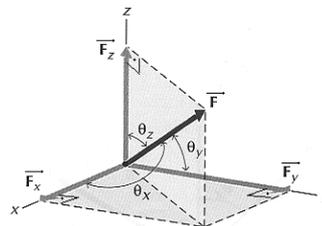
La sustitución de uno por otro no afecta al estado de reposo o movimiento del sistema, ni a las reacciones en los apoyos

1.2. COORDENADAS Y ÁNGULOS DIRECTORES DE UNA FUERZA.

- Coordenadas cartesianas

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

$$|\vec{F}| = F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$



- Ángulos

directores θ_x , θ_y , θ_z

- ⊙ línea de acción – ejes cartesianos
- ⊙ junto con el módulo determinan la fuerza,

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} = F \cdot \cos \theta_x \vec{i} + F \cdot \cos \theta_y \vec{j} + F \cdot \cos \theta_z \vec{k} = F \cdot \vec{u}$$

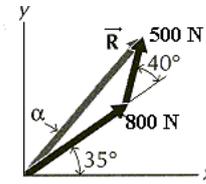
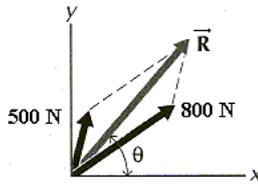
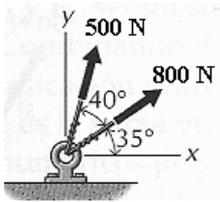
Siendo

$$\vec{u} = \cos \theta_x \vec{i} + \cos \theta_y \vec{j} + \cos \theta_z \vec{k}$$

Vector director unitario adimensional (puramente geométrico) que indica la dirección y sentido de \mathbf{F} , formado por los **cosenos directores**

► Suma de vectores (fuerzas)

⊙ Gráfica (método paralelogramo)



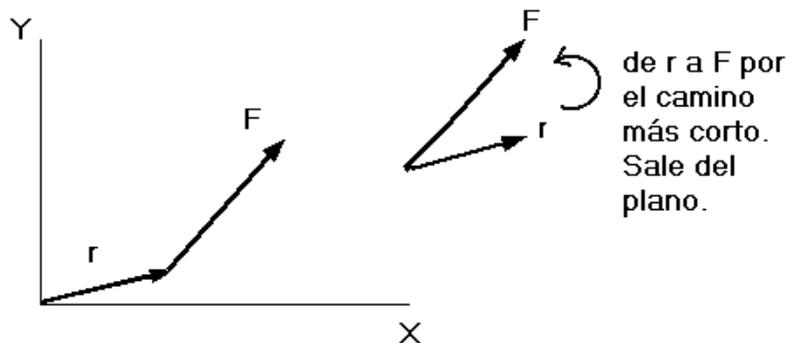
⊙ Analítica (suma de componentes)

$$\vec{R} = \Sigma \vec{R}_x + \Sigma \vec{R}_y = \Sigma F_x \vec{i} + \Sigma F_y \vec{j} = 500 \cdot \cos 75^\circ \vec{i} + 800 \cdot \cos 35^\circ \vec{i} + 500 \cdot \text{sen} 75^\circ \vec{j} + 800 \cdot \text{sen} 35^\circ \vec{j} = 784,73 \vec{i} + 941,82 \vec{j} + 0 \vec{k}$$

1.3. MOMENTO DE UNA FUERZA RESPECTO A UN PUNTO.

Momento M_o

- M_o Mide la tendencia de \mathbf{F} a hacer



\mathbf{r} = vector de posición desde O al punto de aplicación de \mathbf{F}
 α = ángulo mínimo formado entre \mathbf{F}

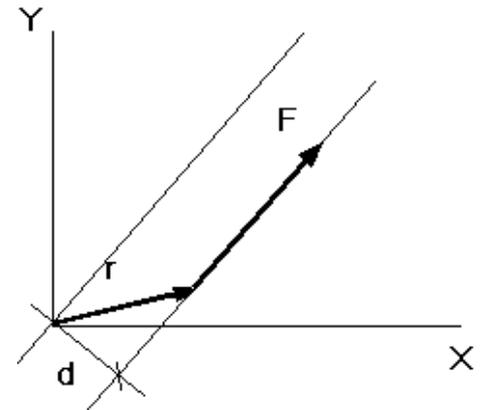
Propiedades

- ⊙ \mathbf{M}_o = vector \perp al plano formado por \mathbf{r} y \mathbf{F} con **sentido** según regla de la mano derecha (sacacorchos)

$$|\vec{M}_o| = M_o = r \cdot F \cdot \sin \alpha = F \cdot d$$

d = **brazo** de momento de F = distancia mínima entre O y la línea de acción de F

α = ángulo mínimo entre r y F



- ⊙ producto vectorial en forma de determinante

$$\vec{M}_o = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = M_{ox}\vec{i} + M_{oy}\vec{j} + M_{oz}\vec{k}$$

- ▶ **Ppo. de transmisibilidad** → fuerzas deslizantes \Rightarrow como vector de posición \mathbf{r} se puede utilizar cualquiera desde O a un punto de la línea de acción de \mathbf{F}

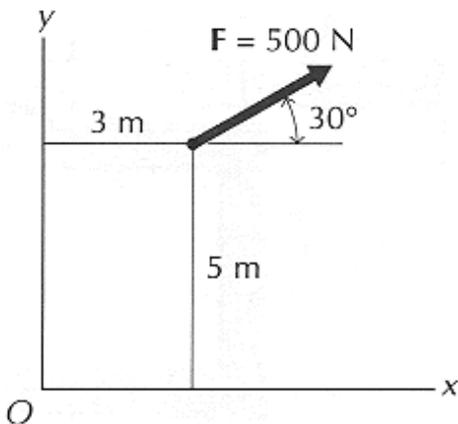
- ▶ **Teorema de Varignon:** “el momento de la resultante de un sistema de fuerzas concurrentes respecto de un punto O es igual a la suma de los momentos de cada fuerza respecto de O ”

$$\vec{M}_o = \vec{r} \wedge \vec{F} = r \wedge (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3) = r \wedge \vec{F}_1 + r \wedge \vec{F}_2 + r \wedge \vec{F}_3 = \vec{M}_{F1} + \vec{M}_{F2} + \vec{M}_{F3}$$

En particular se puede aplicar a las componentes de una fuerza

Ejemplo resuelto

Fuerza por distancia:



$$d = 5 \cdot \cos 30^\circ - 3 \cdot \sin 30^\circ = 2,83 \text{ m}$$

$$M_o = F \cdot d = 500 \cdot 2,83 = 1415 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$\vec{M}_o = -1415 \vec{k} \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$\vec{M}_o = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 5 & 0 \\ 500 \cdot \cos 30 & 500 \cdot \sin 30^\circ & 0 \end{vmatrix} = -1415 \vec{k} \text{ N}\cdot\text{m}$$

Varignon:

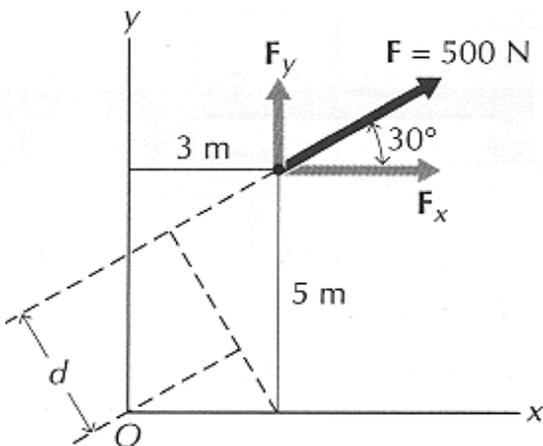
$$\vec{M}_o = (F_x \cdot 5 - F_y \cdot 3) \vec{k} = -1415 \vec{k} \text{ N}\cdot\text{m}$$

Por producto vectorial:

$$\vec{M}_o = (F_x \cdot 5 - F_y \cdot 3) \vec{k} = -1415 \vec{k} \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$\vec{M}_o = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 5 & 0 \\ 500 \cdot \cos 30 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 500 \cdot \sin 30^\circ & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -1415 \vec{k} \text{ N}\cdot\text{m}$$

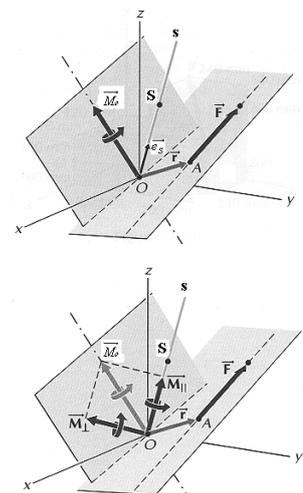


1.4. MOMENTO DE UNA FUERZA RESPECTO A UN EJE.

- M_s mide la tendencia de F a girar un cuerpo alrededor del eje "s" (p.e. abrir una puerta)

$$M_s = \vec{e}_s \cdot \vec{M}_o = \vec{e}_s \cdot (\vec{r} \wedge \vec{F}) = \begin{vmatrix} e_{sx} & e_{sy} & e_{sz} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

\vec{e}_s = vector unitario en la dirección del eje "s"



- M_s es la **proyección de M_o** sobre el eje “s”

$$M_s = \left| \vec{M}_{\parallel} \right|$$

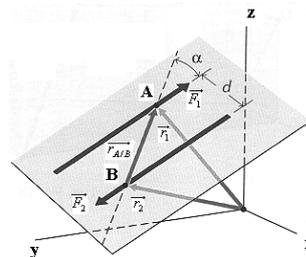
- ⊙ cuando se calcula M_o realmente se calcula el momento de F respecto del eje que pasa por O y es \perp al plano formado por r y F
O puede ser cualquier punto del eje “s”

► **Producto mixto. Propiedades.**

- ⊙ Se anula cuando los tres vectores son *coplanarios* o dos de ellos tienen la misma dirección $\Rightarrow F$ no crea momento respecto a un eje cuando:
 - Su línea de acción corta al eje
 - F es paralela al eje
- ⊙ M_s no depende del punto elegido del eje para su cálculo (demostrar)

1.5. PAR DE FUERZAS. SISTEMA FUERZA-PAR.

Par de fuerzas es el sistema formado por fuerzas iguales en módulo, con líneas paralelas, y sentidos contrarios



por dos de acción

la fuerza resultante del sistema es nula

el par no tiende nunca a trasladar el cuerpo sobre el que se aplica

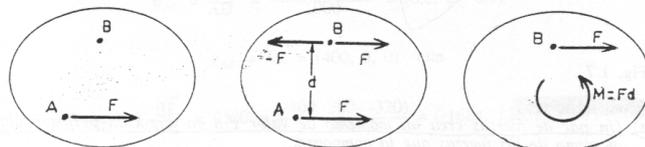
- Momento debido al par (M_o)

$$\vec{M}_o = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2 = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \wedge (-\vec{F}_1) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \wedge \vec{F}_1 = \vec{r}_{A/B} \wedge \vec{F}_1$$

$$\left| \vec{M}_o \right| = M_o = \left| \vec{r}_{A/B} \wedge \vec{F}_1 \right| = F \cdot d$$

► Propiedades:

- ⊙ Un par de fuerzas **crea un momento** de valor $F \cdot d$ en dirección perpendicular al plano de las fuerzas que lo componen
- ⊙ M_o es un **vector libre** porque no depende del punto O (solo depende de $r_{A/B}$) \Rightarrow el momento que crea el par es el mismo para cualquier punto del cuerpo sobre el que se aplica
- ⊙ La acción de un sistema de fuerzas sobre un cuerpo rígido no se modificará si se le agrega o se le quita un sistema de fuerzas en equilibrio

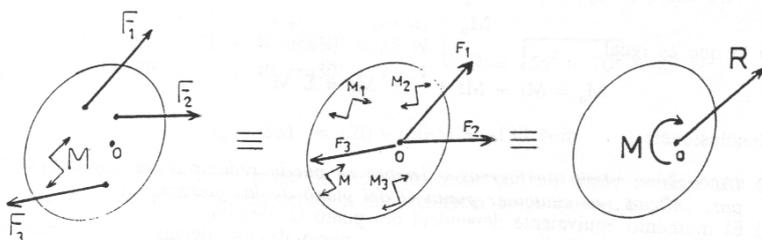


Consecuencia: una fuerza se puede sustituir por un par y una fuerza que pase por un punto de interés

1.6. SISTEMAS PLANOS DE FUERZAS Y SU SIMPLIFICACIÓN.

S.P.F. \rightarrow todas las fuerzas y pares actúan en el **mismo plano** y **se pueden reducir a:**

- ⊙ un **sistema fuerza-par** aplicado en cualquier punto del plano
- ⊙ incluso a una **sola resultante**



▪ Proceso de reducción:

Se trata de obtener un sistema equivalente al dado pero formado únicamente por una fuerza resultante \mathbf{R} y un momento resultante \mathbf{M} .

Pasos:

1. Identificar el **plano de las fuerzas**. (P.e. XY)

2. Elegir el **punto de reducción** $O \in XY$

3. Sustituir cada fuerza por un sistema fuerza-par aplicado en O. Obtenemos un sistema de fuerzas aplicado en O y de pares libres

4. Sumamos gráfica o analíticamente todas las fuerzas y obtenemos la **resultante aplicada en O**

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

$$R_x = \Sigma F_x$$

$$R_y = \Sigma F_y$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2}$$

5. Sumamos gráfica o analíticamente todos los pares/momentos y obtenemos el momento resultante aplicado en O

⊙ Al ser los pares vectores libres los suponemos directamente aplicados en O

⊙ Todos los momentos debidos a los pares son paralelos entre sí, y perpendiculares al plano de fuerzas XY (dirección del eje OZ = \mathbf{k})

$$\vec{M}_o = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n = M_1 \vec{k} + M_2 \vec{k} + \dots + M_n \vec{k} = \left(\sum_{i=1}^n M_i \right) \vec{k}$$

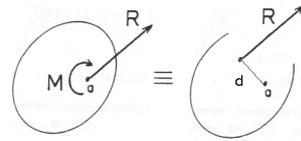
6. Obtenemos el sistema plano de fuerzas reducido al punto O, formado por:

⊙ Una resultante \mathbf{R} contenida en el plano

⊙ Un par de fuerzas contenido en el plano o su momento $\mathbf{M} \perp$ a \mathbf{R} y al plano

7. Traslado \mathbf{R} paralela a su línea de acción actual en $d = M_o/R$ queda reducido el sistema fuerza par a una sola fuerza \mathbf{R}

► Conclusiones:

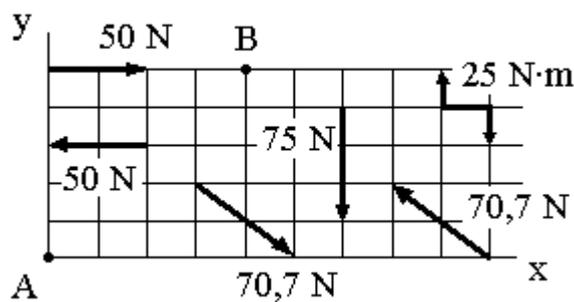


- ⊙ Un SPF **se puede reducir siempre a:**
 - un sistema fuerza-par aplicado en cualquier punto O del plano de fuerzas, dependiendo el momento equivalente del punto O
 - una sola fuerza
- ⊙ M_o es \perp al plano de las fuerzas y por tanto también a \mathbf{R}
- ⊙ Un SPF se **puede llegar a reducir a un solo par** únicamente cuando la fuerza resultante sea nula

Ejercicio propuesto

Reducir el sistema de fuerzas mostrado en la figura a un:

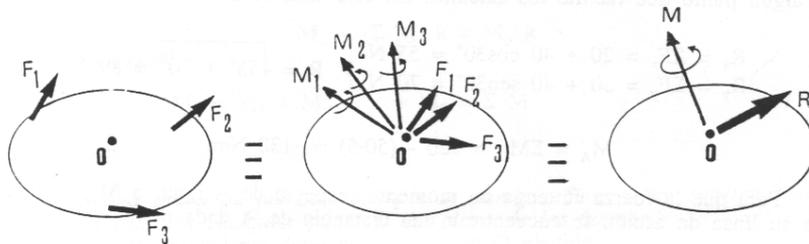
- a) Sistema fuerza-par en el punto A.
- b) Sistema fuerza-par en el punto B.
- c) Una sola resultante, indicando donde corta a los ejes coordenados.



Las divisiones corresponden a 10 centímetros (plancha de 90cm x 50cm).

1.7. SISTEMAS ESPACIALES DE FUERZAS Y SU SIMPLIFICACIÓN.

- Análogo al caso de sistema plano pero con tres coordenadas



- Proceso de reducción:

Se trata de obtener un sistema equivalente al dado pero formado únicamente por una fuerza resultante **R** y un momento resultante **M**.

Pasos: (ver Figura 1.1.)

1. Identificar las fuerzas y momentos que actúan en el espacio.
2. Elegir el **punto de reducción O**
3. Sustituir cada fuerza por un sistema fuerza-par aplicado en O. Obtenemos un sistema de fuerzas aplicado en O y de pares libres
4. Sumamos gráfica o analíticamente todas las fuerzas y obtenemos la **resultante aplicada en O**

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{R}_x + \vec{R}_y + \vec{R}_z = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k}$$

$$R_x = \sum F_x \quad R_y = \sum F_y \quad R_z = \sum F_z$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2 + (\sum F_z)^2}$$

$$\cos \theta_x = \frac{R_x}{R} \quad \cos \theta_y = \frac{R_y}{R} \quad \cos \theta_z = \frac{R_z}{R}$$

5. Sumamos gráfica o analíticamente todos los pares/momentos y obtenemos el momento resultante aplicado en O

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n = \vec{M}_x + \vec{M}_y + \vec{M}_z = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k}$$

6. Obtenemos el sistema de fuerzas espacial reducido al punto O, formado por una resultante **R** y por un par o momento **M**

► Conclusiones:

- ⊙ Cualquier sistema de fuerzas se puede reducir a un sistema fuerza-par equivalente, aplicado en el punto del cuerpo que se desee.
- ⊙ La fuerza resultante **R** no depende del punto elegido para efectuar la reducción
- ⊙ El par resultante **M** sí depende de dicho punto
- ⊙ Una vez reducido el sistema a la resultante **R** y al par **M** pueden darse los siguientes casos: (ver Figura 1.2.)

A

$$\begin{aligned}\vec{R} &= 0 \\ \vec{M} &= 0\end{aligned}$$

El sistema se anula. Las

B

$$\begin{aligned}\vec{R} &= 0 \\ \vec{M} &\neq 0\end{aligned}$$

El sistema se reduce a un solo par de fuerzas cuya

C

$$\begin{aligned}\vec{R} &\neq 0 \\ \vec{M} &\neq 0 \\ \vec{M} &\perp \vec{R}\end{aligned}$$

El sistema se puede reducir a una sola resultante **R** desplazando su línea de acción en dirección perpendicular al momento **M**, $d = M / R$

D

$$\begin{aligned}\vec{R} &\neq 0 \\ \vec{M} &= 0\end{aligned}$$

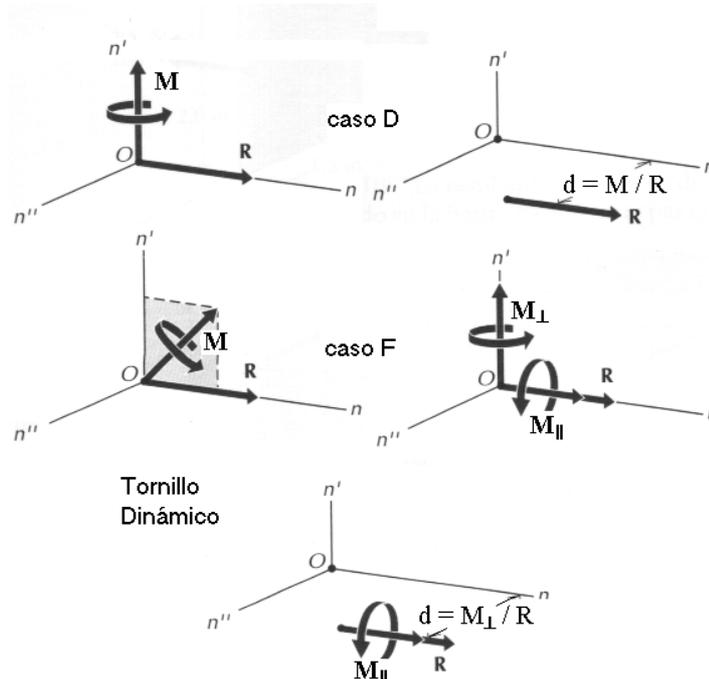
E

$$\vec{R} \neq 0$$

$$\vec{M} \neq 0$$

$$\vec{M} \parallel \vec{R}$$

El sistema no se puede reducir más. Forma el denominado "Tornillo Dinámico" cuyo eje pasa por O y está formado por la resultante **R** y al par **M** que actúa en un plano perpendicular a **R**.

**F**

$$\vec{R} \neq 0$$

$$\vec{M} \neq 0$$

R y **M** no son paralelos ni perpendiculares entre sí.

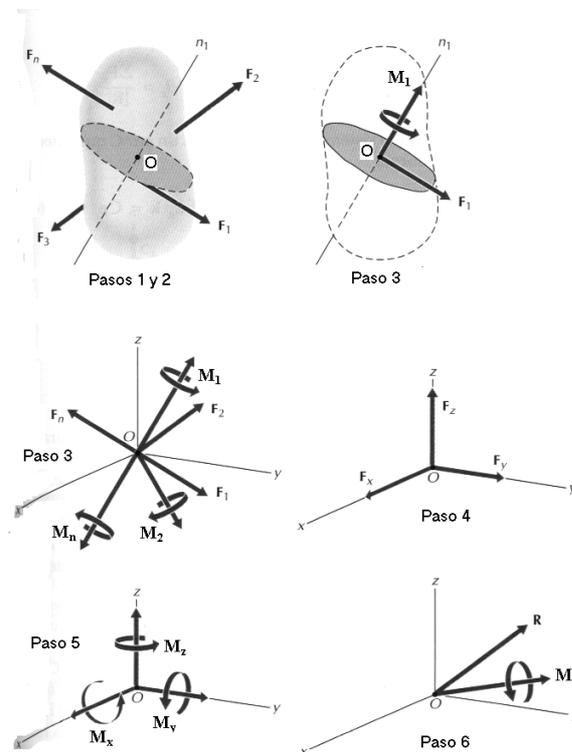


Figura 1.1. Reducción de un sistema espacial de fuerzas a una fuerza y un par/momento.

1.8. EJERCICIOS RESUELTOS.

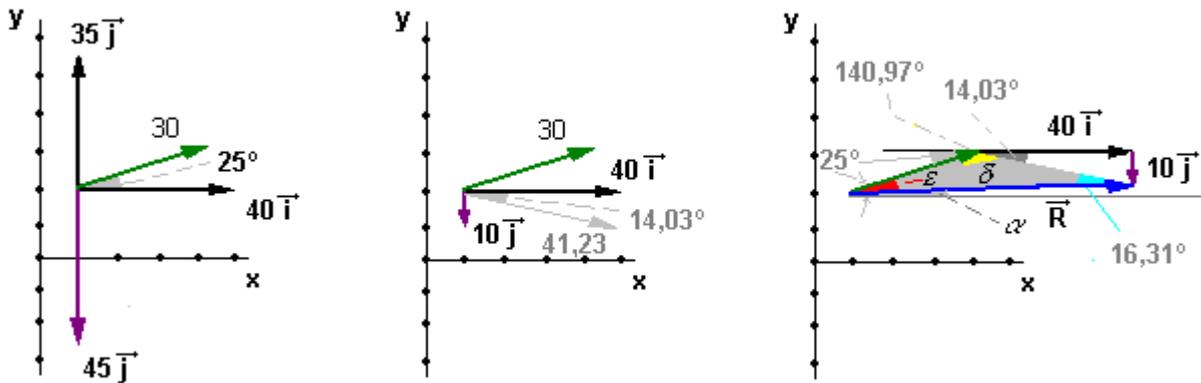
A Continuación se muestran una serie de ejercicios resueltos como ayuda para asentar el contenido teórico mostrado.

1. Hallar gráfica y analíticamente la resultante de las fuerzas que se detallan, todas contenidas en el plano XY, y aplicadas en el punto (1,2). Asimismo hallar los cosenos directores de la resultante.

Fuerzas:

- a) $F = 40 \mathbf{i} + 35 \mathbf{j}$ kN
- b) $F = 30$ kN (25° con OX) kN hacia arriba y derecha
- c) $F = -45 \mathbf{j}$ kN

Para obtener la resultante de manera gráfica damos los tres pasos representados en la figura,



Una vez obtenido el polígono de fuerzas, podemos obtener la resultante de manera puramente gráfica midiendo y traduciendo su valor en la escala representada, o bien obtener los resultados de dicho polígono aplicando propiedades trigonométricas. En nuestro caso aplicaremos el teorema del coseno como sigue,

Sabemos que $\delta = 180^\circ - 25^\circ - 14,03^\circ = 140,97^\circ$

$$R^2 = 30^2 + 41,23^2 - 2 \cdot 30 \cdot 41,23 \cdot \cos 140,97 = 67,24 \quad kN$$

La dirección α de R la obtenemos también con el teorema del coseno como sigue,

$$41,23^2 = 30^2 + 67,24^2 - 2 \cdot 30 \cdot 67,24 \cdot \cos \varepsilon$$

$$\varepsilon = 22,72^\circ$$

$$\alpha = 25 - \varepsilon = 2,28^\circ$$

Analíticamente tenemos,

$$\vec{R}_x = 40\vec{i} + 30 \cdot \cos 25^\circ \vec{i} = 67,19\vec{i} \quad kN$$

$$\vec{R}_y = 35\vec{j} - 45\vec{j} + 30 \cdot \sin 25^\circ \vec{j} = 2,68\vec{j} \quad kN$$

$$\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y = 67,19\vec{i} + 2,68\vec{j} \quad kN$$

$$R = \sqrt{67,19^2 + 2,68^2} = 67,24 \quad kN$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{2,68}{67,19} = 2,28^\circ$$

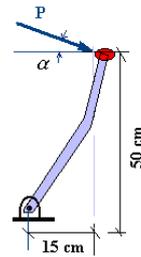
Los cosenos directores de la resultante \mathbf{R} resultan ser,

$$\cos \theta_x = \frac{R_x}{R} = \frac{67,19}{67,24} = 0,9992$$

$$\cos \theta_y = \frac{R_y}{R} = \frac{2,68}{67,24} = 0,0398$$

2. Dada la palanca de un cambio de marchas de la figura, hallar el módulo de la fuerza P respecto a B cuando α vale 25° , si sabemos que el momento que produce respecto a la articulación es $10,4 \text{ kN}\cdot\text{cm}$, aplicando:

- a) El Teorema de Varignon.
- b) El producto vectorial



a) Aplicando el Teorema de Varignon, tendremos que el momento (sentido horario) de la fuerza P respecto a la articulación es:

$$\vec{M} = \vec{M}_{P_x} + \vec{M}_{P_y}$$

$$M_x = P_x \cdot 50 = P \cdot \cos \alpha \cdot 50$$

$$M_y = P_y \cdot 15 = P \cdot \text{sen} \alpha \cdot 15$$

$$\vec{M} = P \cdot \cos 25 \cdot 50 \vec{k} + P \cdot \text{sen} 25 \cdot 15 \vec{k} = 51,65 P \vec{k} \quad \text{kN}\cdot\text{cm}$$

$$P = \frac{10,4}{51,65} = 0,20 \quad \text{kN}$$

b) Aplicando el Producto Vectorial

Sabemos que,

$$\vec{r} = 0,15 \vec{i} + 0,50 \vec{j}$$

$$P = P \cos \alpha \vec{i} - P \text{sen} \alpha \vec{j}$$

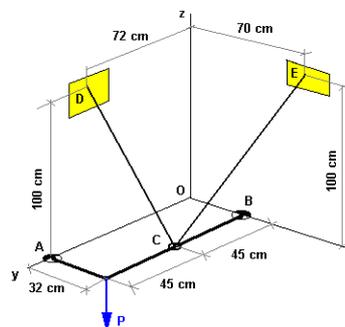
$$\vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 15 & 50 & 0 \\ P \cdot \cos 25 & -P \cdot \text{sen} 25 & 0 \end{vmatrix} = -51,65 P \vec{k} \quad \text{kN}\cdot\text{cm}$$

(sentido horario en el producto vectorial es negativo)

$$P = \frac{10,4}{51,65} = 0,20 \quad \text{kN}$$

3. La tubería mostrada en la figura en forma de L se encuentra dispuesta en el plano XY y articulada en los puntos A y B. Asimismo, la tubería dispone de un soporte anular localizado en C por el que pasa un cable que la sostiene y que a su vez se fija a las paredes en D y E. En el codo se supone aplicada la carga P. Sabiendo que la tensión en cada tramo de cable es de 500 N, hallar:

- a) Las componentes de la tensión en el trozo cable EC respecto a los ejes principales, como los ángulos principales.
- b) Los momentos de la tensión en el trozo de cable DC respecto a los tres ejes



de
así

coordenados, así como los ángulos principales.

- c) El momento de la tensión T_{CE} respecto a la línea AB.
 d) Identifique las posibles direcciones de ejes respecto de las cuales los momentos de la tensión CD son nulos.

- a) Empezaremos calculando un vector unitario en la dirección de la fuerza para multiplicarlo por su módulo y obtener ésta en forma vectorial.

$$\begin{aligned}
 & E(70,0,100) \\
 & C(32,45,0) \\
 & \overrightarrow{CE} = E - C = (38, -45, 100) \\
 & |\overrightarrow{CE}| = CE = \sqrt{38^2 + (-45)^2 + 100^2} = 116,06 \\
 & \overrightarrow{U_{CE}} = \frac{\overrightarrow{CE}}{|\overrightarrow{CE}|} = \frac{(38, -45, 100)}{116,06} = (0'33, -0'39, 0'86) \\
 & \overrightarrow{T_{CE}} = 500 \overrightarrow{U_{CE}} = 500(0'33, -0'39, 0'86) = (165, -195, 430) \quad N
 \end{aligned}$$

Los cosenos directores nos permiten obtener los ángulos principales, y se obtienen a partir del vector unitario como sigue,

$$\begin{aligned}
 \cos \theta_x &= 0,33 \Rightarrow \theta_x = 70,73^\circ \\
 \cos \theta_y &= -0,39 \Rightarrow \theta_y = 112,95^\circ \\
 \cos \theta_z &= 0,86 \Rightarrow \theta_z = 30,68^\circ
 \end{aligned}$$

- b) Operando de manera análoga al caso anterior tenemos,

$$\begin{aligned}
 & D(0,72,100) \\
 & C(32,45,0) \\
 & \overrightarrow{CD} = D - C = (-32, 27, 100) \\
 & |\overrightarrow{CD}| = CD = \sqrt{(-32)^2 + 27^2 + 100^2} = 108,41 \\
 & \overrightarrow{U_{CD}} = \frac{\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|} = \frac{(-32, 27, 100)}{108,41} = (-0'29, 0'25, 0'92) \\
 & \overrightarrow{T_{CD}} = 500 \overrightarrow{U_{CD}} = 500(-0'29, 0'25, 0'92) = (-145, 125, 460) \quad N
 \end{aligned}$$

Para calcular los momentos respecto a los tres ejes principales utilizaremos como vector de posición común a los tres casos el vector \mathbf{OC} , ya que el punto O pertenece a los tres ejes. Así tenemos,

$$O(0,0,0)$$

$$C(32,45,0)$$

$$\overrightarrow{OC} = C - O = (32,45,0)$$

$$M_{Ox} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 32 & 45 & 0 \\ -145 & 125 & 460 \end{vmatrix} = 20700 \text{ N}\cdot\text{cm}$$

$$M_{Oy} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 32 & 45 & 0 \\ -145 & 125 & 460 \end{vmatrix} = -14720 \text{ N}\cdot\text{cm}$$

$$M_{Oz} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 32 & 45 & 0 \\ -145 & 125 & 460 \end{vmatrix} = 10525 \text{ N}\cdot\text{cm}$$

Los cosenos directores nos permiten obtener los ángulos principales, y se obtienen a partir del vector unitario como sigue,

$$\cos \theta_x = -0,29 \Rightarrow \theta_x = 106,86^\circ$$

$$\cos \theta_y = 0,25 \Rightarrow \theta_y = 75,52^\circ$$

$$\cos \theta_z = 0,92 \Rightarrow \theta_z = 23,07^\circ$$

- c) Necesitamos un vector unitario en la dirección del eje \mathbf{U}_{AB} , un vector de posición de cualquier punto del eje a cualquier punto de línea de acción de la fuerza (por ejemplo \mathbf{BC}), y las componentes de la fuerza que ya tenemos de antes. Así podremos aplicar el determinante para conocer el momento M ,

$$C(32,45,0)$$

$$B(32,0,0)$$

$$A(0,90,0)$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (32,-90,0)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = AB = \sqrt{(-90)^2 + 32^2} = 95,52$$

$$\overrightarrow{U}_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{(32,-90,0)}{95,52} = (0,33,-0,94,0)$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (0,45,0)$$

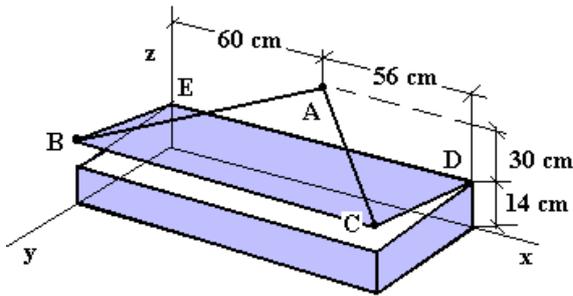
$$M = \begin{vmatrix} 0,33 & -0,94 & 0 \\ 0 & 45 & 0 \\ 165 & -195 & 430 \end{vmatrix} = 6385 \text{ N}\cdot\text{m}$$

- d) Todo eje que corte o sea paralelo a la dirección del cable CD provocará un momento nulo.

4. La tapa BCDE de la caja mostrada en la figura se mantiene abierta 18° gracias a la cuerda BAC que pasa por el gancho sin rozamiento en A(60,0,44). Si la tensión en la cuerda es de 100 N, hallar:

- Momento respecto a cada eje coordenado de la tensión que ejerce la cuerda en B
- Momento de la tensión que ejerce la cuerda en B respecto a las bisagras contenidas en el eje de giro ED.

a) Tenemos los siguientes puntos:



$$A(60,0,44)$$

$$B(0,43 \cdot \cos 18^\circ, 43 \cdot \sin 18^\circ + 14) = (0,40'89,27'29)$$

$$E(0,0,14)$$

$$\vec{BA} = A - B = (60, -40'89, 12'71)$$

$$|\vec{BA}| = BA = \sqrt{60^2 + (-40,89)^2 + 12,71^2} = 73,71$$

$$\vec{U}_{BA} = \frac{\vec{BA}}{|\vec{BA}|} = \frac{(60, -40'89, 12'71)}{73,71} = (0'81, -0'55, 0'22)$$

$$\vec{T}_{BA} = 100 \vec{U}_{BA} = 100(0'81, -0'55, 0'22) = (81, -55, 22) \quad N$$

Como vector de posición \vec{r} escogeremos como origen el punto común a los tres ejes coordenados (0,0,0) hasta el punto B, para aplicarlo en las expresiones basadas en el producto mixto como sigue,

$$\vec{r}_{OB} = 0\vec{i} + 40,89\vec{j} + 27,29\vec{k}$$

$$\vec{M}_{OX} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 40,89 & 27,29 \\ 81 & -55 & 22 \end{vmatrix} = 2400,53 \quad N \cdot m$$

$$\vec{M}_{OY} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 40,89 & 27,29 \\ 81 & -55 & 22 \end{vmatrix} = 2210,49 \quad N \cdot m$$

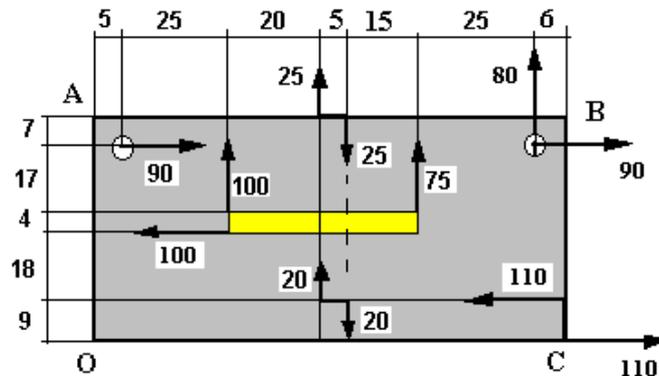
$$\vec{M}_{OZ} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 40,89 & 27,29 \\ 81 & -55 & 22 \end{vmatrix} = -3312,09 \quad N \cdot m$$

b) Las bisagras tienen como vector unitario \vec{i} , y el nuevo vector de posición será,

$$\vec{r}_{EB} = B - E = 0\vec{i} + 40,89\vec{j} + 13,29\vec{k}$$

$$\vec{M}_{EBbisagras} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 40,89 & 13,29 \\ 81 & -55 & 22 \end{vmatrix} = 1630,53 \quad N \cdot m$$

5. Una pieza de máquina está sometida a las fuerzas (N) con las distancias (mm) indicadas. Para garantizar la sujeción de la pieza usaremos un remache que puede resistir una fuerza pero no un par. Hallar dos posiciones en el contorno de la pieza en las que podamos situar el remache.



- a) Reduciendo el sistema de fuerzas por ejemplo al punto B obtenemos en dicho punto el sistema fuerza-par formado por un lado una resultante suma de todas las fuerzas, y por otro lado un par cuyo momento es la suma de todos los momentos producidos por cada fuerza respecto al punto B. Consideraremos los momentos horarios como positivos.

$$\vec{R} = 80\vec{i} + 255\vec{j} \quad N$$

$$\vec{M}_B = 80 \cdot 6 + 75 \cdot 31 + 100 \cdot 71 + 100 \cdot 28 + 25 \cdot 5 + 20 \cdot 5 - 90 \cdot 7 - 90 \cdot 7 - 110 \cdot 9 =$$

$$= 10680\vec{k} \quad N \cdot mm$$

Este sistema se puede reducir a una sola resultante desplazando \mathbf{R} paralela a su línea de acción una distancia d , como sigue

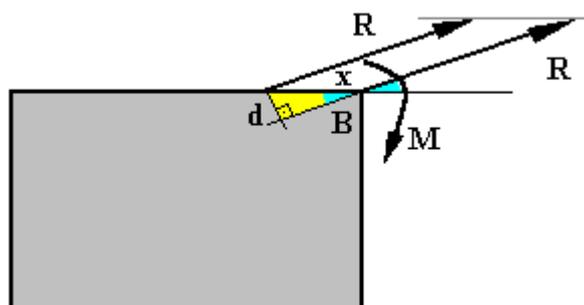
$$R = \sqrt{80^2 + 255^2} = 267,25$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{255}{80} = 72,58^\circ$$

$$d = \frac{M}{R} = \frac{10680}{267,25} = 39,96 \quad mm$$

$$x = \frac{39,96}{\sin 72,58} = 41,88 \quad mm$$

La distancia "d" se traduce sobre el contorno AB en 41,88 cm medidos hacia la izquierda del punto B.



- b) Otra posibilidad de localización del remache sería reducir el sistema de fuerzas a un sistema fuerza par localizado en O, como sigue:

$$\begin{aligned}\vec{R} &= 80\vec{i} + 255\vec{j} \quad N \\ \vec{M}_O &= 90 \cdot 48 + 90 \cdot 48 + 25 \cdot 5 + 20 \cdot 5 - 100 \cdot 30 - 100 \cdot 27 - 80 \cdot 95 - 75 \cdot 70 - 110 \cdot 9 = \\ &= -10675\vec{k} \quad N \cdot mm\end{aligned}$$

Para reducir el sistema a una sola resultante desplazamos ésta paralela a su línea de acción y por encima una distancia d , de manera que se respete el sentido del momento que produzca respecto a O con el de M.

$$\begin{aligned}R &= \sqrt{80^2 + 255^2} = 267,25 \\ \alpha &= \tan^{-1} \frac{255}{80} = 72,58^\circ \\ d &= \frac{M}{R} = \frac{10675}{267,25} = 39,94 \quad mm \\ y &= \frac{39,94}{\text{sen}72,58} = 41,86 \quad mm\end{aligned}$$

Vemos que esta vez la distancia se traduce en una distancia sobre la arista OC y desde el punto O de 41,86 mm.

- c) Intentemos localizar el remache reduciendo el sistema de a un sistema fuerza par al punto C. Tendremos como sistema fuerza par en C,

$$\begin{aligned}\vec{R} &= 80\vec{i} + 255\vec{j} \quad N \\ \vec{M}_C &= 90 \cdot 48 + 90 \cdot 48 + 100 \cdot 71 + 75 \cdot 31 + 80 \cdot 6 + 25 \cdot 5 + 20 \cdot 5 - 100 \cdot 27 - 110 \cdot 9 = \\ &= -15080\vec{k} \quad N \cdot mm \\ R &= \sqrt{80^2 + 255^2} = 267,25 \\ \alpha &= \tan^{-1} \frac{255}{80} = 72,58^\circ \\ d &= \frac{M}{R} = \frac{15080}{267,25} = 56,43 \quad mm \\ x &= \frac{56,43}{\text{sen}72,58} = 59,14 \quad mm\end{aligned}$$

Esta distancia x está medida sobre la arista CO desde C.

Se aprecia cómo en los tres casos se logra la misma solución por caminos diferentes.

- 6. Reducir el sistema de fuerzas mostrado y definido por cada fuerza con su punto de aplicación a un sistema fuerza-par en el punto (2,0,0). ¿Se puede reducir más el sistema?. Si es así justificarlo y realizarlo.**

$$\vec{A} = 2\vec{i} - 3\vec{j} \quad \text{en } (1,1,0)$$

$$\vec{B} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} \quad \text{en } (1,2,0)$$

$$\vec{C} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k} \quad \text{en } (1,2,0)$$

$$\vec{D} = \vec{i} \quad \text{en } (2,2,0)$$

Sumando todas las fuerzas obtenemos la fuerza resultante a aplicar en (2,0,0),

$$\vec{R} = 8\vec{i}$$

Tomando momentos, según Varignon, de las componentes de cada una de las fuerzas, y teniendo en cuenta que al tener **B** y **C** el mismo punto de aplicación equivale a una resultante $\mathbf{BC} = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ aplicada en (1,2,0), tenemos:

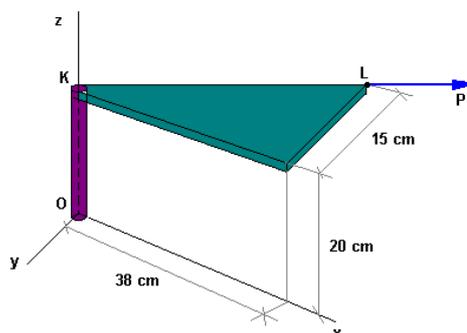
$$\vec{M} = 14\vec{k}$$

El sistema se puede simplificar a una única resultante R' , desplazando R hacia arriba una distancia:

$$d = \frac{M}{R} = \frac{14}{8} = 1,75$$

Es decir que la resultante R' tendrá su línea de acción en $y = 1,75$

7. A la placa con forma de triángulo rectángulo mostrada, se le aplica una fuerza P de 34 kN contenida en su mismo plano como muestra la figura. Sus catetos son paralelos a los ejes OY y OX . Sustituir esa fuerza por un sistema fuerza-par equivalente en el origen O del sistema de coordenadas.



Sabemos que la fuerza está contenida en el plano de la placa y en la dirección de su hipotenusa. Necesitamos pues conocer el ángulo respecto a OX para poder calcular sus componentes. Así tenemos,

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{15}{38} = 21,54^\circ$$

$$\vec{P} = 34 \cdot \cos \alpha \vec{i} + 34 \cdot \sin \alpha \vec{j} = 34 \cdot \cos 21,54 \vec{i} - 34 \cdot \sin 21,54 \vec{j} = 31,62 \vec{i} - 12,48 \vec{j}$$

El momento resultante en O será,

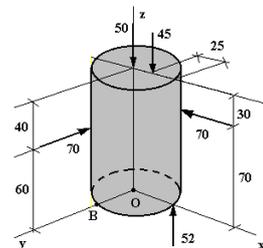
$$\vec{r} = 38\vec{i} - 15\vec{j} + 20\vec{k}$$

$$\vec{M}_o = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 20 \\ 31,62 & -12,48 & 0 \end{vmatrix} = 249,6\vec{i} + 632,4\vec{j} \quad kN \cdot cm$$

Así pues, la fuerza P se puede sustituir por el sistema $\mathbf{R}-\mathbf{M}_o$ aplicado en O. Ambos sistemas son estáticamente equivalentes.

8. El perno de la figura de 100 mm de diámetro se inserta en el orificio de una caja de acero, apareciendo las fuerzas representadas sobre el mismo en kN y las distancias en mm. Cada fuerza es paralela a un eje coordenado. Sustituir dicho sistema de fuerzas espacial por un sistema fuerza-par equivalente:

- en el punto O.
- En el punto B.



Para cada caso obtendremos la misma resultante, y la el punto en cuestión. Asimismo, el momento o par será en resultado de tomar la suma de los momentos de cada al punto. Dicho momento resultante será diferente para

aplicaremos en cada caso el fuerza respecto ambos puntos.

a) Para el punto O (0,0,0) tendremos el sistema fuerza-par formado por,

$$\vec{R}_o = -50\vec{k} - 45\vec{k} + 52\vec{k} - 70\vec{i} - 70\vec{j} = -70\vec{i} - 70\vec{j} - 43\vec{k}$$

$$\vec{M}_o = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 52 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 50 & 0 & 70 \\ -70 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 25 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & -45 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 50 & 60 \\ 0 & -70 & 0 \end{vmatrix} = 4200\vec{i} - 6375\vec{j} \quad N \cdot mm$$

b) Procediendo de manera análoga tendremos para el punto B (0,50,0),

$$\vec{R}_B = -50\vec{k} - 45\vec{k} + 52\vec{k} - 70\vec{i} - 70\vec{j} = -70\vec{i} - 70\vec{j} - 43\vec{k}$$

$$\vec{M}_B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 50 & -50 & 0 \\ 0 & 0 & 52 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 50 & -50 & 70 \\ -70 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 25 & -50 & 100 \\ 0 & 0 & -45 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -50 & 100 \\ 0 & 0 & 50 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 60 \\ 0 & -70 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 6350\vec{i} - 6375\vec{j} - 3500\vec{k} \quad N \cdot mm$$

Se observa como el eje OY positivo debe ir en sentido contrario al dibujado para que se respete la regla del tornillo del producto vectorial.

TEMA 2. EQUILIBRIO DEL CUERPO RÍGIDO

- 2.1. DEFINICIÓN DE EQUILIBRIO.
- 2.2. REACCIONES EN LOS SOPORTES Y ANCLAJES EN EL PLANO.
- 2.3. EQUILIBRIO EN DOS DIMENSIONES.
- 2.4. DETERMINACIÓN ESTÁTICA.
- 2.5. SÓLIDO SOMETIDO A DOS Y TRES FUERZAS.
- 2.6. EQUILIBRIO EN TRES DIMENSIONES.
- 2.7. REACCIONES EN LOS SOPORTES Y ANCLAJES EN EL ESPACIO
- 2.8. EJERCICIOS RESUELTOS.

2.1. DEFINICION DE EQUILIBRIO.

- “Un cuerpo rígido se encuentra en equilibrio si y sólo si sus aceleraciones lineal y angular son nulas”.
 - ⊙ O lo que es lo mismo "si la resultante de todas las fuerzas (incluidos los pares) que actúan sobre él es cero"

$$\vec{a} = 0 \Leftrightarrow R = \Sigma \vec{F}_i = 0$$

$$\vec{\alpha} = 0 \Leftrightarrow M = \Sigma \vec{M}_i = 0$$



Un cuerpo en **reposito**.

Un cuerpo con **M.R.U.**

- **Otra forma de definir las condiciones generales de equilibrio sería a través de las componentes**

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0$$

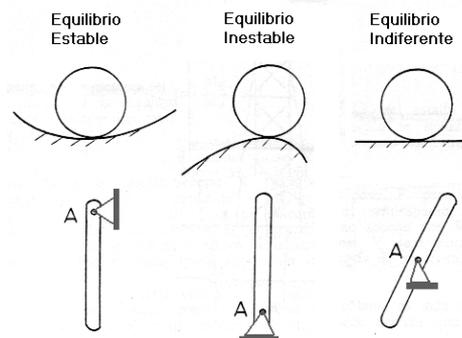
$$\Sigma M_x = 0 \quad \Sigma M_y = 0 \quad \Sigma M_z = 0$$

- **Estabilidad y Estados de Equilibrio**

Si sometemos un cuerpo en equilibrio a una nueva fuerza, éste puede reaccionar de diferentes maneras cuando cese dicha perturbación:

Equilibrio Estable

Recupera su posición inicial de equilibrio



Equilibrio Indiferente

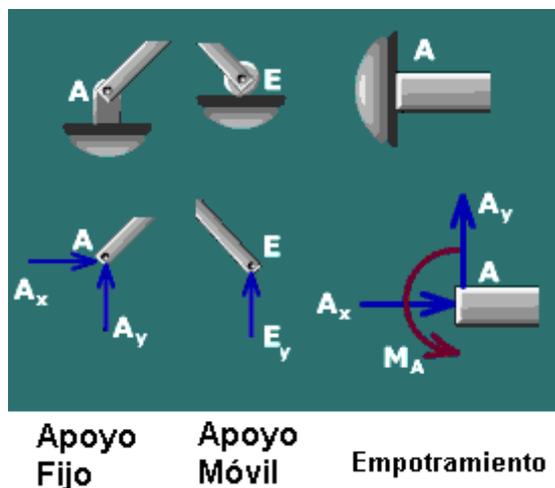
Adquiere otra posición inmediata de equilibrio

Equilibrio Inestable

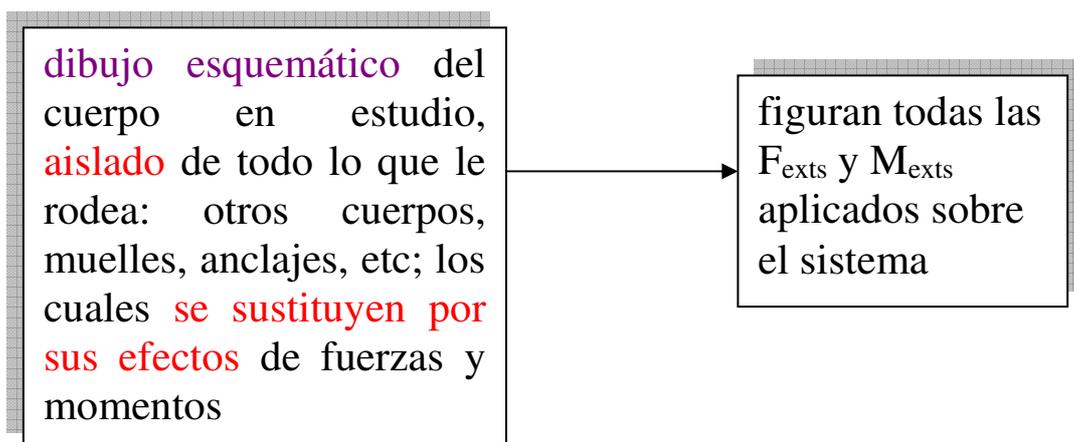
Adquiere otra posición cada vez más alejada de la posición inicial

2.2. REACCIONES EN LOS SOPORTES Y ANCLAJES, EN EL PLANO.

- Los problemas de equilibrio exigen determinar y calcular respecto al sistema analizado todas las fuerzas que actúan, las cuales pueden ser:
 - ⊙ Cargas exteriores (soportadas por el cuerpo)
 - ⊙ Fuerzas de volumen (ejercidas por el propio sistema, como el peso)
 - ⊙ **Reacciones en los soportes y anclajes del sistema**



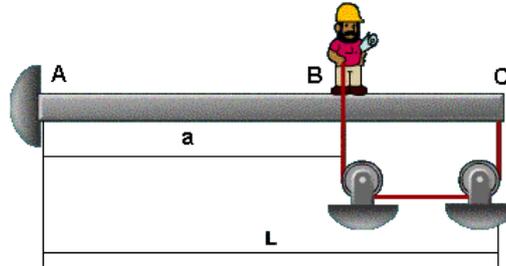
■ Diagrama de Cuerpo Libre (DCL)



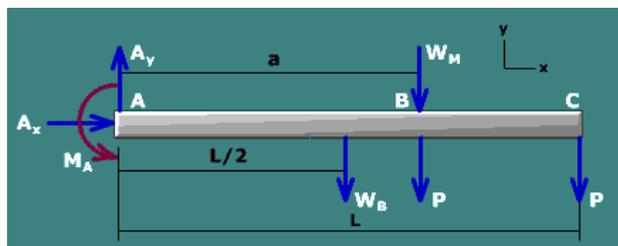
- Constituye el paso más importante en la resolución de un problema mecánico, pues hace el análisis más sencillo y claro

► Pasos para la realización del DCL:

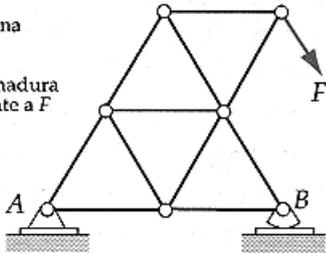
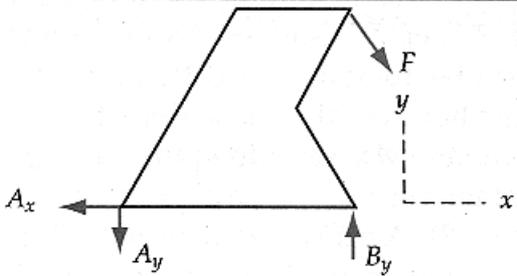
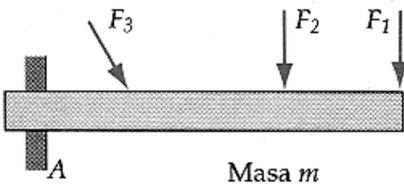
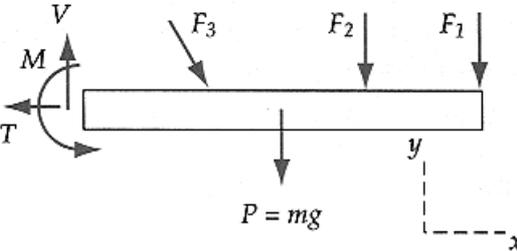
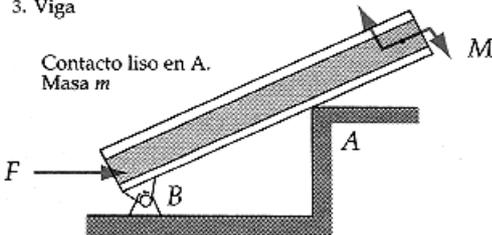
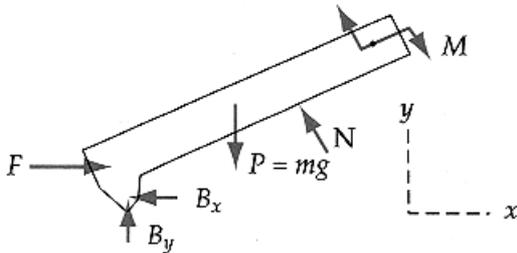
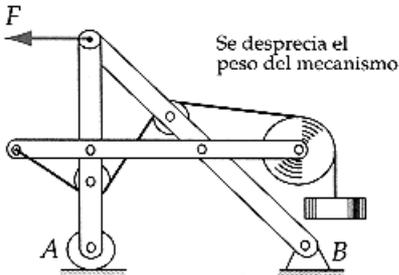
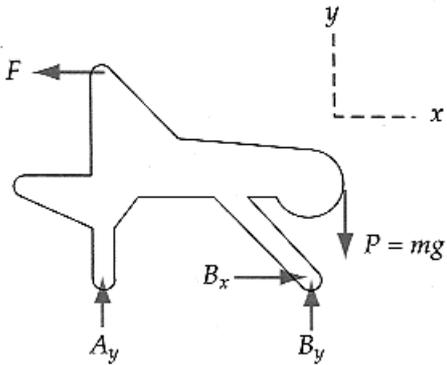
Ejemplo: Hombre de peso W_H que tira de la cuerda con carga P sobre la barra empotrada de peso W_B



1. Elegir el sistema o subsistema a aislar (cuerpo o conjunto mecánico). Puede ser necesario descomponerlo en subcasos (más de un diagrama). P.e.: barra ABC.
2. Dibujar esquemáticamente el perfil exterior completo del sistema aislado.
3. Representar todas las fuerzas y pares que actúan sobre el sistema aislado, ya sean conocidos o incógnitas a conocer.



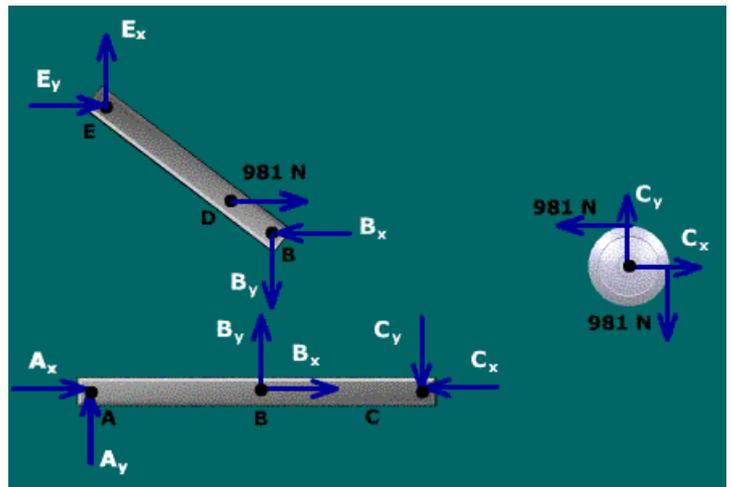
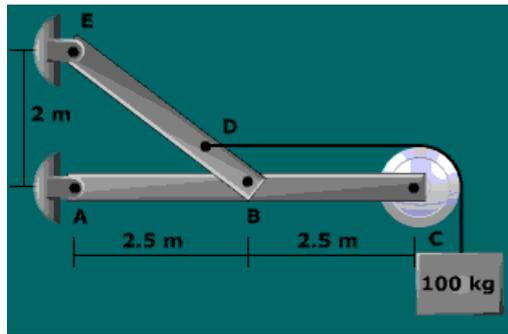
- ⊙ Incluidos los efectos de desligadura ejercidos **sobre** el sistema (base de apoyo, otros cuerpos, etc.)
4. Especificar criterios de sentido positivo y las dimensiones.
 - ⊙ Ejes coordenados OX-OY
 5. Preparado para aplicar las condiciones de equilibrio.

EJEMPLOS DE DIAGRAMAS PARA SÓLIDO LIBRE	
Sistema mecánico	Diagrama de sólido libre del cuerpo aislado
<p>1. Armadura plana</p> <p>El peso de la armadura se desprecia frente a F</p> 	
<p>2. Viga en voladizo</p>  <p style="text-align: center;">Masa m</p>	
<p>3. Viga</p> <p>Contacto liso en A. Masa m</p> 	
<p>4. Sistema rígido de cuerpos interconectado considerado como un conjunto único.</p> <p>Se desprecia el peso del mecanismo</p> 	

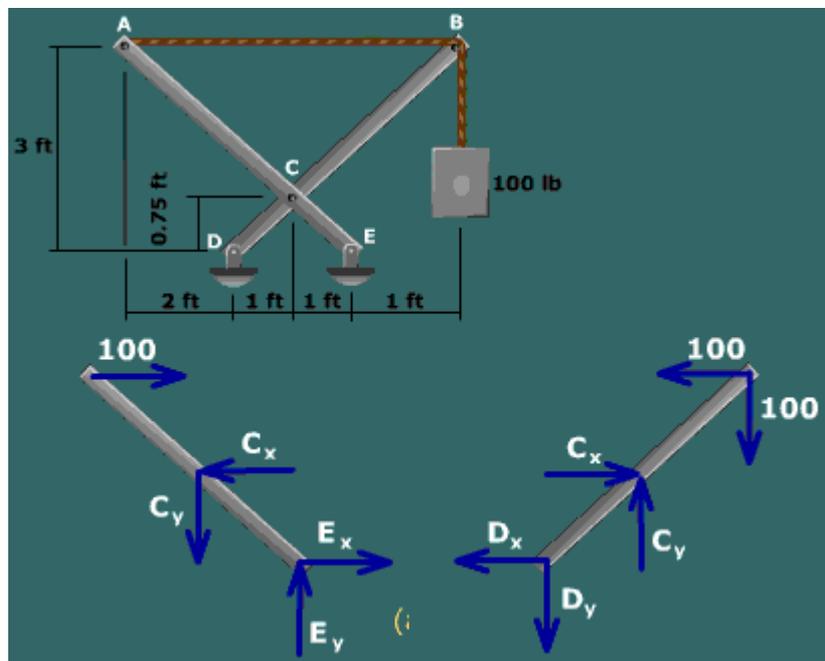
Ejemplos Resueltos

Se observa el diagrama de cuerpo libre de cada uno de los componentes que forman las dos estructuras mostradas

A)



B)



2.3. EQUILIBRIO EN DOS DIMENSIONES.

- implica que todas las fuerzas y pares que actúan sobre el cuerpo forman un sistema plano cuya resultante es nula, con lo cual

Para el plano XY:

$$\vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y = \Sigma \vec{F}_x + \Sigma \vec{F}_y = 0$$

$$\vec{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \vec{M} = 0$$

- ⊙ estaremos en un sistema inercial (sin aceleraciones ni fuerzas de inercia)

- Es necesario y suficiente que simultáneamente

$$\left\{ \begin{array}{l} R_x = \Sigma F_x = 0 \\ R_y = \Sigma F_y = 0 \\ M = 0 \end{array} \right.$$

- ⊙ Si $\mathbf{R} = 0 \Rightarrow \mathbf{M}$ no depende de ningún punto

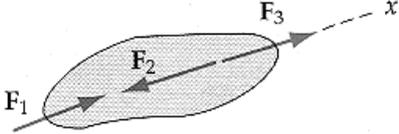
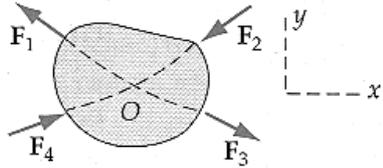
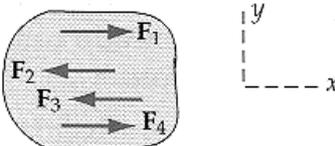
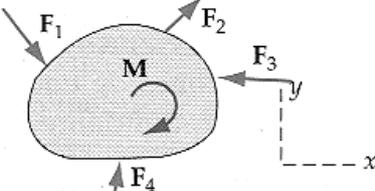
- ⊙ Necesario:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_x \neq 0 \Rightarrow a_x \quad , \quad \vec{R}_y \neq 0 \Rightarrow a_y \\ \text{ó} \\ \vec{M} \neq 0 \Rightarrow \alpha \end{array} \right.$$

3 ecuaciones
linealmente
independientes

- ⊙ Suficiente: Si $\mathbf{R} = 0 \Rightarrow$ el sistema puede reducirse solo a un par, y como $\mathbf{M} = 0$, tiene lugar el equilibrio

▪ **Simplificación de las condiciones de equilibrio.**

CATEGORÍAS DE EQUILIBRIO EN EL PLANO		
Sistema de fuerzas	Diagrama de sólido libre	Ecuaciones independientes
1. Colineales		$\Sigma F_x = 0$
2. Concurrentes en un punto		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$
3. Paralelas		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma M_x = 0$
4. General		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma M_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$

▪ Otras formas de expresar las condiciones de equilibrio en el plano

Caso A. $\vec{\Sigma M}_A = 0 \quad \vec{\Sigma M}_B = 0 \quad \vec{\Sigma F}_x = 0$

"estas ecuaciones son independientes, es decir es condición necesaria y suficiente para el equilibrio de cualquier sistema plano de fuerzas, si la suma de los momentos de todas estas fuerzas respecto de dos centros cualesquiera A y B, y la suma de sus proyecciones sobre el eje OX no perpendicular a la recta AB, sean iguales a cero"

Necesario: si $\left\{ \begin{array}{l} \vec{\Sigma M}_A \neq 0 \quad \text{ó} \quad \vec{\Sigma M}_B \neq 0 \Rightarrow \vec{\alpha} \\ \text{ó} \\ \vec{\Sigma F}_x \neq 0 \Rightarrow \vec{a} \end{array} \right.$

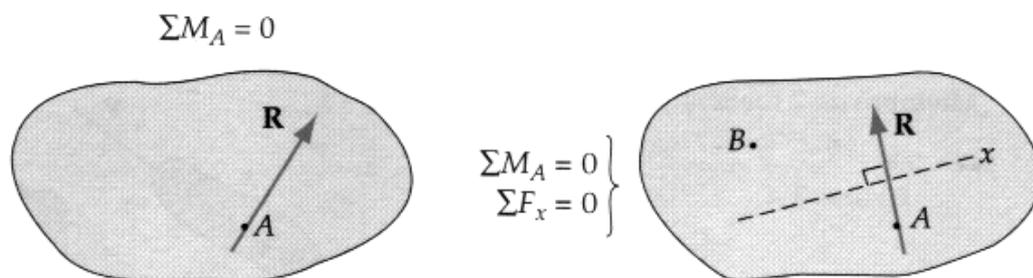
Suficiente: Si $\vec{\Sigma M}_A = 0$ y $\vec{\Sigma M}_B = 0$, tal sistema puede tener **una resultante que pase por A y por B.**

Pero como AB no es perpendicular a OX, dicha resultante tendrá componente en X lo cual es imposible porque $\mathbf{R}_x = \Sigma \mathbf{F}_x = 0$.

Esto solo se cumple cuando $\mathbf{R} = 0$ con lo que queda garantizado el equilibrio.

Si AB fuera perpendicular a OX tendríamos:

- ⊙ $\mathbf{R} = \mathbf{R}_y \rightarrow \mathbf{a}_y \rightarrow$ No equilibrio
- ⊙ Además $\Sigma \mathbf{F}_x = 0$ daría $0 = 0$ (por eso se pone como condición que AB no sea perpendicular a OX)



└ Análogamente ocurrirá con:

$$\vec{\Sigma M}_A = 0 \quad \vec{\Sigma M}_B = 0 \quad \vec{\Sigma F}_y = 0$$

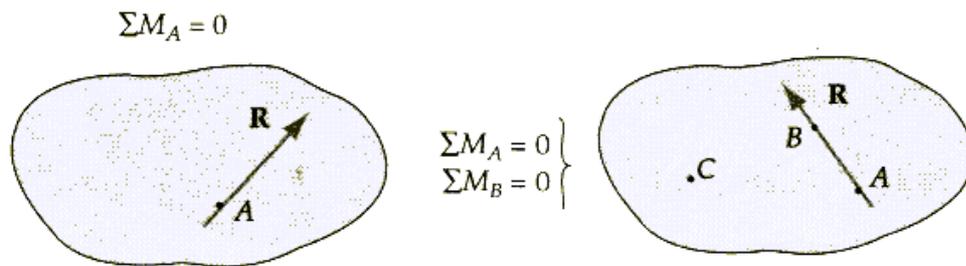
Caso B. $\vec{\Sigma M}_A = 0 \quad \vec{\Sigma M}_B = 0 \quad \vec{\Sigma M}_C = 0$

"estas ecuaciones son independientes, es decir es condición necesaria y suficiente para el equilibrio de cualquier sistema plano de fuerzas, siempre que la suma de los momentos de todas estas fuerzas respecto de tres centros cualesquiera A, B y C sean iguales a cero, y estos puntos no sean colineales"

Necesario: si $\vec{\Sigma M}_A \neq 0$ ó $\vec{\Sigma M}_B \neq 0$ ó $\vec{\Sigma M}_C \neq 0 \Rightarrow \vec{\alpha}$

Suficiente: si $\Sigma M_A = 0$ y $\Sigma M_B = 0$, tal sistema puede tener una resultante que pase por A y por B.

Pero como $\Sigma M_C = 0$, dicha resultante ha de pasar también por C, lo cual es imposible por no estar en línea con A y B, quedando garantizado el equilibrio.



2.4. DETERMINACION ESTATICA.

- Hasta ahora:

los **soportes** son los mínimos necesarios para que el S.R. **no pueda moverse** bajo cualquier estado de carga

caso **Estáticamente Determinado**

S. Rígido **completamente ligado**
 ($n_{incóg} = m_{ecs indep.}$)
 Plano XY:
 ($n = 3 ecs$) · ($m = 3 incóg$)

Ligadura: restricción que impide el movimiento
 Superabundantes- se quitan y no afectan al equilibrio

- Veamos otros casos diferentes:

1. Caso Estáticamente Indeterminado o Hiperestático

los apoyos aportan **más ligaduras** que las necesarias para inmovilizar la estructura

$n > m$

no pueden determinarse todas las incógnitas

Inmovilización total con ligaduras superabundantes

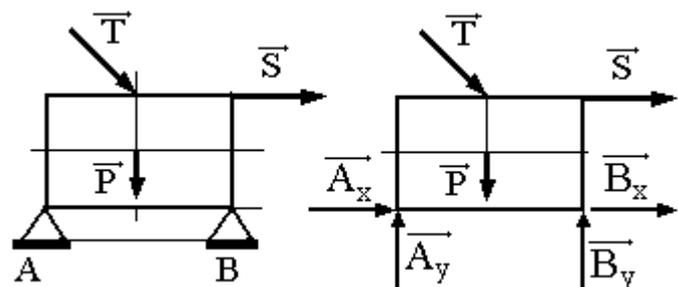
Ejemplo 1:

$n = 4$ incógnitas
 $m = 3$ ecs. independientes

$$\sum M_A = 0 \rightarrow B_y$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow A_y$$

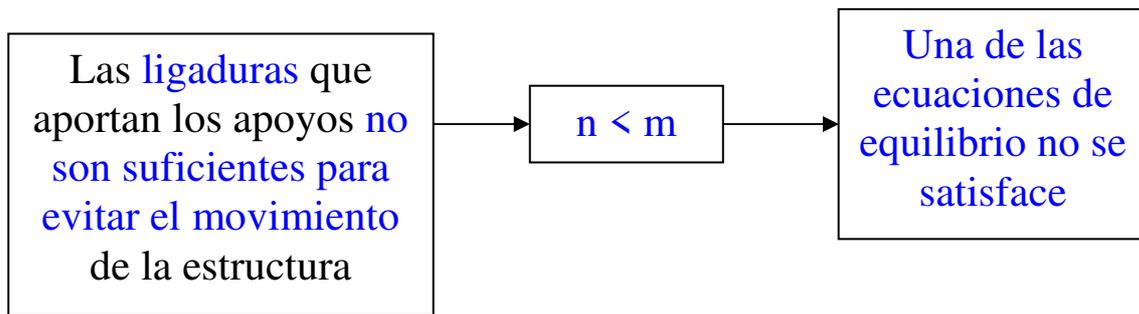
$$\sum F_x = 0 = A_x + B_x = ?$$



Componentes **estáticamente indeterminadas**

Falta **ecuación adicional** (basada en la deformación) que haga el problema resoluble

2. Caso de Estructura **parcialmente ligada**



Ejemplo 2:

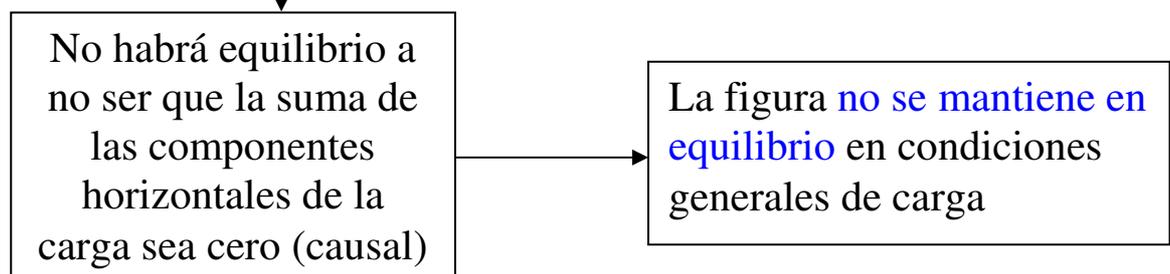
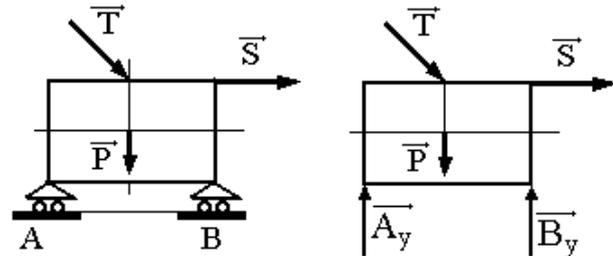
$n = 2$ incógnitas

$m = 3$ ecuaciones

$$\sum M_A = 0 \rightarrow B_y$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow A_y$$

$$\sum F_x = 0 \quad \text{no hay restricción en X.}$$



▪ **Conclusión:**

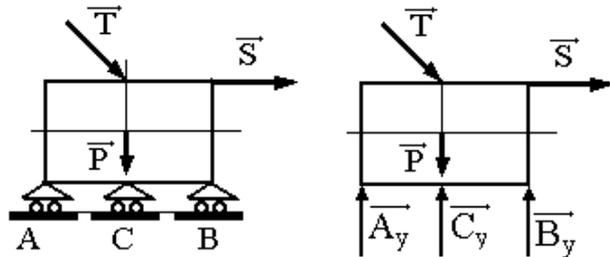
$n = m$ { es condición necesaria para que un S. Rígido esté completamente ligado y para que las reacciones en los apoyos estén estáticamente determinadas. Sino ocurre que,

es condición suficiente: que las 3 ligaduras no sean paralelas ni concurrentes

3. Caso Estructura **Impropiamente Ligada**

Veamos porqué $n = m$ es condición necesaria pero no suficiente.

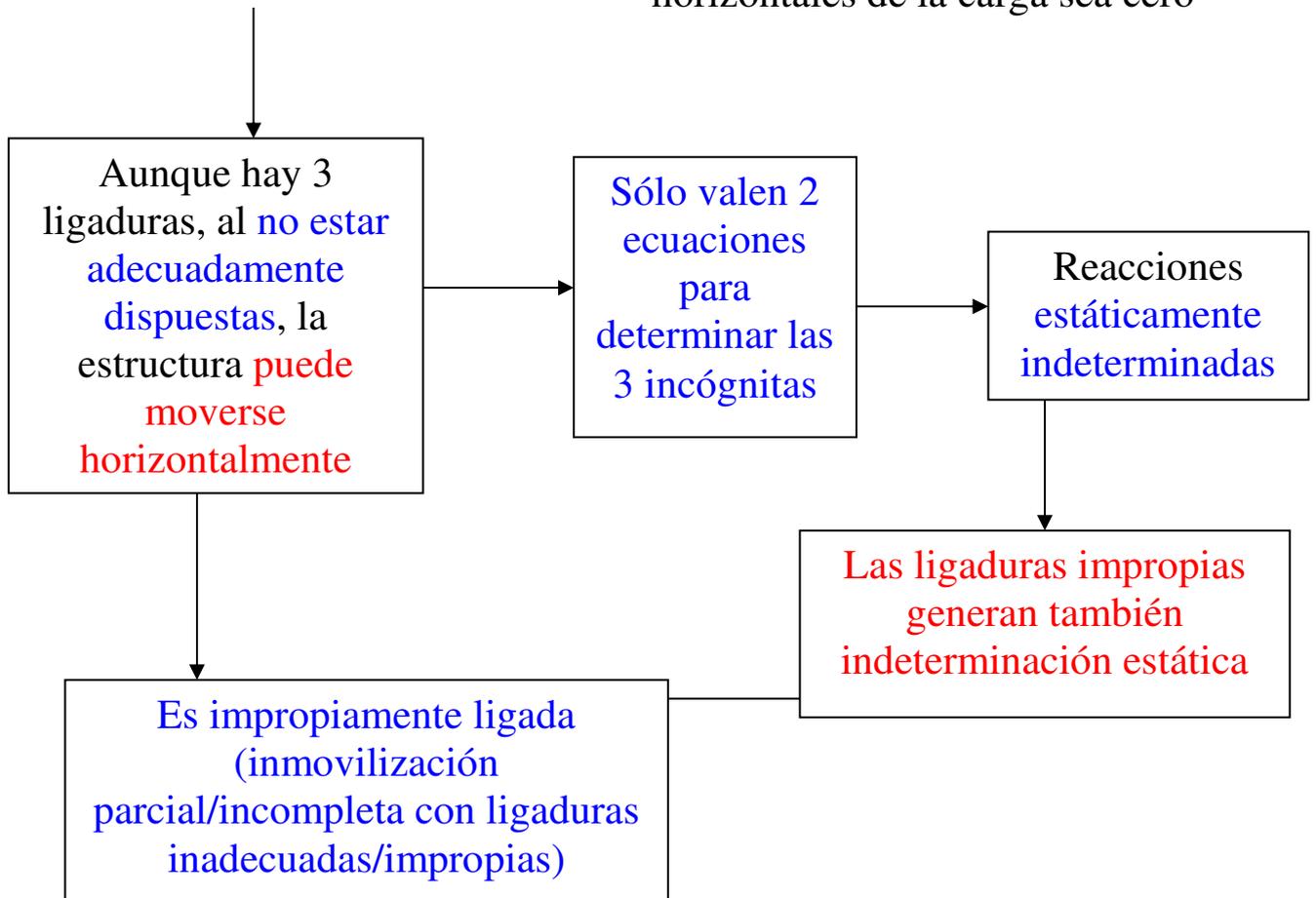
Ejemplo 3A:



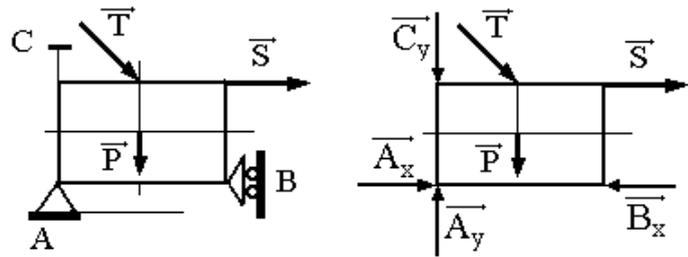
$$n = 3 \rightarrow A_y, B_y, C_y$$

$$m = 3 - 1 \rightarrow \dots \sum F_x = 0 \text{ (no valida)}$$

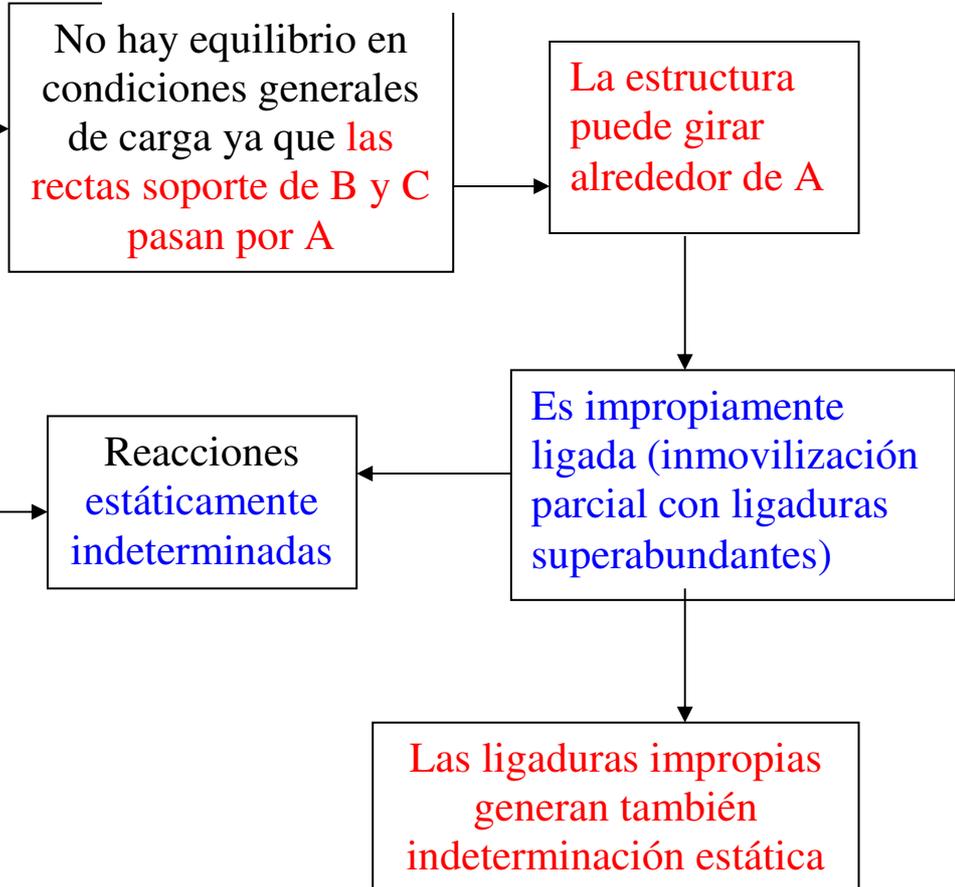
No habrá equilibrio a no ser que la suma de las componentes horizontales de la carga sea cero



Ejemplo 3B:

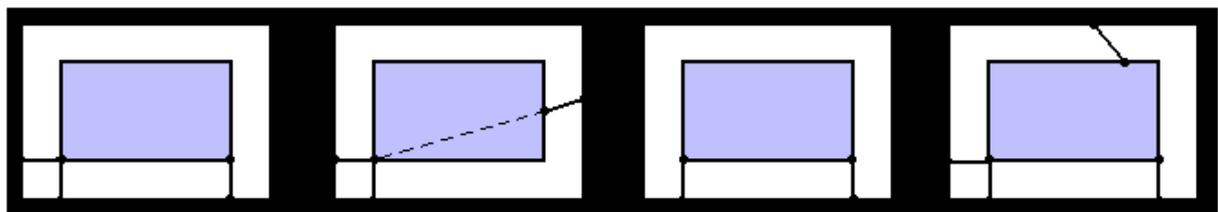


$n = 4 \rightarrow A_x, A_y, B_x, C_y$
 $m = 3 - 1 \rightarrow \dots \sum M_A = 0$
 (no válida)



▪ **Conclusión:**

un S.R. está impropriamente ligado siempre que sus apoyos, aunque generen un nº suficiente de reacciones, estén dispuestos de tal forma que todas las reacciones sean concurrentes o paralelas.



Inmovilización total.
Ligaduras adecuadas.

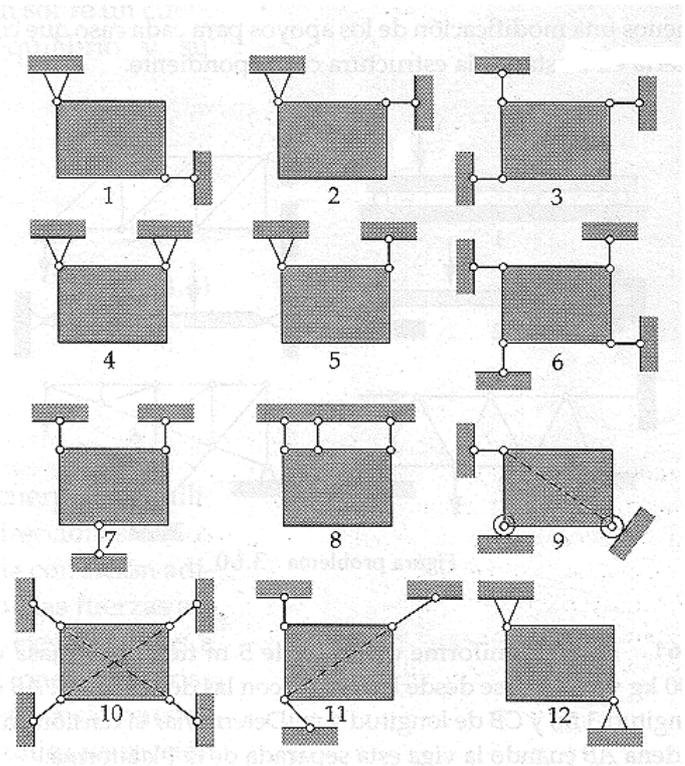
Inmovilización inadecuada.
Impropriamente ligada.

Inmovilización incompleta.
Parcialmente ligada.

Inmovilización excesiva.
Ligaduras superabundantes.

Ejercicio propuesto

La figura muestra una serie de placas con sus ligaduras que se someterán a cargas exteriores. Identificar los casos.

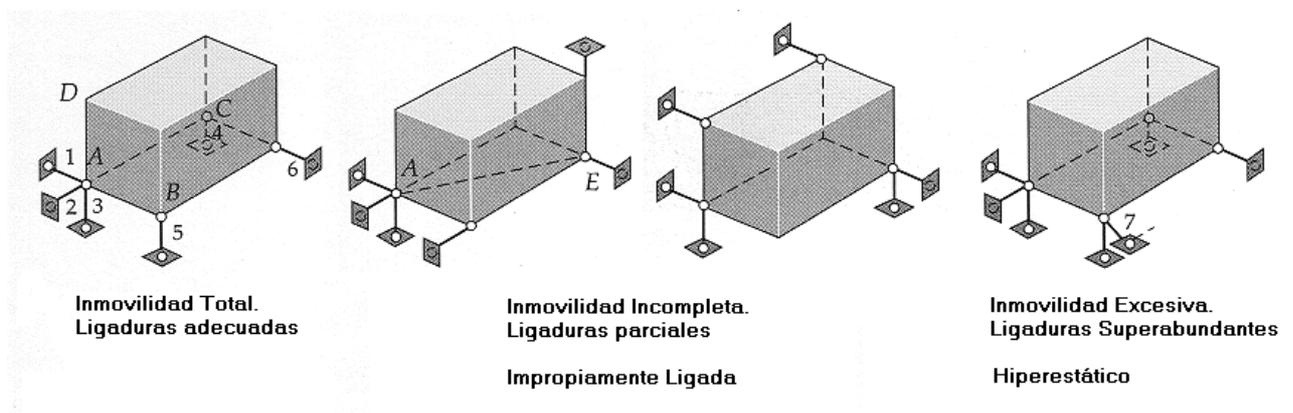


▪ **Resumen:**

para estar seguros de que un sólido rígido bidimensional está completamente ligado y que las reacciones en sus apoyos estén estáticamente determinadas, debe comprobarse que:

- ⊙ las reacciones introducen exactamente tres incógnitas
- ⊙ los apoyos están dispuestos de forma tal que las reacciones no sean ni paralelas ni concurrentes.

En el espacio,



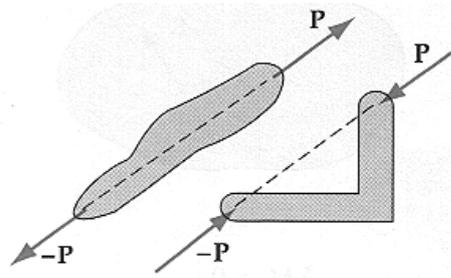
▪ Reflexión final:

- ▲ Los sistemas de soporte que generan reacciones estáticamente indeterminadas deben usarse con precaución y sólo cuando se conozcan los efectos.
- ▲ A veces los análisis que presenten reacciones estáticamente indeterminadas puede realizarse parcialmente (obtener algunas de las incógnitas).
- ▲ Los sistemas de apoyo que generen ligadura parcial o impropia deben **evitarse** en el proyecto de estructuras estáticas, aunque una estructura de este tipo no tiene necesariamente que desplomarse ($\sum \mathbf{F}_x = 0$).
- ▲ Algunos sistemas deben estar parcialmente ligados, como son los que se proyectan para que **puedan moverse** (p.e. mecanismo vagón de ferrocarril con los frenos).

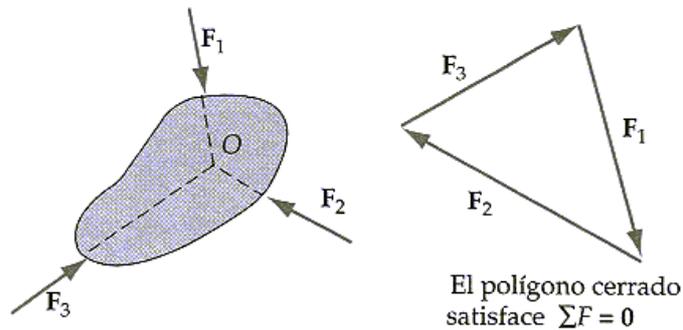
2.5. SÓLIDO SOMETIDO A DOS Y TRES FUERZAS.

▪ Condiciones de Equilibrio:

- * Cuerpo sometido a dos fuerzas \Rightarrow es necesario y suficiente que las fuerzas sean colineales, iguales en módulo, y de sentidos contrarios



- * Cuerpo sometido a tres fuerzas \Rightarrow es necesario y suficiente que las tres fuerzas sean concurrentes y que $\sum F_i = 0$



2.6. EQUILIBRIO EN TRES DIMENSIONES.

- Implica que todas las fuerzas y pares que actúan sobre el cuerpo forman un sistema cuya resultante (incluidos los pares) es nula,

$$\vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y + \vec{R}_z = \Sigma \vec{F}_x + \Sigma \vec{F}_y + \Sigma \vec{F}_z = 0$$

$$\vec{\alpha} = 0 \Rightarrow \vec{M} = \Sigma \vec{M}_x + \Sigma \vec{M}_y + \Sigma \vec{M}_z = 0$$

- ⊙ estaremos en un sistema inercial (sin aceleraciones ni fuerzas de inercia)

- Es necesario y suficiente que simultáneamente

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma \vec{F}_x = 0 \\ \Sigma \vec{F}_y = 0 \\ \Sigma \vec{F}_z = 0 \\ \Sigma \vec{M}_x = 0 \\ \Sigma \vec{M}_y = 0 \\ \Sigma \vec{M}_z = 0 \end{array} \right.$$

- ⊙ Si $\mathbf{R} = 0 \Rightarrow M_o$ no depende de ningún punto

- ⊙ Necesario:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma \vec{F}_x \neq 0 \Rightarrow a_x, \quad \Sigma \vec{F}_y \neq 0 \Rightarrow a_y, \quad \Sigma \vec{F}_z \neq 0 \Rightarrow a_z \\ \text{ó} \\ \Sigma \vec{M}_x \neq 0 \Rightarrow \alpha_x, \quad \Sigma \vec{M}_y \neq 0 \Rightarrow \alpha_y, \quad \Sigma \vec{M}_z \neq 0 \Rightarrow \alpha_z \end{array} \right.$$

- ⊙ Suficiente: Si $\mathbf{R} = 0 \Rightarrow$ el sistema puede reducirse solo a un par, y como $\mathbf{M} = 0$, tiene lugar el equilibrio

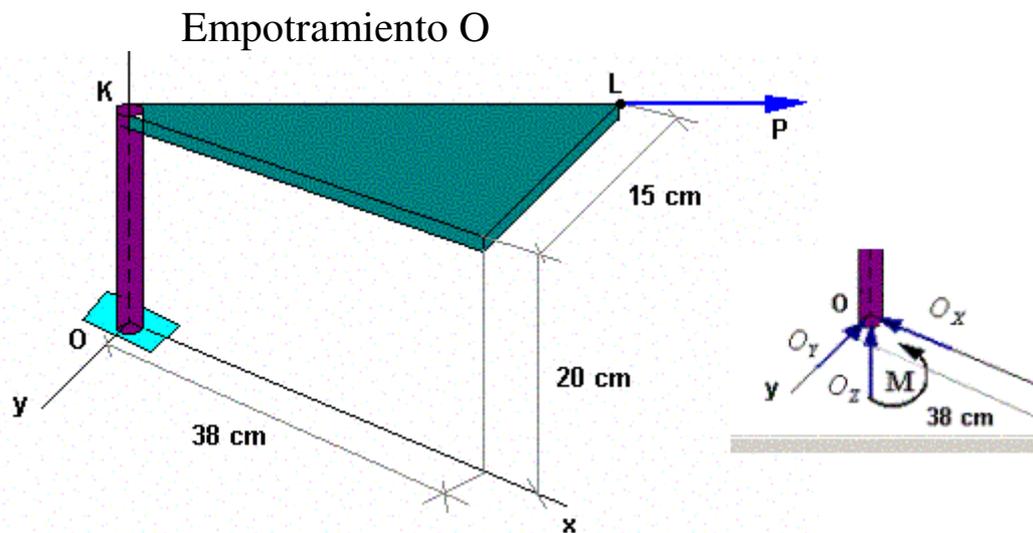
▪ **Simplificación de las condiciones de equilibrio.**

CATEGORÍAS DE EQUILIBRIO EN TRES DIMENSIONES		
Sistema de fuerzas	Diagrama de sólido libre	Ecuaciones independientes
1. Concurrentes en un punto		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$ $\Sigma F_z = 0$
2. Concurrentes en una recta		$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma M_y = 0$ $\Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_z = 0$ $\Sigma F_z = 0$
3. Paralelas		$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma M_y = 0$ $\Sigma M_z = 0$
4. General		$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma M_x = 0$ $\Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_y = 0$ $\Sigma F_z = 0 \quad \Sigma M_z = 0$

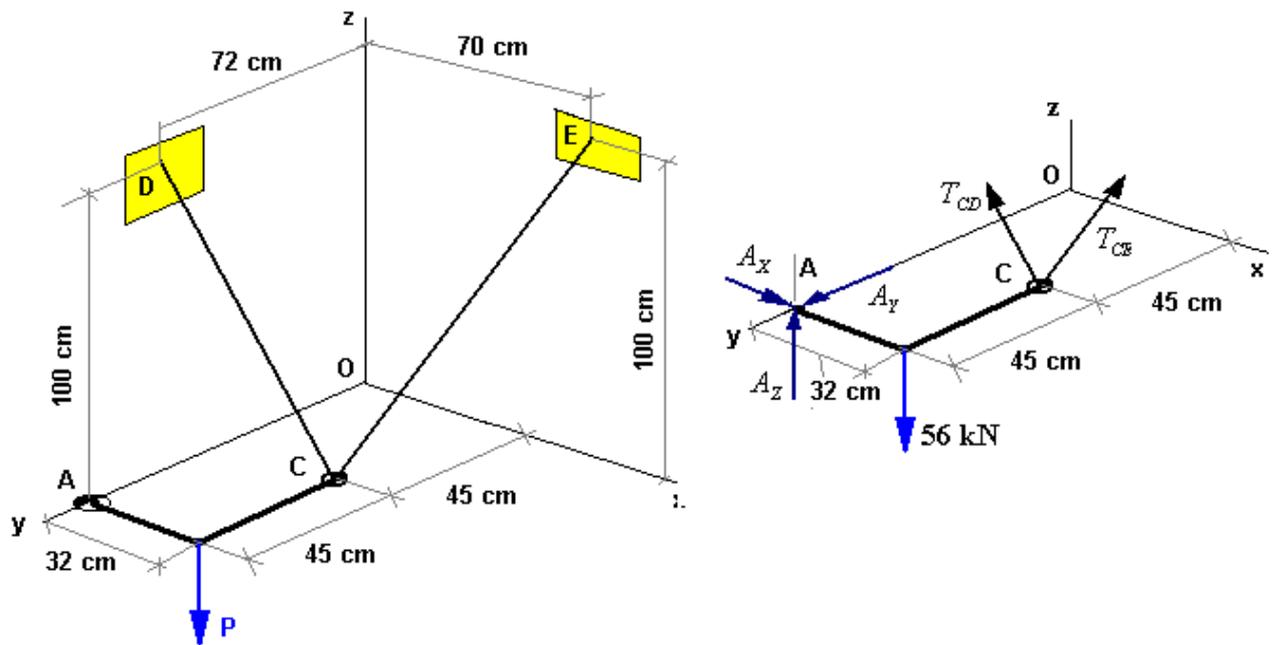
2.7. REACCIONES EN LOS SOPORTES Y ANCLAJES EN EL ESPACIO.

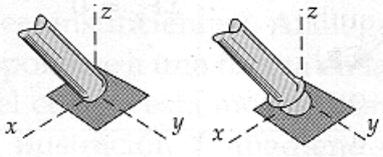
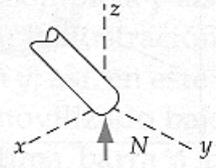
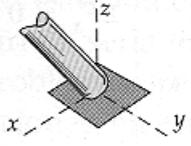
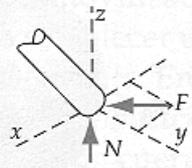
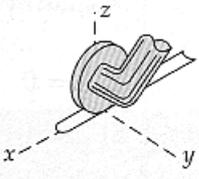
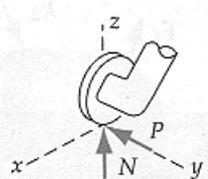
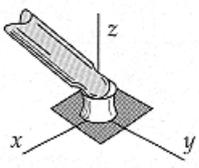
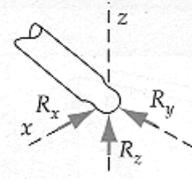
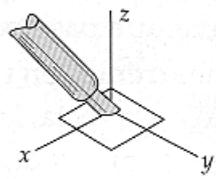
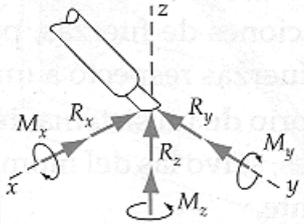
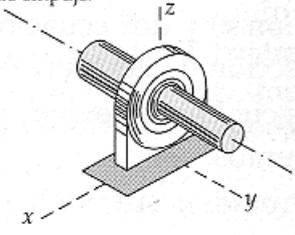
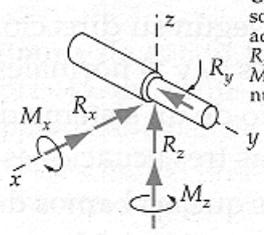
Este tipo de soportes es semejante al caso de soportes en dos dimensiones, con la salvedad de que se añade una nueva coordenada: la tercera dimensión Z.

Ejemplos



Articulaciones A y C



MODELOS PARA LA ACCION DE LAS FUERZAS EN TRES DIMENSIONES	
Tipo de contacto y origen de las fuerzas	Acción sobre el cuerpo a aislar
<p>1. Miembro en contacto con superficie lisa o miembro con apoyo esférico.</p> 	 <p>Fuerza normal a la superficie y dirigida hacia el miembro.</p>
<p>2. Miembro en contacto con superficie rugosa.</p> 	 <p>Hay posibilidad de que sobre el miembro actúe una fuerza F tangente a la superficie (fuerza de rozamiento), además de una fuerza normal N.</p>
<p>3. Apoyo de rodillos sobre ruedas con vínculo lateral.</p> 	 <p>Además de la fuerza normal N, puede existir una fuerza lateral P ejercida por la guía sobre la rueda.</p>
<p>4. Rótula.</p> 	 <p>Una rótula que pivote libremente en torno al centro de la bola puede soportar una fuerza R de tres componentes.</p>
<p>5. Unión fija (empotramiento o soldadura).</p> 	 <p>Además de una fuerza de tres componentes, las uniones fijas pueden soportar un par de fuerzas de momento M representado por sus componentes.</p>
<p>6. Cojinete de empuje.</p> 	 <p>Un cojinete de empuje puede soportar una fuerza axial R_z además de fuerzas radiales R_x y R_y. En ocasiones, los pares M_x y M_z deben suponerse nulos para lograr la isostaticidad.</p>

2.8. EJERCICIOS RESUELTOS.

A Continuación se muestran una serie de ejercicios resueltos como ayuda para asentar el contenido teórico mostrado.

9. Los cables unidos en C están cargados como se muestra. Sabiendo que $S = 360 \text{ N}$ y $K = 90 \text{ N}$ con $\alpha = 38^\circ$, hallar:

- El esfuerzo en el cable AC.
- El esfuerzo en el cable BC.

Sabemos que,

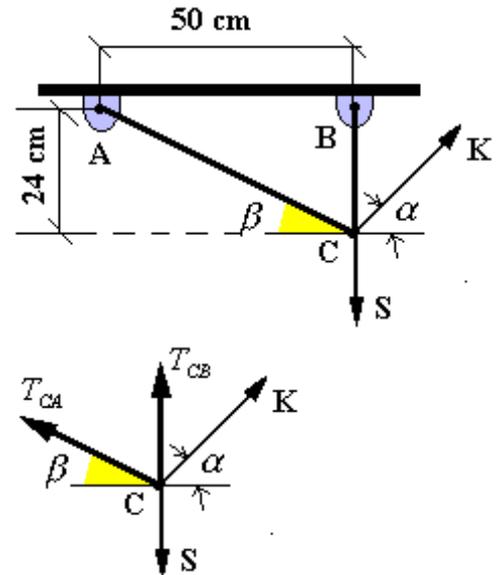
$$\beta = \tan^{-1} \frac{24}{50} = 26,64^\circ$$

Aplicando las condiciones de equilibrio al punto C,

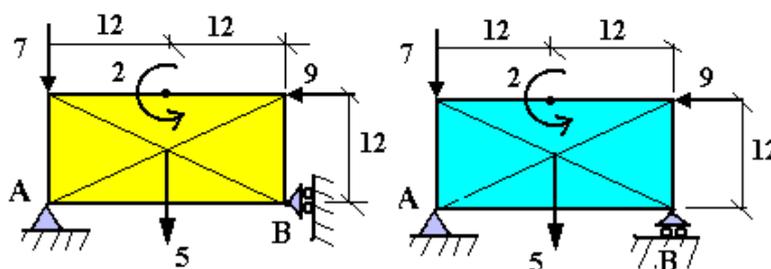
$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow 90 \cdot \cos 38 = T_{CA} \cdot \cos 26,64 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow T_{CB} + T_{CA} \cdot \sin 26,64 + 90 \cdot \sin 38 = 360 \end{aligned}$$

De dicho sistema obtenemos,

$$\begin{aligned} T_{CA} &= 79,34 \text{ N} \\ T_{CB} &= 269,01 \text{ N} \end{aligned}$$



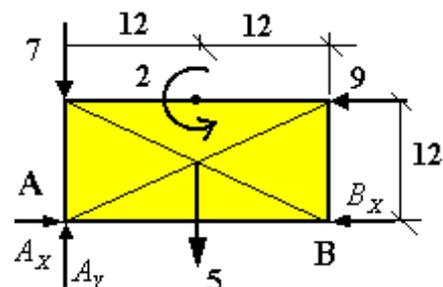
10. Para cada una de las placas cargadas de la figura, con las fuerzas en kN y las distancias en mm, hallar las reacciones en los apoyos A y B.



Placa Izquierda

Aplicando las condiciones de equilibrio al diagrama de cuerpo libre mostrado tenemos,

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow A_x = B_x + 9 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow A_y = 7 + 5 \\ \sum M_A = 0 &\Rightarrow 0 = 9 \cdot 12 + 2 - 5 \cdot 12 \end{aligned}$$

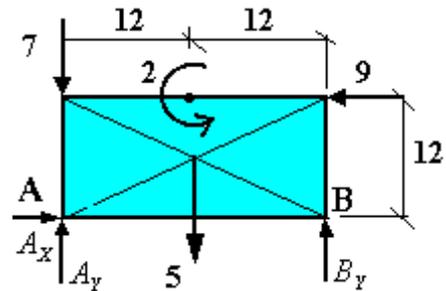


Se observa que el problema es impropriamente ligado por concurrencia de las reacciones en el punto A. Esto genera hiperestaticidad, quedando inútil la ecuación de momentos. La estructura se deformaría girando en torno a la articulación A hasta alcanzar una nueva posición de equilibrio. Así pues, no se pueden obtener las reacciones.

Placa Derecha

Aplicando las condiciones de equilibrio al diagrama de cuerpo libre mostrado tenemos,

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 &\Rightarrow A_x = 9 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow A_y + B_y = 7 + 5 \\ \sum M_A = 0 &\Rightarrow 9 \cdot 12 + 2 + B_y \cdot 24 = 5 \cdot 12\end{aligned}$$



De donde se obtienen los resultados,

$$B_y = -2,08 \text{ kN}$$

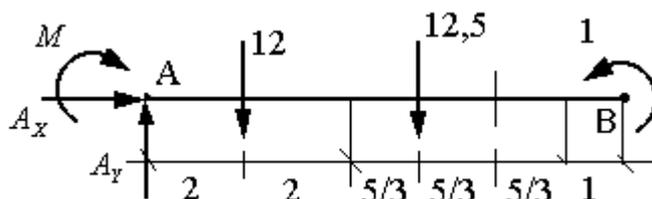
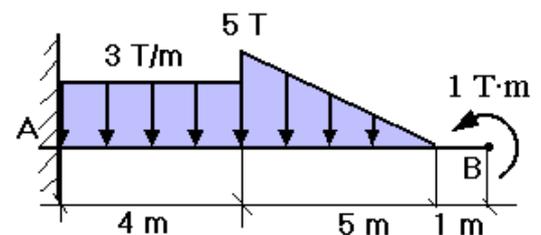
$$A_y = 14,08 \text{ kN}$$

$$A_x = 9 \text{ kN}$$

Se aprecia que la reacción B_y tiene sentido contrario al representado.

11. Hallar las reacciones en el empotramiento A de la viga en voladizo mostrada, sometida al par y a la doble distribución de carga, constante y linealmente decreciente.

Antes que nada obtenemos el diagrama de cuerpo libre representado en el que además de las reacciones del empotramiento, cambiamos las cargas distribuidas por cargas concentradas localizadas en el centroide de la distribución de carga.



A continuación aplicamos las condiciones de equilibrio como sigue,

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = 3 \cdot 4 + \frac{5 \cdot 5}{2} = 24,5$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 12 \cdot 2 + 12,5 \cdot \left(4 + \frac{5}{3}\right) + M = 1$$

De donde obtenemos el valor final de las reacciones en el empotramiento, compuesto de una reacción y un momento de empotramiento de valores,

$$\vec{A} = 24,5 \vec{j}$$

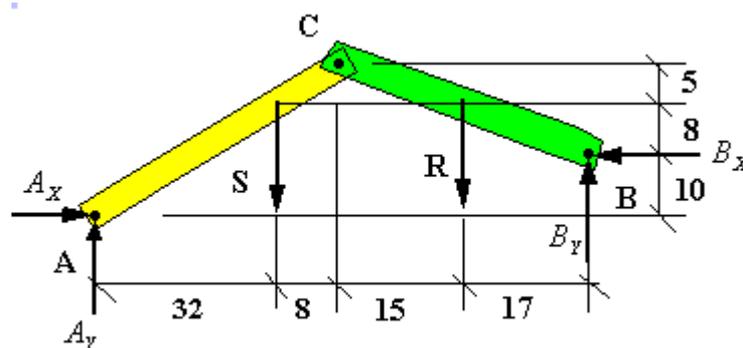
$$\vec{M} = -93,83 \vec{k}$$

Se aprecia que el momento en el empotramiento es en sentido contrario al representado inicialmente, esto es antihorario.

12. Las dos barras de la figura articuladas en A, B y C experimentan la acción de las fuerzas exteriores verticales S = 40 kN y R = 65 kN. Hallar:

- las reacciones en los apoyos A y B que garantizan el equilibrio.
- La reacción en la articulación C.

a) Considerando el sistema de las dos barras completo, dibujamos su diagrama de cuerpo libre para aplicarles las condiciones de equilibrio.

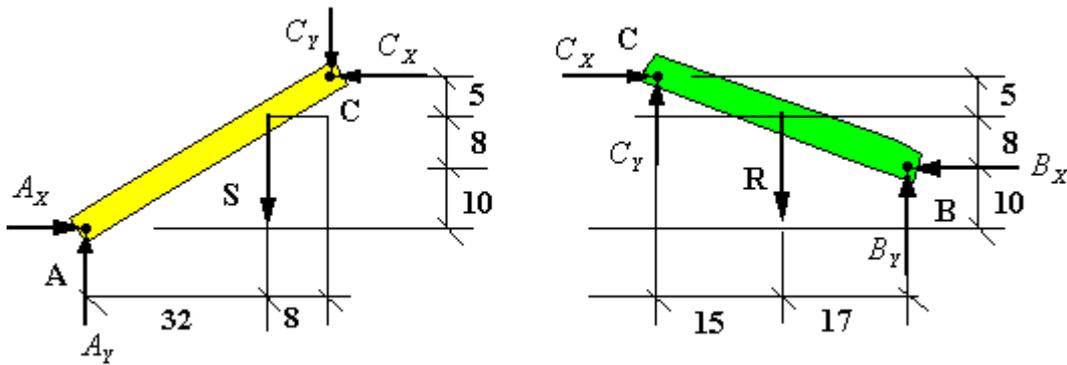


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = B_x$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y = 40 + 65$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow B_x \cdot 10 + B_y \cdot 72 = 40 \cdot 32 + 65 \cdot 55$$

Se aprecia que el sistema no tiene por sí solo solución, por haber cuatro incógnitas y sólo tres ecuaciones. Buscaremos más ecuaciones descomponiendo el sistema global en dos subsistemas que estarán también en equilibrio. Así, obtenemos los siguientes diagramas de cuerpo libre, al cual le aplicaremos las condiciones de equilibrio.



Aplicando las condiciones de equilibrio a la barra AC tenemos,

$$\begin{aligned}\sum F_X = 0 &\Rightarrow A_x = C_x \\ \sum F_Y = 0 &\Rightarrow A_y = C_y + 40 \\ \sum M_A = 0 &\Rightarrow C_y \cdot 40 + 40 \cdot 32 = C_x \cdot 23\end{aligned}$$

Si sumamos este sistema de ecuaciones al correspondiente al de equilibrio global, tenemos en total 6 ecuaciones con 6 incógnitas de donde obtenemos los siguientes resultados,

$$\begin{aligned}A_x = B_x = C_x &= 230,33 \text{ kN} \\ A_y &= 140,44 \text{ kN} \\ B_y &= -35,44 \text{ kN} \\ C_y &= 100,44 \text{ kN}\end{aligned}$$

Las reacciones definitivas en los apoyos A y B quedan como,

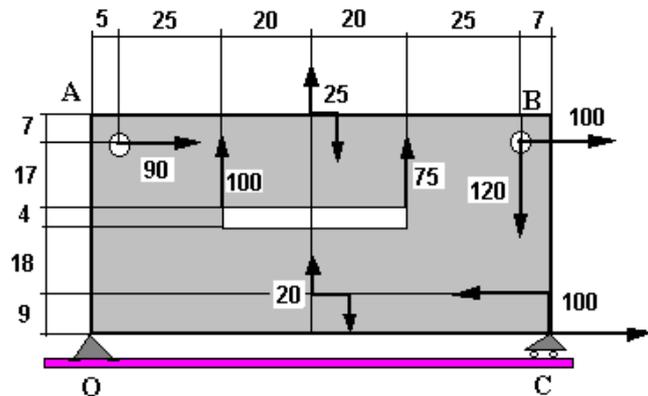
$$\begin{aligned}\vec{A} &= 230,33\vec{i} + 140,44\vec{j} \\ \vec{B} &= 230,33\vec{i} - 35,44\vec{j}\end{aligned}$$

Observando el diagrama de cuerpo libre de la barra BC vemos que las reacciones en C son iguales y opuestas que las correspondientes en la barra AC. También se podría haber resuelto el problema acudiendo a las ecuaciones de dicho diagrama junto con las del diagrama global, (en lugar de las que hemos utilizado de la barra AC) con las siguientes ecuaciones,

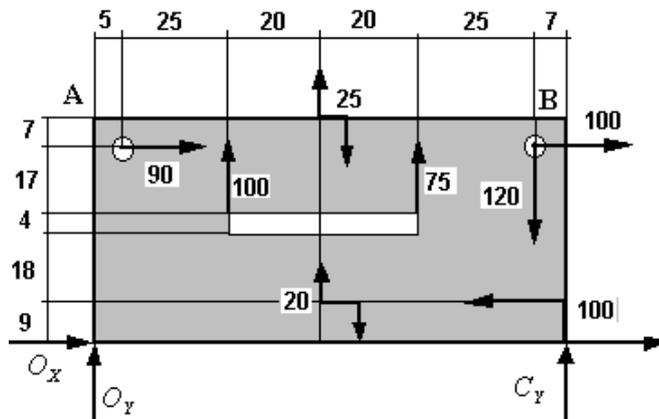
$$\begin{aligned}\sum F_X = 0 &\Rightarrow A_x = C_x \\ \sum F_Y = 0 &\Rightarrow A_y = C_y + 40 \\ \sum M_A = 0 &\Rightarrow C_y \cdot 40 + 40 \cdot 32 = C_x \cdot 23\end{aligned}$$

13. Los apoyos fijo O y móvil C mantienen la placa mostrada en la figura en equilibrio. Las fuerzas se muestran en kN, y los pares directamente en kN·cm. Hallar:

- Reacciones en dichos apoyos
- Reacciones en los apoyos a partir del sistema fuerza-par equivalente en O.



En primer lugar dibujamos el diagrama de cuerpo libre, quitando los apoyos y colocando en su lugar las reacciones correspondientes,



Aplicando las condiciones de equilibrio en el plano tenemos,

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow O_x + 90 + 100 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow O_y + C_y + 75 + 100 = 120$$

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow 90 \cdot 48 + 25 + 20 + 100 \cdot 48 + 120 \cdot 95 = C_y \cdot 102 + 100 + 75 \cdot 70 + 100 \cdot 30$$

De donde obtenemos el valor de las reacciones,

$$O_x = -190 \text{ kN}$$

$$C_y = 119,75 \text{ kN}$$

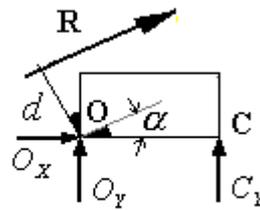
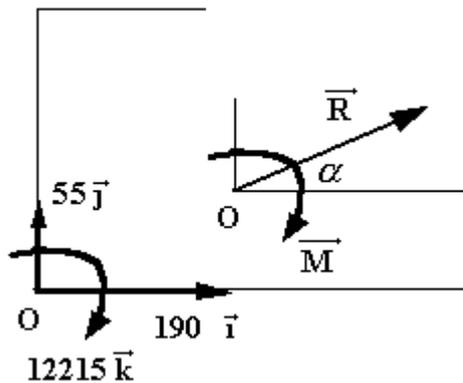
$$O_y = -174,75 \text{ kN}$$

Se aprecia que las componentes de la reacción en O tienen sentido contrario al representado.

b) Obtengamos las reacciones reduciendo el sistema de fuerzas al punto O. Consideramos positivo el sentido horario del momento. En tal caso obtenemos el siguiente sistema fuerza-par aplicado en O,

$$\vec{R} = 190\vec{i} + 55\vec{j} \text{ kN} , \quad \vec{R} = 197,8_{16,14^\circ}$$

$$\vec{M} = 12215\vec{k} \text{ kN}\cdot\text{cm}$$



$$d = \frac{12215}{197,8} = 61,75 \text{ cm}$$

Aplicando las condiciones de equilibrio al sistema formado únicamente por la resultante a la distancia d , tenemos:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow O_x + 197,8 \cdot \cos 16,14^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow O_y + C_y + 197,8 \cdot \sin 16,14^\circ = 0$$

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow 197,8 \cdot 61,75 = C_y \cdot 102$$

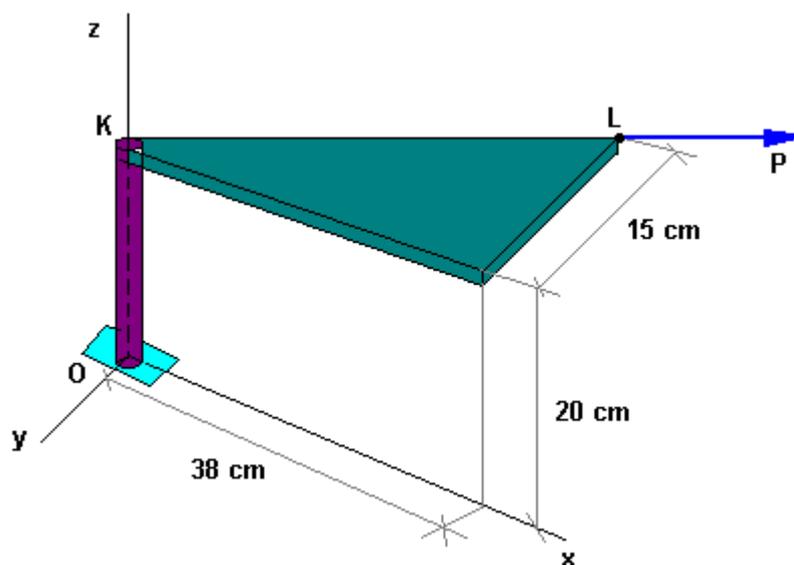
De donde se obtienen las mismas reacciones que en el caso anterior,

$$O_x = -190 \text{ kN}$$

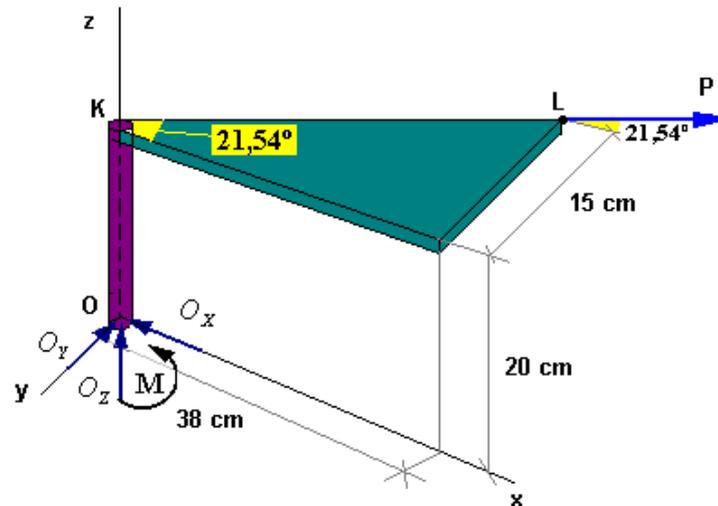
$$C_y = 119,75 \text{ kN}$$

$$O_y = -174,75 \text{ kN}$$

14. Hallar la reacción en el empotramiento O de la barra que lleva soldada en K a la placa triangular. La fuerza P toma el valor de 34 kN.



Estamos ante un problema de equilibrio en el espacio. En primer lugar obtengamos el diagrama de cuerpo libre del sistema.



Aplicando el equilibrio de fuerzas tenemos la reacción en el empotramiento de componentes,

$$O_x = 34 \cdot \cos 21,54 = 31,62 \text{ kN}$$

$$O_y = -34 \cdot \sen 21,54 = 12,48 \text{ kN}$$

$$O_z = 0 \text{ kN}$$

Aplicando el equilibrio de momentos obtenemos el momento en el empotramiento M,

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 20 \\ 31,62 & -12,48 & 0 \end{vmatrix} = 249,6\vec{i} + 632,4\vec{j}$$

TEMA 3. CENTROS DE GRAVEDAD Y MOMENTOS DE INERCIA.

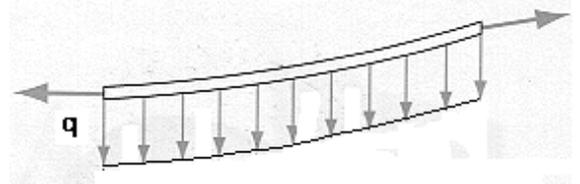
- 3.1. FUERZAS DISTRIBUIDAS
- 3.2. CENTROS DE GRAVEDAD
- 3.3. CENTROIDES DE LÍNEAS, SUPERFICIES Y VOLÚMENES
- 3.4. CENTROIDES EN OBJETOS COMPUESTOS
- 3.5. TEOREMAS DE PAPPUS-GULDIN
- 3.6. CARGAS DISTRIBUIDAS SOBRE VIGAS
- 3.7. CONCEPTO DE MOMENTO DE INERCIA
- 3.8. TEOREMA DE STEINER
- 3.9. MOMENTO DE INERCIA EN OBJETOS COMPUESTOS
- 3.10. PRODUCTO DE INERCIA
- 3.11. EJERCICIOS RESUELTOS

3.1. FUERZAS DISTRIBUIDAS.

- Las fuerzas que suponemos concentradas (dirección y punto de aplicación determinados) actúan en realidad distribuidas sobre:

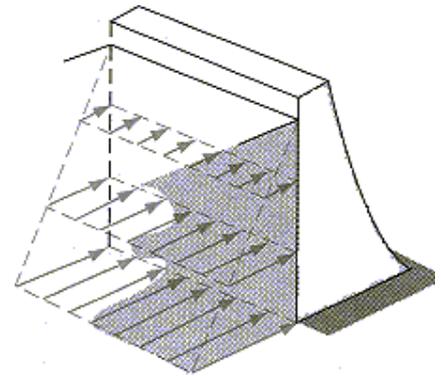
- ⊙ Una **línea** (distribución en línea):

- intensidad en N/m
- vigas y cables en estudio



- ⊙ Una **superficie** (distribución superficial):

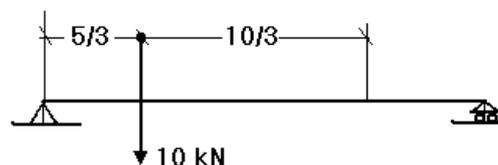
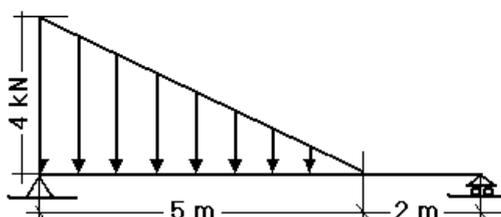
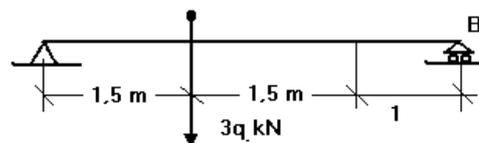
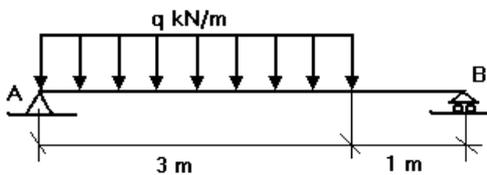
- mayoría de las fuerzas de contacto
- presión externa, esfuerzo interno
- intensidad $N/m^2 = Pa$



- ⊙ Un **volumen** (distribución volúmica o cúbica):

- fuerzas debidas a campos: gravitatorio, magnético, etc.
- actúan sobre todo el volumen del cuerpo
- intensidad en N/m^3

- ▲ La fuerza distribuida se puede reducir a una fuerza concentrada equivalente **R** de magnitud y ubicación conocidas, para el cálculo de la reacciones en los soportes.



3.2. CENTROS DE GRAVEDAD.

▪ Fuerza de la gravedad:

- Fuerza distribuida más importante que actúa como un sistema de fuerzas "uniformes", "paralelas", y verticales distribuidas por todo el cuerpo

su resultante es el peso aplicado en el c.d.g.

▲ Centro de Gravedad (c.d.g.) y Centro de Masas (c.d.m.)

- c.d.g.: punto donde se supone aplicado el peso del cuerpo
- c.d.m.: punto donde se supone concentrada la masa del cuerpo entero referente a la atracción gravitacional → simplifica problemas
- Para cuerpos extremadamente grandes (planetas, etc.) c.d.g. \neq c.d.m. ya que la magnitud y dirección gravitacional (hacia el centro) varía entre diferentes partes/partículas del cuerpo ($\vec{g} \neq cte$)
- Para cuerpos de tamaño "normal" consideraremos el efecto anterior despreciable y por tanto $\vec{g} = cte$ y c.d.g. = c.d.m.

$$\bar{X}_{CDG} = \frac{\int \bar{x} \cdot dP}{P} = \frac{\int \bar{x} \cdot g \cdot dm}{g \cdot M} = \frac{\int \bar{x} \cdot dm}{M} = \bar{X}_{CDM}$$

- ⊙ Supondremos pues un campo gravitatorio uniforme y paralelo

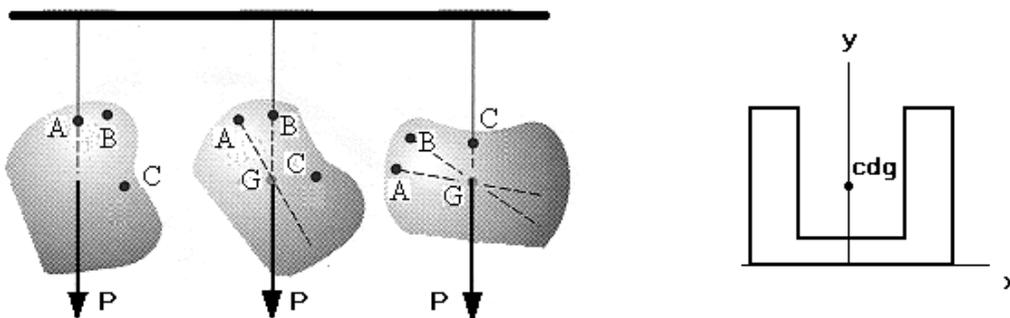


Figura 3.3.

- Aunque indica las zonas de acumulación de masa, puede estar localizado fuera del cuerpo

► Cálculo de C.D.G.

- Se **calcula** por integración, aplicando el Principio de los Momentos que dice:

"El momento de la fuerza gravitacional resultante P respecto a cualquier eje es igual a la suma de los momentos respecto al mismo eje de las fuerzas gravitacionales dP que actúan en todas las partículas consideradas como elementos infinitesimales del cuerpo"

Respecto al eje OY:

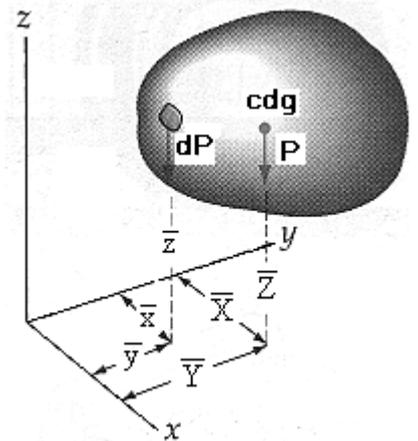
$dP \rightarrow$ peso de cada elemento diferencial dm

$dM_y \rightarrow$ momento que crea cada dP respecto OY

tendremos

$$P = \int dP$$

$$M_y = \int dM_y = \int \bar{x} \cdot dP$$



"Para que la fuerza P supuesta concentrada en el c.d.g. sea equivalente al sistema distribuido es necesario que su línea de acción pase a una distancia " \bar{x} " del eje OY (coordenada del c.d.g.), de forma que el momento ejercido por P sea el mismo que el momento real de la distribución"

$$M_y = \int dM_y = \int \bar{x} \cdot dP = \bar{X} \cdot P$$

Despejando la coordenada del c.d.g. en x :

$$\bar{X} = \frac{\int \bar{x} \cdot dP}{P}$$

Análogamente para los otros ejes obtenemos las coordenadas del c.d.g. en Y y en Z ,

$$\bar{Y} = \frac{\int \bar{y} \cdot dP}{P}, \quad \bar{Z} = \frac{\int \bar{z} \cdot dP}{P}$$

Podemos expresar dichas coordenadas en forma vectorial,

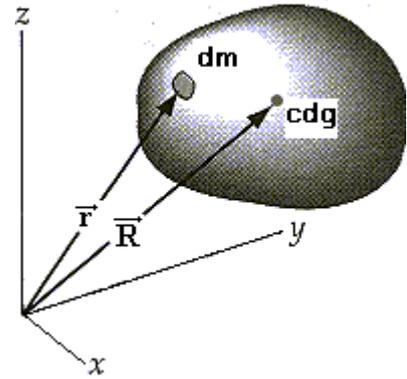
si:

vector posición elemento diferencial

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

vector de posición centro gravedad

$$\vec{R} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$$



tenemos

$$\vec{R} = \frac{\int \vec{r} \cdot dP}{P}$$

Como

$$dP = d(m \cdot g) = g \cdot dm = g \cdot \rho \cdot dV = g \cdot \rho \cdot dA \cdot e = g \cdot \rho \cdot e \cdot d \cdot dL$$

Tenemos otras expresiones para el c.d.g.,

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \frac{\int \bar{x} \cdot dm}{m} & \bar{Y} &= \frac{\int \bar{y} \cdot dm}{m} & \bar{Z} &= \frac{\int \bar{z} \cdot dm}{m} \\ \bar{X} &= \frac{\int \bar{x} \cdot dV}{V} & \bar{Y} &= \frac{\int \bar{y} \cdot dV}{V} & \bar{Z} &= \frac{\int \bar{z} \cdot dV}{V} \\ \bar{X} &= \frac{\int \bar{x} \cdot dA}{A} & \bar{Y} &= \frac{\int \bar{y} \cdot dA}{A} & \bar{Z} &= \frac{\int \bar{z} \cdot dA}{A} \end{aligned}$$

- Se observa que la posición del c.d.g.
 - ⊙ no depende de g
 - ⊙ sí depende de la geometría y masa del cuerpo

► Aplicación a sistemas de partículas

- Para un sistema de n partículas de masa m_i , V_i , masa total M y volumen total V , tendremos

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot P_i}{P} & \bar{Y} &= \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot P_i}{P} & \bar{Z} &= \frac{\sum_{i=1}^n z_i \cdot P_i}{P} \\ \bar{X} &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot m_i}{M} & \bar{Y} &= \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot m_i}{M} & \bar{Z} &= \frac{\sum_{i=1}^n z_i \cdot m_i}{M} \\ \bar{X} &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot V_i}{V} & \bar{Y} &= \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot V_i}{V} & \bar{Z} &= \frac{\sum_{i=1}^n z_i \cdot V_i}{V} \\ \bar{X} &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot A_i}{P} & \bar{Y} &= \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot A_i}{P} & \bar{Z} &= \frac{\sum_{i=1}^n z_i \cdot A_i}{P} \\ \bar{X} &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot L_i}{P} & \bar{Y} &= \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot L_i}{P} & \bar{Z} &= \frac{\sum_{i=1}^n z_i \cdot L_i}{P} \end{aligned}$$

► Simplificación de la posición del c.d.g.

- Elegiremos los ejes de referencia de manera que simplifiquen las condiciones de contorno
- Aprovecharemos que la coordenada del c.d.g. es nula:
 - ⊙ Cuando tengamos una recta o plano de simetría que hacemos coincidir con eje o plano coordenado

3.3. CENTROIDES DE LÍNEAS, SUPERFICIES Y VOLÚMENES.

- Si un cuerpo es homogéneo ($\rho = \text{cte}$) \Rightarrow las expresiones del c.d.g. localizan el llamado “centroide” y definen una propiedad del cuerpo puramente geométrica.

- ⊙ Centroide y c.d.g. o c.d.m. coinciden siempre que el cuerpo sea homogéneo

- **Tres categorías de cálculo de centroides:** (según vimos en c.d.g.)

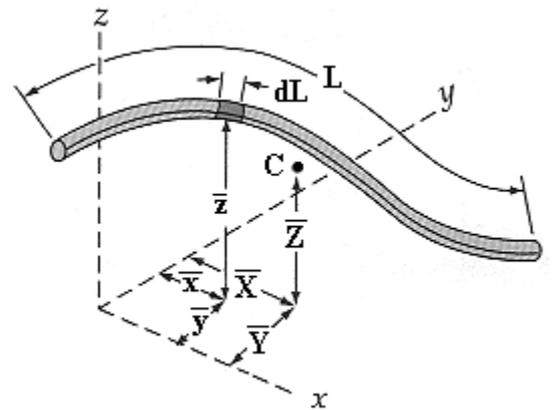
- Línea:

varilla delgada L , A y ρ

$$dm = \rho \cdot A \cdot dL$$

Si A y $\rho = \text{ctes.}$:

$$\bar{X} = \frac{\int \bar{x} \cdot dL}{L} \quad \bar{Y} = \frac{\int \bar{y} \cdot dL}{L} \quad \bar{Z} = \frac{\int \bar{z} \cdot dL}{L}$$



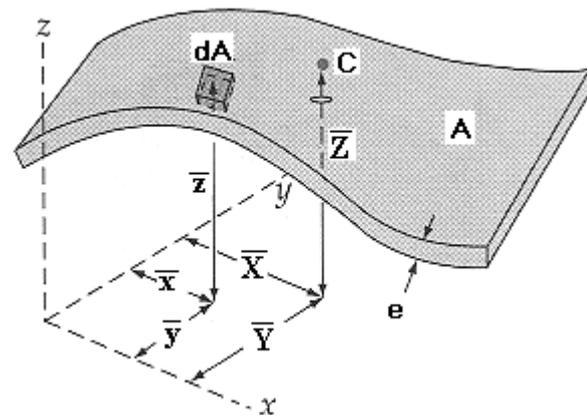
- Superficie:

Placa delgada de A , e , ρ

$$dm = \rho \cdot e \cdot dA$$

Si ρ y $e = \text{ctes.}$:

$$\bar{X} = \frac{\int \bar{x} \cdot dA}{A} \quad \bar{Y} = \frac{\int \bar{y} \cdot dA}{A} \quad \bar{Z} = \frac{\int \bar{z} \cdot dA}{A}$$



- Volumen:

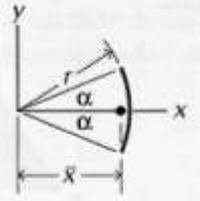
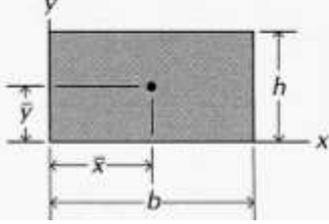
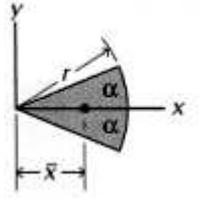
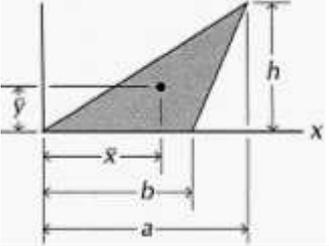
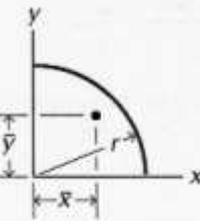
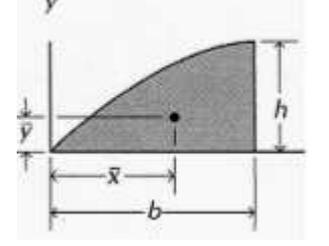
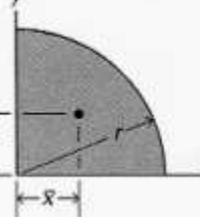
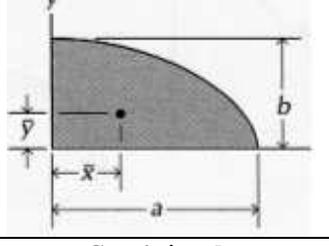
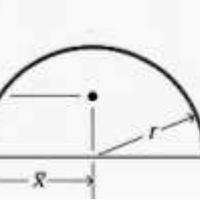
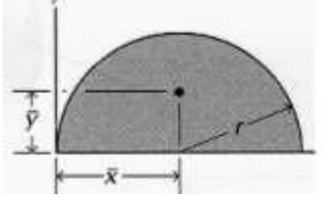
Cuerpo de V , ρ

$$dm = \rho \cdot dV$$

Si $\rho = \text{cte}$ en todo el volumen

$$\bar{X} = \frac{\int \bar{x} \cdot dV}{V} \quad \bar{Y} = \frac{\int \bar{y} \cdot dV}{V} \quad \bar{Z} = \frac{\int \bar{z} \cdot dV}{V}$$

► Centroides en figuras más comunes en línea y superficie.

<i>CENTROIDES DE LÍNEAS Y ÁREAS MÁS COMUNES</i>			
Arco Circular 	$\bar{x} = \frac{r \operatorname{sen} \alpha}{\alpha}$ $\bar{y} = 0$ $L = 2r\alpha$	Área Rectangular 	$\bar{x} = \frac{b}{2}$ $\bar{y} = \frac{h}{2}$ $S = b \cdot h$
Sector Circular 	$\bar{x} = \frac{2r \operatorname{sen} \alpha}{3\alpha}$ $\bar{y} = 0$ $S = r^2 \alpha$	Área Triangular 	$\bar{x} = \frac{a+b}{3}$ $\bar{y} = \frac{h}{3}$ $S = \frac{b \cdot h}{2}$
Arco de Cuadrante 	$\bar{x} = \bar{y} = \frac{2r}{\pi}$ $L = \frac{\pi r}{2}$	Área Semiparábola 	$\bar{x} = \frac{5b}{8}$ $\bar{y} = \frac{2h}{5}$ $S = \frac{2b \cdot h}{3}$
Cuadrante de Círculo 	$\bar{x} = \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$ $L = \frac{\pi r}{2}$	Cuadrante de elipse 	$\bar{x} = \frac{4a}{3\pi}$ $\bar{y} = \frac{4b}{3\pi}$ $S = \frac{\pi \cdot a \cdot b}{4}$
Semicircunferencia 	$\bar{x} = r$ $\bar{y} = \frac{2r}{\pi}$ $L = \pi r$	Semicírculo 	$\bar{x} = r$ $\bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$ $S = \frac{\pi \cdot r^2}{2}$

- Si el cuerpo es regular o tenemos un sistema de partículas:
 - ⊙ Cambiaremos las integrales por sumatorios $\int \rightarrow \Sigma$

Ejercicios Propuestos

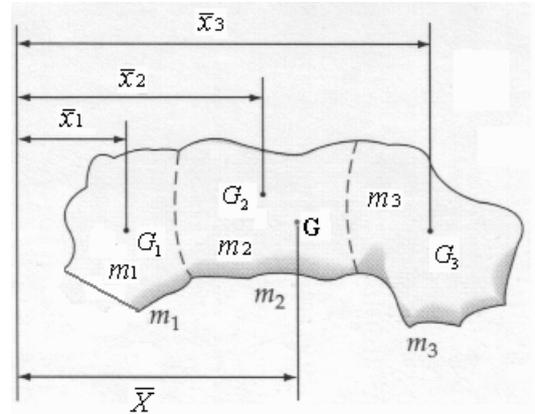
- a) Hallar por integración directa, el centroide de un triángulo y de un rectángulo, de base B y altura H.
- b) Hallar el centroide del área limitada por las curvas $y = x^2$, e $y = x+2$
- c) Hallar el centroide del área limitada por las curvas $x = 3y^2$, e $y = 3x^2$

3.4. CENTROIDE DE OBJETOS COMPUESTOS.

- A menudo se puede descomponer un objeto en elementos más sencillos (cuadrados, triángulos, etc.) cuyos centroides y áreas son más fáciles de calcular

⊙ Esto lo veremos para:

- Figuras en el plano
- Figuras en el espacio



Para la figura incluida en el plano XY y aplicando "Principio de los Momentos":

$$(m_1 + m_2 + m_3) \cdot \bar{X} = m_1 \cdot \bar{x}_1 + m_2 \cdot \bar{x}_2 + m_3 \cdot \bar{x}_3$$

Si tenemos n partes p , cada una con coordenada de c.d.g. correspondiente, obtendremos,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{p=1}^n m_p \cdot \bar{x}_p}{\sum_{p=1}^n m_p} \quad \bar{y} = \frac{\sum_{p=1}^n m_p \cdot \bar{y}_p}{\sum_{p=1}^n m_p} \quad \bar{z} = \frac{\sum_{p=1}^n m_p \cdot \bar{z}_p}{\sum_{p=1}^n m_p}$$

- ⊙ La coordenada z aparece cuando ampliamos el estudio al espacio
- ⊙ En caso de tener objetos irregulares, el planteamiento será el mismo, pero cambiando los sumatorios por las integrales correspondientes
- ⊙ Sustituyendo m por L , A , y V , obtendremos las expresiones análogas para líneas, superficies y volúmenes, respectivamente.

✘ Según estemos en plano o espacio tendremos 2 o 3 coordenadas

✘ Cualquier agujero o cavidad contará con signo menos

(-m, -L, -A, -V, etc.)

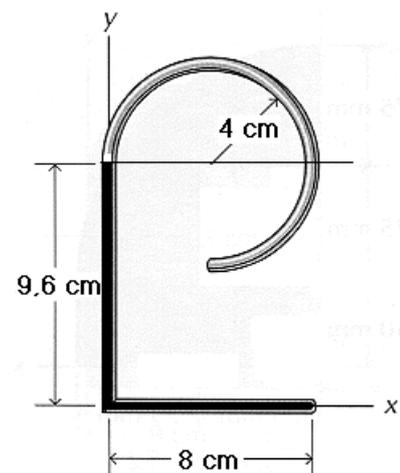
- El sistema de referencia único que tomemos será clave para la determinación del c.d.g. del sistema formado por los objetos compuestos

Ejercicios propuestos

Calcular las coordenadas de los centroides para las figuras mostradas.

- Línea en el plano

Parte	L_i	x_i	$L_i \cdot x_i$	y_i	$L_i \cdot y_i$
1					
2					
3					
4					



- Superficie en el plano

Parte	A_i	x_i	$A_i \cdot x_i$	y_i	$A_i \cdot y_i$
1					
2					
3					
4					

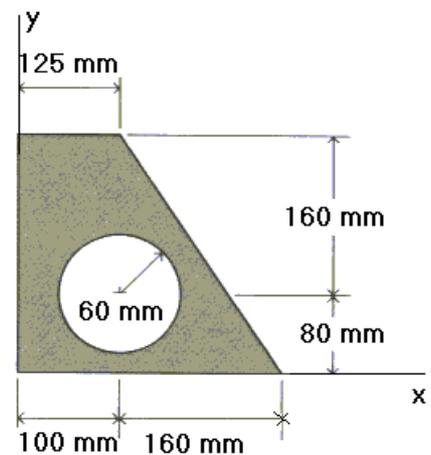
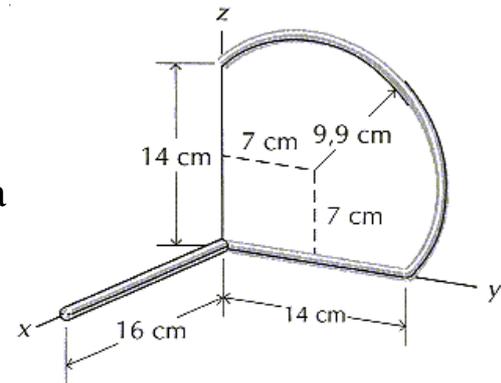


Figura 3.11.

- Objetos compuestos en el espacio
(ejemplo resuelto)

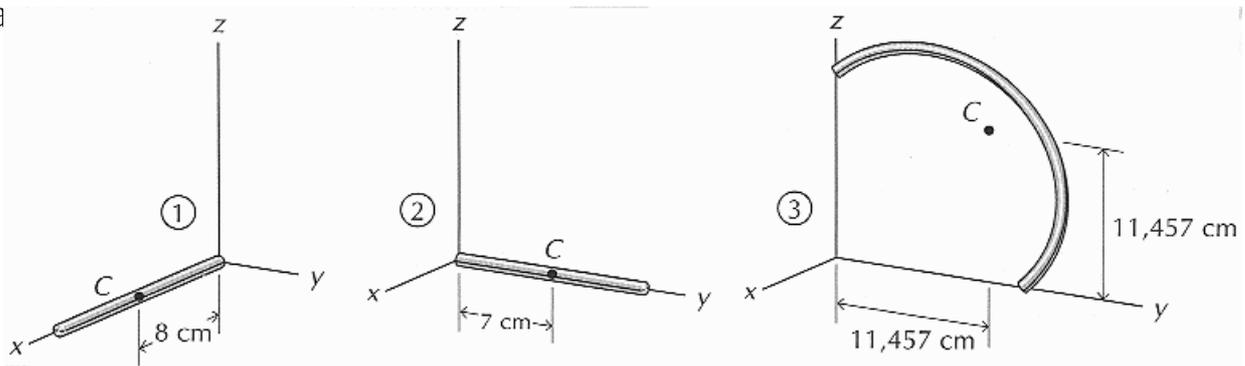
Localizar centroide de la línea espacial representada en la figura.



Tabla

Parte	L_i	x_i	$L_i \cdot x_i$	y_i	$L_i \cdot y_i$	z_i	$L_i \cdot z_i$
1	16	8	128	0	0	0	0
2	14	0	0	7	98	0	0
3	31,1	0	0	11,5	356,3	11,46	356,3
Total	61,1		128		454,3		356,3

Descomponemos la línea en sublíneas, y obtenemos los centroides de cada una



Así, las coordenadas del centroide serán,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot L_i}{L} = \frac{128}{61,1} = 2,09 \text{ cm} \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot L_i}{L} = \frac{454,3}{61,1} = 7,44 \text{ cm}$$

$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^n z_i \cdot L_i}{L} = \frac{356,3}{61,1} = 5,83 \text{ cm}$$

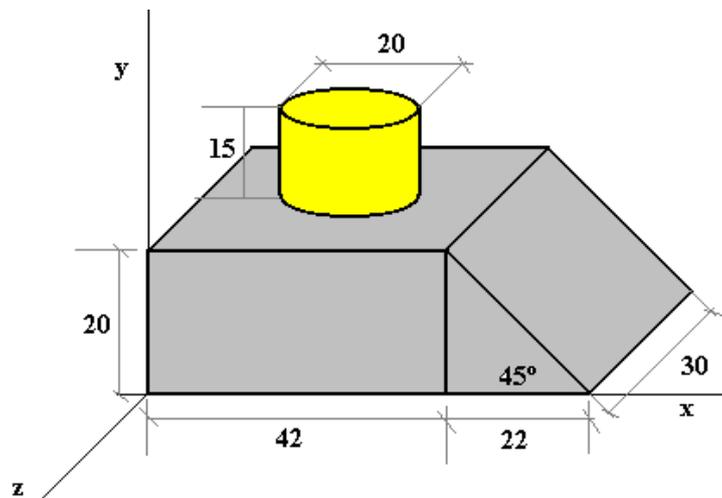
- Superficie en el espacio

Abordaremos este caso mejor en el apartado Teoremas de Pappus-Guldin

■ Volumen

Ejemplo resuelto

Localizar centroide de la figura. El cilindro se encuentra centrado sobre la superficie horizontal superior del cubo.



Parte	V_i	x_i	$V_i \cdot x_i$	y_i	$V_i \cdot y_i$	z_i	$V_i \cdot z_i$
Cubo	25200	21	529200	10	252000	-15	-378000
Prisma	6600	49,33	325578	6,67	44022	-15	-99000
Cilindro	4712,39	21	98960,19	27,50	129590,72	-15	-70685,85
Total	36512,39		953738,19		425612,72		-547685,85

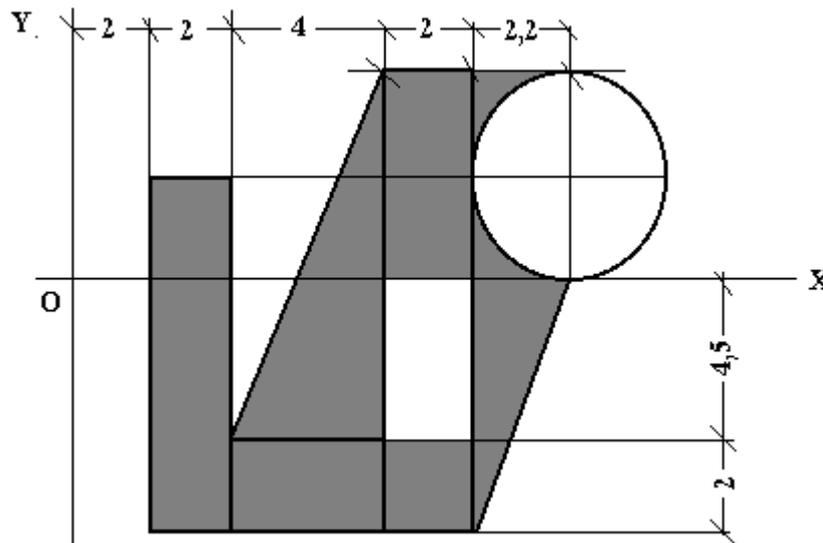
$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot V_i}{V} = \frac{953738,19}{36512,39} = 26,12 \quad uds$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot V_i}{V} = \frac{425612,72}{36512,39} = 11,66 \quad uds$$

$$\bar{Z} = \frac{\sum_{i=1}^n z_i \cdot V_i}{V} = \frac{-547685,85}{36512,39} = -15 \quad uds$$

Ejercicios propuestos

Determinar el centroide de la siguiente placa compuesta sin espesor.

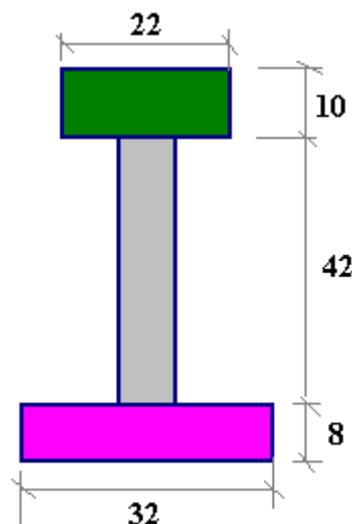


Determinar el centro de gravedad del perfil representado si presenta las siguientes características en sus partes,

Parte I: material acero ($\rho = 7,8 \text{ Kg/dm}^3$), espesor 3 mm

Parte II: material cobre ($\rho = 6 \text{ g/cm}^3$), espesor 3 mm

Parte III: material aleación de aluminio ($\rho = 7,9 \text{ g/cm}^3$), espesor 3 mm



3.5. TEOREMAS DE PAPPUS-GULDIN.

- Son dos teoremas referidos a superficies y cuerpos de revolución
- Fueron formulados por el geometra griego Pappus (s. III DC) y restablecidos por el matemático suizo Guldin
- Recordemos que:
 - ⊙ Superficie de revolución es aquella se genera girando una curva plana con respecto a un eje fijo



- ⊙ Un cuerpo o volumen de revolución se genera girando un área con respecto a un eje fijo
- Aplicaciones:
 - Cálculo de volúmenes y superficies en figuras regulares, conocidos los centroides de sus generatrices
 - Localización de centroides en curvas o superficies planas regulares conocida la superficie y/o volumen generadas por éstas.

Teorema I.

“El área de una superficie de revolución es igual a la longitud de la curva generadora por la distancia recorrida por su centroide ($\alpha \cdot y$) al generarse la superficie”

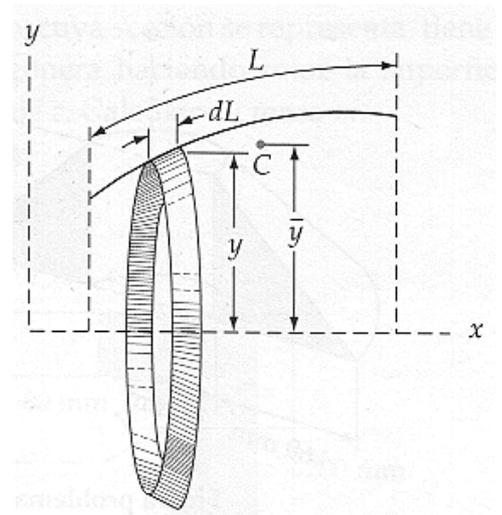
$$S = \alpha \cdot \bar{y} \cdot L$$

▪ Demostración:

Tomamos un dL a una distancia y de OX.
Al girar **una vuelta** respecto a OX se genera un anillo de superficie dS ,

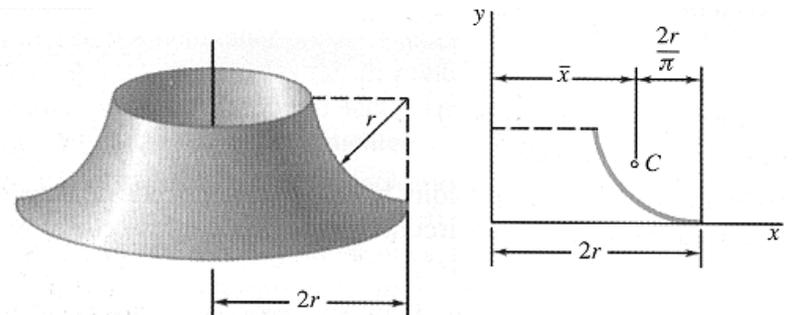
$$dS = 2\pi \cdot y \cdot dL \quad , \quad \bar{y} = \frac{\int y \cdot dL}{L}$$

$$S = \int dS = 2\pi \int y \cdot dL = 2\pi \int \frac{\bar{y} \cdot L}{dL} \cdot dL = 2\pi \cdot \bar{y} \cdot L$$



Ejemplo resuelto

La superficie del sombrero hueco será,



$$\bar{x} = 2r - \frac{2r}{\pi} = 2r \left(1 - \frac{1}{\pi} \right) \quad L = \frac{2\pi \cdot r}{4}$$

$$S = 2\pi \cdot \bar{x} \cdot L = 2\pi \cdot 2r \left(1 - \frac{1}{\pi} \right) \cdot \frac{\pi \cdot r}{2} = 2\pi \cdot r^2 (\pi - 1)$$

Teorema II.

“El volumen de un cuerpo de revolución es igual al área generadora multiplicada por la distancia recorrida por su centroide ($\alpha \cdot \bar{y}$) al generarse el volumen”

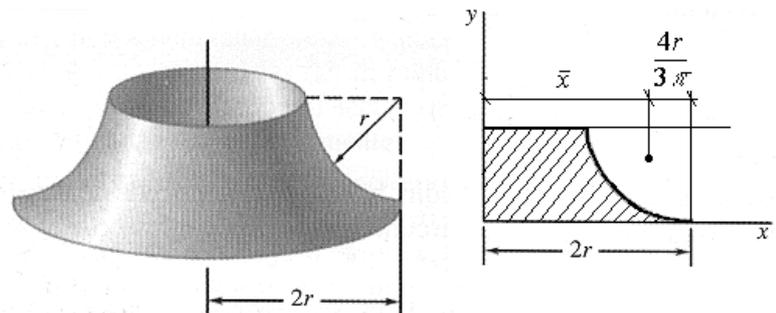
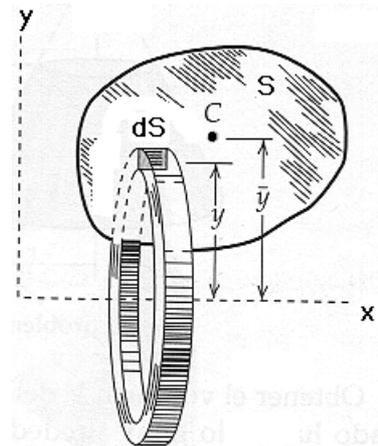
$$V = \alpha \cdot \bar{y} \cdot S$$

▪ Demostración:

Tomemos un dS a una distancia y del eje OX . Al girar **una vuelta** respecto a OX , se genera un anillo de Volumen dV

$$dV = 2\pi \cdot y \cdot dS \quad , \quad \bar{y} = \frac{\int y \cdot dS}{S}$$

$$V = \int dV = 2\pi \int y \cdot dS = 2\pi \int \frac{\bar{y} \cdot S}{dS} \cdot dS = 2\pi \cdot \bar{y} \cdot S$$



Ejemplo resuelto

El volumen ocupado por el sombrero será la diferencia entre el volumen cúbico y el correspondiente al cuadrante circular,

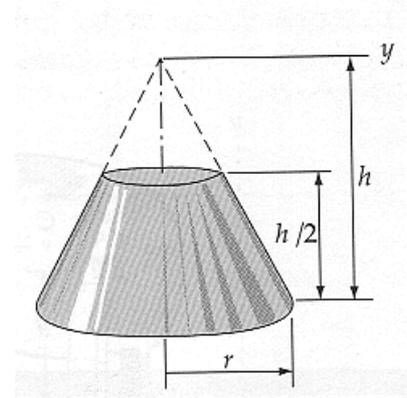
$$\bar{x} = 2r - \frac{4r}{3\pi} = 2r \left(1 - \frac{2}{3\pi} \right) \quad S = r \cdot r - \frac{\pi \cdot r^2}{4} + r \cdot r$$

$$V = V_{rect} - V_{cuadr.circ.} = 2\pi \cdot \bar{x}_{rect} \cdot S_{rect} - 2\pi \cdot \bar{x}_{cuadr.circ.} \cdot S_{rect} =$$

$$2\pi \cdot r \cdot 2r \cdot r - 2\pi \cdot 2r \left(1 - \frac{2}{3\pi} \right) \cdot \left(\frac{\pi \cdot r^2}{4} \right) = 4\pi \cdot r^3 - 2\pi \cdot 2r \left(1 - \frac{2}{3\pi} \right) \cdot \left(\frac{\pi \cdot r^2}{4} \right)$$

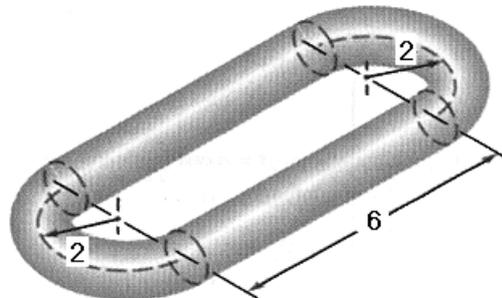
Ejercicios propuestos

Determinar el área y volumen del troncocono Representado en la figura.



Una cadena de un petrolero tiene 800 eslabones de acero como el mostrado con las unidades en dm. Si el radio de la sección circular es de 5 cm, determinar:

- litros de pintura necesarios para pintar la cadena si cada metro cuadrado de superficie demanda un litro.
- peso de la cadena ($\gamma = 7,8 \text{ Kg/dm}^3$).



3.6. CARGAS DISTRIBUIDAS SOBRE VIGAS.

- Cargas distribuidas

- ⊙ peso propio (la más común)
- ⊙ equivalente a una carga concentrada que pasa por centroide del área de distribución, y cuyo módulo es el valor del área.

Demostración:

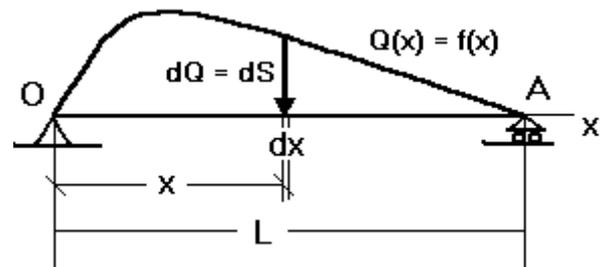
- Sea la viga que soporta carga distribuida $Q(x)$ en N/m

Sobre el elemento de viga dx actúa

$$dQ = Q(x) \cdot dx$$

La carga total que soporta la viga será

$$Q = \int_0^L Q(x) \cdot dx = S$$



- Así pues,

- ⊙ La carga distribuida $Q(x) = f(x)$ equivale a una carga concentrada de módulo igual a la superficie bajo el diagrama de carga
 - Esto solo vale a efectos externos (cálculo de reacciones)
 - No vale a efectos internos (cálculo de deformaciones o esfuerzos internos)

✘ La línea de acción pasará por el centroide de la superficie:

Demostración:

Sabemos:

- la coordenada de paso del centroide $\bar{x} = \frac{\int_0^L x \cdot dS}{S}$
- Q produce un momento igual a la suma de los momentos producidos por cada una de las fuerzas que componen la distribución

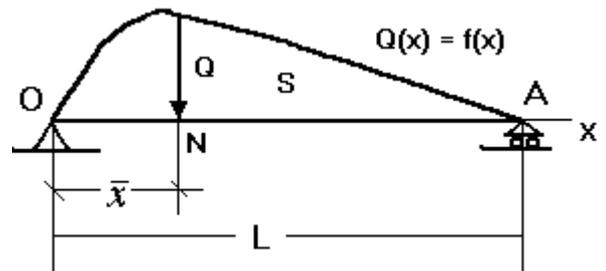
Así,

$$\bar{x} = \frac{\int_0^L dQ \cdot x}{Q}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^L x \cdot dS}{S}$$

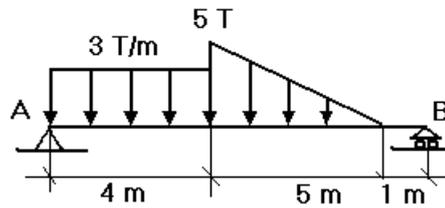
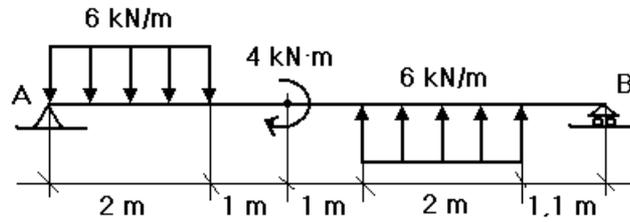
$$Q \cdot \bar{x} = \int_0^L dQ \cdot x$$

$$Q = S \quad dQ = dS$$



Ejercicios Propuestos

Determinar las resultantes que actúan sobre los apoyos para las vigas mostradas en la figura inferior.



3.7. CONCEPTO DE MOMENTO DE INERCIA.

▲ Se emplea en Dinámica, y en Mecánica de Materiales

▲ Lo vemos en Estática debido a:

- El método de los primeros momentos se extiende con facilidad para analizar las inercias
- Sirve como preparación para la aplicación en la Dinámica y Mecánica de Materiales

➤ **Inercia:**

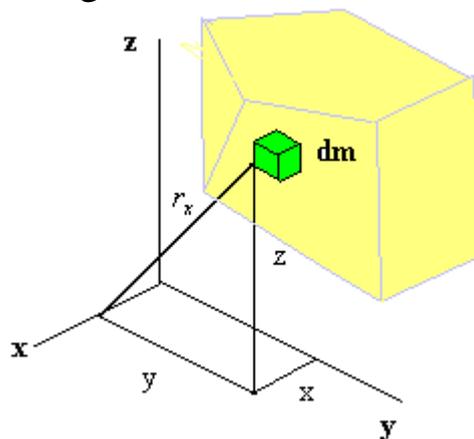
- Tendencia de la materia a permanecer con su cantidad de movimiento (en reposo o a $v = \text{cte}$) \Rightarrow resistencia al cambio, tanto en traslación (M) como en rotación (I),

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{M} = I \cdot \vec{\alpha}$$

➤ **Momento de Inercia (mdi)**

- La inercia en la rotación depende de la masa y de la distribución de ésta respecto al eje de giro



$$I_x = \int_m r_x^2 \cdot dm \quad m^2 \cdot \text{Kg}$$

➤ Radio de giro

$$r_G = \sqrt{\frac{I_S}{m}}$$

- Referido a un eje s
- Es la distancia al eje de un punto en el que habría que concentrar toda la masa del cuerpo para tener el mismo mdi respecto al eje, que la masa distribuida
- Sólo es una forma de expresar el mdi de un cuerpo en función de su masa y una longitud

▶ Cálculo del Momento de Inercia

El mdi de cuerpo con masa distribuida es,

$$dI_x = r_x^2 \cdot dm = (y^2 + z^2) dm$$

r = distancia menor desde dm a OX

$$I_x = \int_m r_x^2 \cdot dm = \int_m (y^2 + z^2) dm$$

Análogamente tendremos:

$$I_y = \int_m r_y^2 \cdot dm = \int_m (x^2 + z^2) dm$$

$$I_z = \int_m r_z^2 \cdot dm = \int_m (x^2 + y^2) dm$$

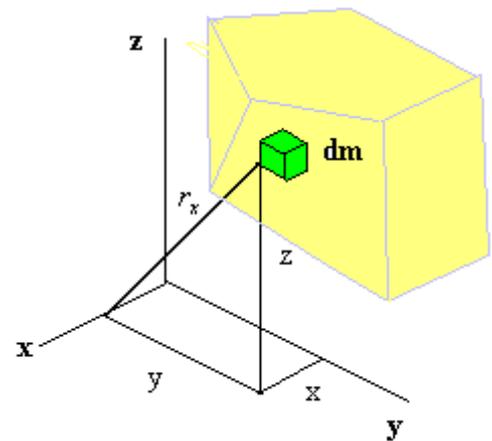


Figura 3.28.

En el cálculo tendremos en cuenta,

- $dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot dA \cdot e$
- según tomemos dm tendremos una integración simple, doble o triple
- usaremos coordenadas cartesianas o polares según la geometría del cuerpo
- Los dm deben seleccionarse de forma que:
 - ✖ Todas las partes del elemento sean equidistantes del eje de referencia. En caso contrario seleccionaremos dm de manera que sea conocido su mdi respecto al eje para el cual hay que determinar el MDI del cuerpo.
 - ✖ Si conocemos el cdm y el mdi respecto a un eje que pasa por cdm y es paralelo al eje dado, podremos determinar el mdi respecto al eje pedido usando el Teorema de Steiner como veremos más adelante.

Ejercicio propuesto

Determinar el mdi de la barra cilíndrica mostrada respecto a su eje longitudinal "s". Asimismo hallar también el radio de giro respecto a dicho eje.

Datos de la barra:

$$\rho = 1,1 \text{ Kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

Radio bases = 152 cm

Longitud = 500 cm

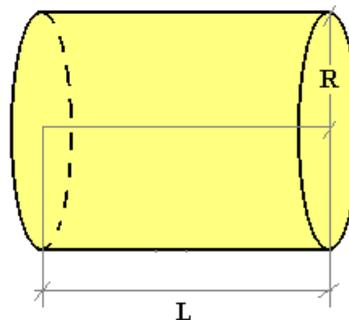


Figura 3.29.

➤ mdi de sistemas de partículas de masa m_i

Si consideramos el cuerpo formado por un sistema de puntos materiales, tendremos

$$I_{sTotal} = \sum_{i=1}^n r_i^2 \cdot m_i = r_1^2 \cdot m_1 + r_2^2 \cdot m_2 + \dots + r_n^2 \cdot m_n = I_{s1} + I_{s2} + \dots + I_{sn}$$

Es decir, el mdi del sistema de puntos de masa m_i respecto a un eje "s" equivale a la suma de los mdi de cada uno de los puntos respecto dicho eje

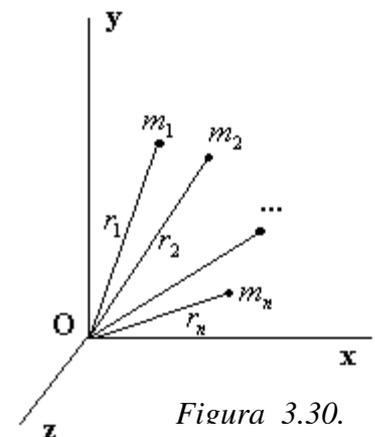


Figura 3.30.

Ejercicio propuesto

Sea el sistema de partículas mostrado con sus masas correspondientes. Hallar los mdi respecto a los ejes coordenados.

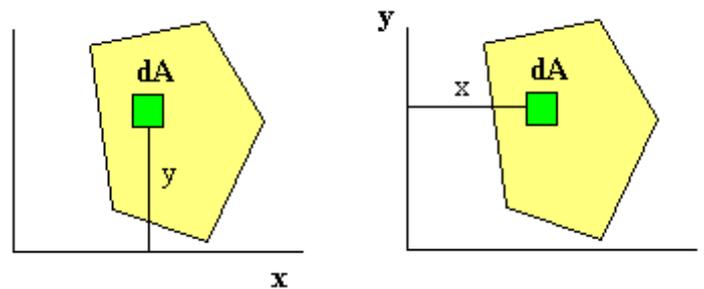
$m_1 = 5\text{kg}$ punto $(1,0,0)$, $m_2 = 7,5\text{kg}$ punto $(1,1,0)$, $m_3 = 2,5\text{kg}$ punto $(1,0,1)$
 $m_4 = 5\text{kg}$ punto $(1,0,3)$, $m_5 = 2\text{kg}$ punto $(0,1,0)$

➤ mdi de áreas (Momento segundo de la superficie)

- Para un cuerpo plano tenemos

$$dI_x = y_x^2 \cdot dA \quad m^4$$

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA$$



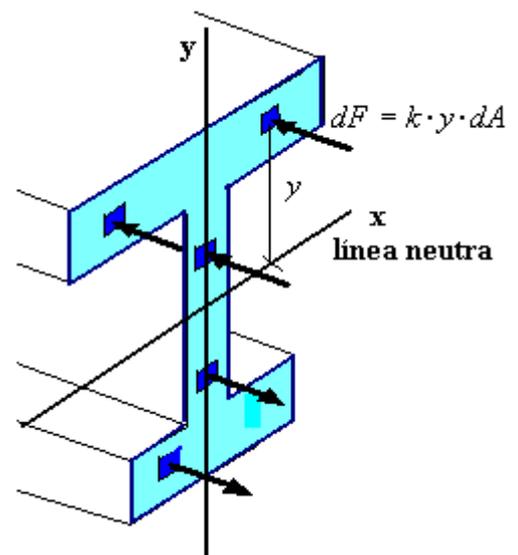
y = distancia menor desde dA a OX

- Concepto de gran aplicación → representa la resistencia de una viga a deformarse ante un momento
- Presenta interés en la aplicación Resistencia de materiales como sigue,

Consideremos las fuerzas distribuidas ΔF :

- de módulo proporcional al área elemental sobre la que actúan
- que varían proporcionalmente a la distancia " y " respecto al eje dado

$$dF = k \cdot y \cdot dA$$



Estas fuerzas distribuidas ocurren a nivel interno en una viga de sección transversal uniforme cuando la sometemos a dos pares extremos iguales y

opuestos (flexión pura), siendo el eje de referencia el centroidal el correspondiente a la línea neutra.

Las fuerzas que actúan a un lado de la línea neutra son de tracción y por el otro lado de compresión. En la fibra neutra no hay fuerzas. La resultante de dichas fuerzas internas es:

$$R = \int k \cdot y \cdot \Delta A = k \int y \cdot dA = k \cdot \bar{y} \cdot A = 0$$

ya que el eje x coincide con el centroide $\bar{y} = 0$

El sistema de fuerzas ΔF se puede reducir a un par M , cuyo módulo (momento flector) será la suma de los momentos de las fuerzas elementales respecto al eje centroidal x.

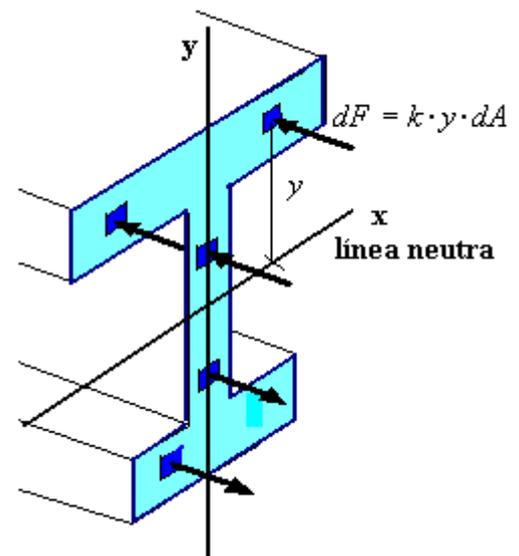
Para un elemento diferencial tenemos,

$$dM_x = y \cdot dF = k \cdot y^2 \cdot dA$$

Para toda la sección tendremos,

$$M_x = \int dM_x = \int y \cdot dF = \int k \cdot y^2 \cdot dA = k \int y^2 \cdot dA$$

$\int y^2 \cdot dA = I_x$ es el mdi o momento de segundo orden de la sección de la viga respecto al eje centroidal x.



Siempre tendremos $I_x > 0$ ya que se obtiene multiplicando cada elemento de área dA ($dA > 0$) por el cuadrado de su distancia ($y^2 > 0$) al eje x e integrando sobre la sección de la viga

▲ El radio de giro será:

respecto a un eje "s" cualquiera

$$r_G = \sqrt{\frac{I_s}{A}}$$

► Momento de Inercia Polar

$$I_o = \int_A r^2 \cdot dA = \int_A (x^2 + y^2) \cdot dA = \int_A (x^2 \cdot dA + y^2 \cdot dA)$$

$$I_o = I_x + I_y$$

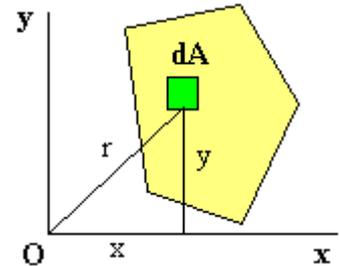


Figura 3.34.

- I_o = resistencia imaginaria de un área A a los desplazamientos rotatorios en su propio plano alrededor del punto O
- Relativo a torsión de barras cilíndricas y a problemas relacionados con la rotación en el plano
- I_o siempre se calcula con respecto a un eje perpendicular al área considerada

→ Análogamente para los radios de giro tendremos:

$$r_{Go}^2 = r_{Gx}^2 + r_{Gy}^2$$

- Dos conclusiones:
 - ✓ $I > 0$ siempre
 - ✓ Los mdi se pueden sumar

3.8. TEOREMA DE STEINER.

- También conocido como teorema de los ejes paralelos

$$I_s = I_{cdg} + m \cdot d^2$$

$$I_s = I_c + A \cdot d^2$$

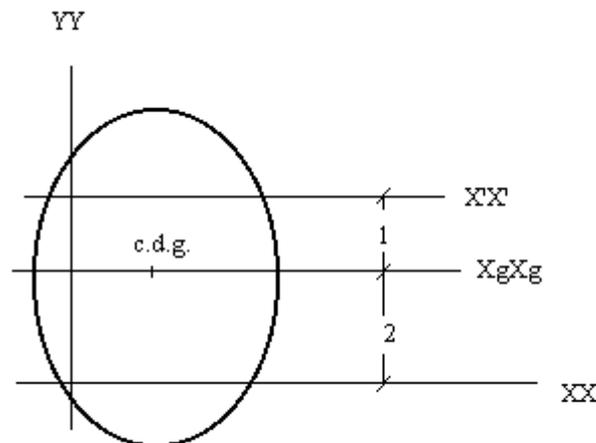
I_s = m.d.i. respecto cualquier eje "s"

$I_{cdg} = I_c$ = m.d.i. respecto a eje que pasa por c.d.g. (masa) o centroide (área) y es paralelo al eje "s". Siempre es el mdi mínimo.

- ⊙ Demostración del teorema: a resolver por el alumno

Ejemplo resuelto

Una figura plana tiene un área de 5 cm^2 y una ordenada de su c.d.g. de 2 cm. Además, su m.d.i. polar respecto al origen de coordenadas vale 30 cm^4 y el axial respecto al eje YY 6 cm^4 . ¿Cuál es el m.d.i. del área respecto al eje X'X' que es paralelo al X_gX_g y a 1 cm sobre él?



$$I_o = I_{XX} + I_{YY} \quad \rightarrow \quad I_{YY} = 30 - 6 = 24 \text{ cm}^4$$

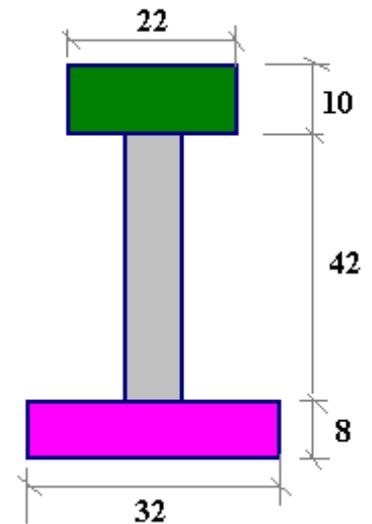
$$I_{X_gX_g} = I_{XX} - A \cdot d_{X-X_g}^2 \quad \rightarrow \quad I_{X_gX_g} = 24 - 5 \cdot 2^2 = 4 \text{ cm}^4$$

$$I_{X'X'} = I_{X_gX_g} + A \cdot d_{X_g-X'}^2 = 4 + 5 \cdot 1^2 = 9 \text{ cm}^4$$

3.9. MDI EN OBJETOS COMPUESTOS.

- Cuando un cuerpo pueda descomponerse en formas simples cuyos mdi se conocen por tablas o se calculan con facilidad, podemos emplearlos sabiendo que:

"El mdi de un cuerpo compuesto respecto a un eje cualquiera "s" es igual a la suma de los mdi de las distintas partes que lo componen respecto a dicho eje".



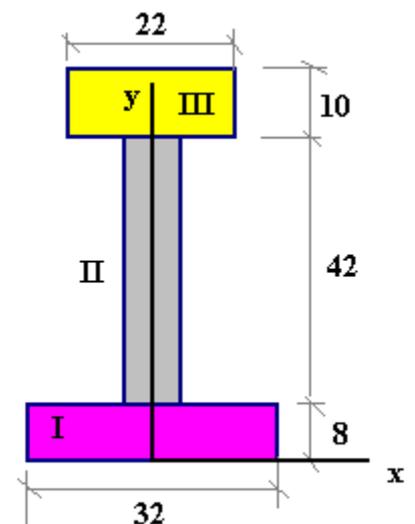
$$I_s = \int_m r_s^2 \cdot dm = \int_{m_1} r_s^2 \cdot dm_1 + \int_{m_2} r_s^2 \cdot dm_2 + \dots + \int_{m_n} r_s^2 \cdot dm_n = I_{s1} + I_{s2} + \dots + I_{sn}$$

- ✦ Los huecos o agujeros los consideraremos con mdi negativo al igual que hacíamos con los cdg o centroides.

Ejercicio Propuesto.

Vamos a calcular para la sección de la figura:

- mdi respecto a la base (eje OX)
- mdi respecto a eje centroidal paralelo a la base (eje G)
- mdi respecto al eje OY



3.10. PRODUCTO DE INERCIA.

Está relacionado con la distancia a dos planos ortogonales. Aparecen pues dos coordenadas en cada expresión,

$$I_{XY} = \int_m x \cdot y \cdot dm$$

$$I_{YZ} = \int_m y \cdot z \cdot dm$$

$$I_{ZX} = \int_m z \cdot x \cdot dm$$

- ⊙ Puede ser positivo, negativo o nulo, según el signo que tomen las coordenadas
- ⊙ Para áreas:

$$I_{XY} = \int_A x \cdot y \cdot dA$$

$$I_{YZ} = \int_A y \cdot z \cdot dA$$

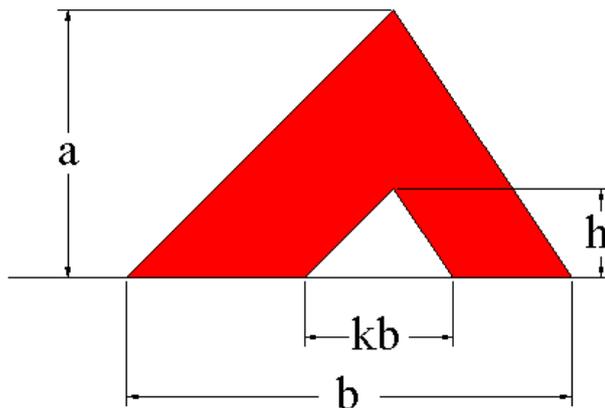
$$I_{ZX} = \int_A z \cdot x \cdot dA$$

3.11. EJERCICIOS RESUELTOS.

A Continuación se muestran una serie de ejercicios resueltos como ayuda para asentar el contenido teórico mostrado.

20. Calcular la altura h que debe tener el hueco interior para que el centroide de estructura quede lo más alto posible.

- a) Calcularlo para $k = 0.25$
 b) Para $k = 0.75$



\bar{y}_i	A_i	$A_i \cdot \bar{y}_i$
$\frac{a}{3}$	$\frac{ab}{2}$	$\frac{a^2b}{6}$
$\frac{h}{3}$	$-\frac{kbh}{2}$	$-\frac{kbh^2}{6}$

$$\sum A_i = \frac{ab}{2} - \frac{kbh}{2} = \frac{b \cdot (a - kh)}{2}$$

$$\sum A_i \bar{y}_i = \frac{a^2b}{6} - \frac{kbh^2}{6} = \frac{b \cdot (a^2 - kh^2)}{6}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum A_i \bar{y}_i}{\sum A_i} = \frac{3(a - kh)}{a^2 - kh^2}$$

El valor de la posición del centro de gravedad es función de h (la altura del hueco). Para calcular su máximo utilizamos la primera derivada.

$$\bar{y} = f(h); \quad f'(h) = 0 \rightarrow 3 \frac{-k(a^2 - kh^2) - (a - kh)(-2kh)}{(a^2 - kh^2)^2} = 0$$

Simplificando la ecuación anterior y despejando h obtenemos:

$$h = (-1 \pm \sqrt{1 - k}) \frac{a}{-k}$$

a) $k=0.25$

$$h = (-1 \pm \sqrt{1 - 0.25}) \frac{a}{-0.25}$$

Por tanto los dos valores posibles de h son $0.54a$ y $7.46a$ que es mayor siempre que a , por tanto para $k=0.25$ el valor de la altura del centro de gravedad es:

$$y = \frac{3(a - 0.25 \cdot 0.54a)}{a^2 - 0.25 \cdot (0.54a)^2} = \frac{2.80}{a}$$

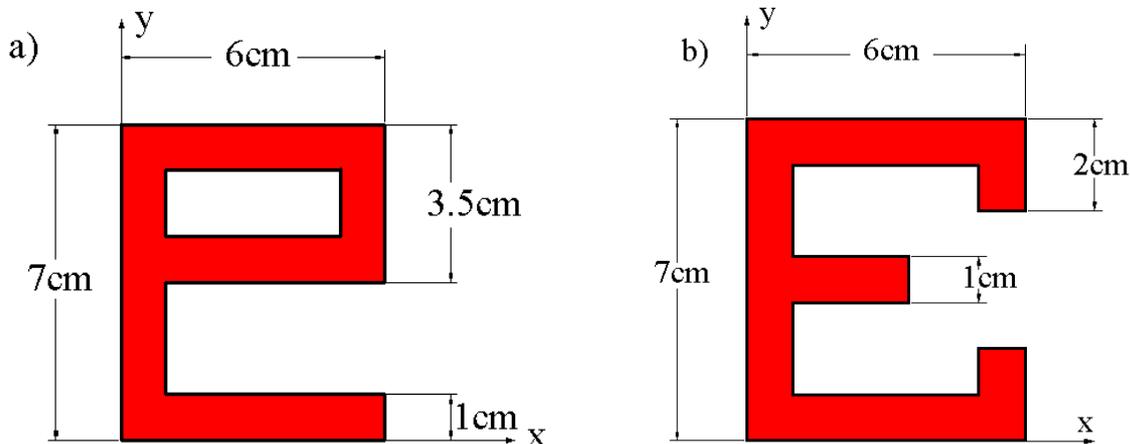
b) $k=0.75$

$$h = (-1 + \sqrt{1 - 0.75}) \frac{a}{-0.75}; \quad h = 0.66a$$

Se desprecia la raíz negativa por el motivo anteriormente visto. Así que el resultado es:

$$y = \frac{3(a - 0.75 \cdot 0.66a)}{a^2 - 0.75 \cdot (0.66a)^2} = \frac{2.25}{a}$$

21. Calcular el centroide de las siguientes figuras planas y homogéneas.



a) Para calcularlo vamos a restarle al rectángulo exterior los dos rectángulos interiores.

$$A = \sum A_i = 6 \cdot 7 - 4 \cdot 1,5 - 5 \cdot 2,5 = 23,5 \quad \text{cm}^2$$

$$x = \frac{\sum x_i \cdot A_i}{\sum A_i} = \frac{3 \cdot 42 - 3,5 \cdot 12,5 - 3 \cdot 6}{23,5} = 2,73 \quad \text{cm}$$

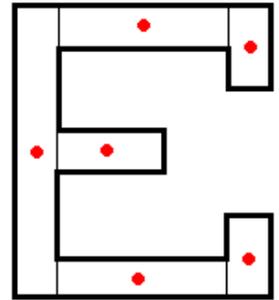
$$y = \frac{\sum y_i \cdot A_i}{\sum A_i} = \frac{3,5 \cdot 42 - 2,25 \cdot 12,5 - 5,25 \cdot 6}{23,5} = 3,72 \quad \text{cm}$$

b) Este apartado lo resolveremos dividiendo la pieza en bloques rectángulos.

$$A = \sum A_i = 7 \cdot 1 - 4 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 2,5 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 21,5 \text{ cm}^2$$

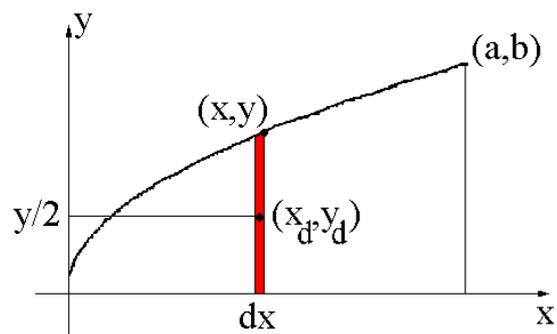
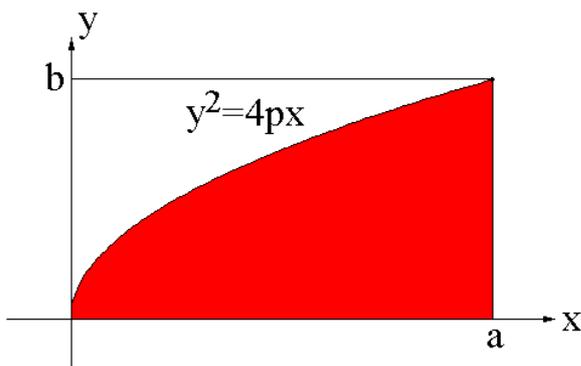
$$x = \frac{\sum x_i \cdot A_i}{\sum A_i} = \frac{0,5 \cdot 7 + 3 \cdot 4 + 5,5 \cdot 2 + 2,25 \cdot 2,5 + 3 \cdot 4 + 5,5 \cdot 2}{21,5} = 2,56 \text{ cm}$$

$$y = \frac{\sum y_i \cdot A_i}{\sum A_i} = \frac{3,5 \cdot 7 + 0,5 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 3,5 \cdot 2,5 + 6,5 \cdot 4 + 6 \cdot 2}{23,5} = 3,5 \text{ cm}$$



22. Determinar el c.d.g. para la región limitada por la parábola genérica $y^2=4px$, $y=0$ y $x=a$, la altura debe valer b .

Solucion: $\bar{x} = \frac{3}{5}b$ e $\bar{y} = \frac{3b^2}{8a} \sqrt{\frac{a}{b}}$



Calculemos cuánto vale la constante p :

$$b^2 = 4pa \rightarrow p = \frac{b^2}{4a}$$

Por tanto tenemos que:

$$y = \sqrt{\frac{b^2}{a}x} \text{ o } x = \frac{a}{b^2}y^2$$

Calculemos los momentos de inercia:

$$Q_x = \int_0^b y_d \cdot dA = \int_0^{\frac{by}{2}} \frac{by}{2} \cdot y \cdot dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{by}{2}} \frac{bb^2}{a} x \cdot dx = \frac{b^2}{2a} \int_0^{\frac{by}{2}} x dx = \frac{b^2}{4a} b^2 = \frac{b^4}{4a}$$

$$Q_y = \int_0^b x_d \cdot dA = \int_0^b x \cdot y \cdot dx = \int_0^b x \cdot \sqrt{\frac{b^2}{a}x} dx = \frac{b}{\sqrt{a}} \int_0^b x^{3/2} dx = \frac{2b}{5\sqrt{a}} b^{5/2} = \frac{2}{5} b^3 \sqrt{\frac{b}{a}}$$

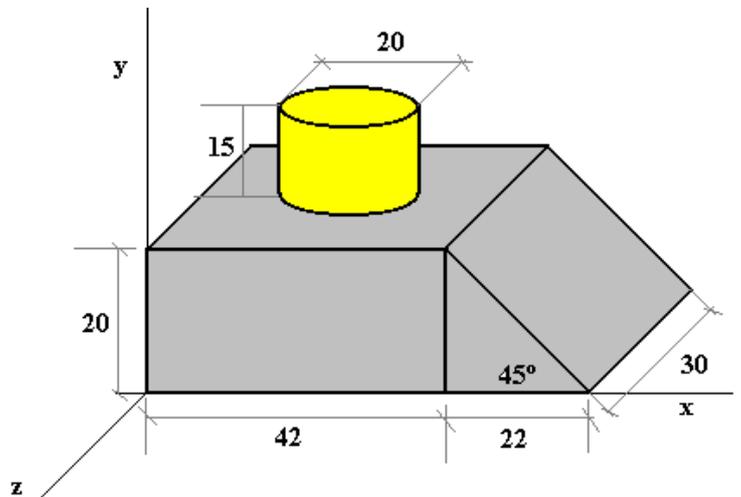
A partir de los momentos se determinan las coordenadas del c.d.g.

$$Q_x = \bar{y} \cdot A = \bar{y} \cdot \int dA = \bar{y} \cdot \frac{2}{3} b^2 \sqrt{\frac{b}{a}} \rightarrow \bar{y} = \frac{\frac{b^4}{4a}}{\frac{2}{3} b^2 \sqrt{\frac{b}{a}}} = \frac{3b^2}{8a} \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$Q_y = \bar{x} \cdot A = \bar{x} \cdot \int dA = \bar{x} \cdot \int \sqrt{\frac{b^2}{a}} x dx = \bar{x} \frac{2b}{3\sqrt{a}} b^{3/2} \rightarrow \bar{x} = \frac{\frac{2}{5} b^3 \sqrt{\frac{b}{a}}}{\frac{2}{3} b^2 \sqrt{\frac{b}{a}}} = \frac{3}{5} b$$

23. Determinar el centroide del cuerpo sombreado representado en la figura. Considerar que el cilindro perfora al cuerpo.

Primero obtendremos la tabla para después aplicar las expresiones conocidas para el centroide de un volumen compuesto.



Parte	V _i	x _i	V _i ·x _i	y _i	V _i ·y _i	z _i	V _i ·z _i
Cubo	25200	21	529200	10	252000	-15	-375000
Prisma	6600	49,33	325578	6,66	43956	-15	-99000
Cilindro	-6283,18	21	-131946,78	10	-62831,80	-15	94247,70
Total	25516,82		722831,22		233124,20		-379752,30

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot V_i}{V} = \frac{722831,22}{25516,82} = 28,33$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot V_i}{V} = \frac{233124,20}{25516,82} = 9,13$$

$$\bar{Z} = \frac{\sum_{i=1}^n z_i \cdot V_i}{V} = \frac{-379752,3}{25516,82} = -14,88$$

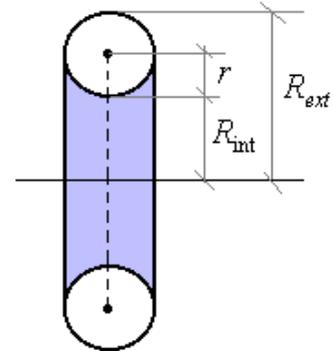
24. Empleando Pappus-Guldin obtenga la superficie y volumen de medio toroide en función de sus radios exterior e interior.

Radio interior = R_{int}

Radio exterior = R_{ext}

Radio sección circular = r

$$r = \frac{R_{\text{ext}} - R_{\text{int}}}{2}$$



La superficie la obtenemos aplicando el 1^{er} Teorema,

$$S = 2\pi \cdot \bar{y} \cdot L = \dots = \frac{2\pi^2 (R_{\text{ext}}^2 - R_{\text{int}}^2)}{2}$$

$$\bar{y} = r + R_{\text{int}} = \frac{R_{\text{ext}} + R_{\text{int}}}{2}$$

$$L = 2\pi r = \pi(R_{\text{ext}} - R_{\text{int}})$$

Para obtener el volumen aplicaremos el 2^o Teorema,

$$V = 2\pi \cdot \bar{y} \cdot S = \dots = \frac{2\pi^2 (R_{\text{ext}} - R_{\text{int}})^2 (R_{\text{ext}} + R_{\text{int}})}{8}$$

$$\bar{y} = r + R_{\text{int}} = \frac{R_{\text{ext}} + R_{\text{int}}}{2}$$

$$S = \pi r^2 = \frac{\pi}{4} (R_{\text{ext}} - R_{\text{int}})^2$$

25. Determinar la masa de la peonza de plástico, si la densidad es de 8520 kg/m³.

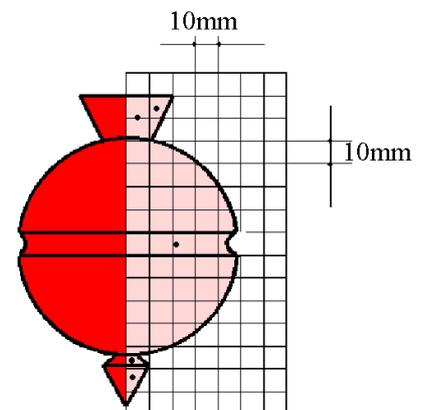
Utilizaremos el segundo teorema de Pappus para calcular el volumen como sigue,

$$V = 2\pi \cdot \bar{x} \cdot A$$

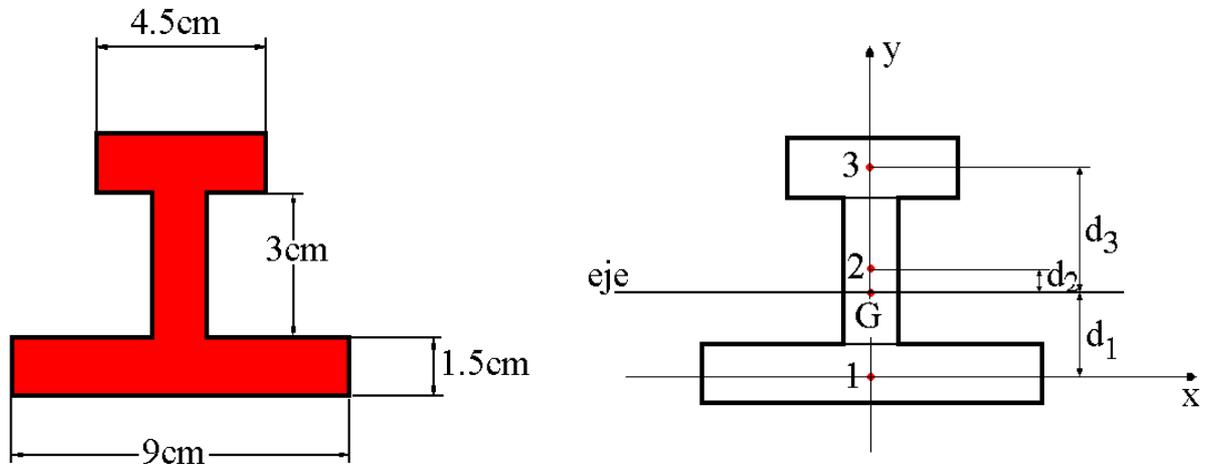
$$x = \frac{\sum x_i \cdot A_i}{\sum A_i}$$

$$V = 2\pi \cdot \sum x_i \cdot A_i = 2\pi \cdot (5 \cdot 200 + 13,3 \cdot 100 + \frac{4 \cdot 50}{3\pi} \cdot 0,5\pi \cdot 50^2 + 2,5 \cdot 25 +$$

$$m = \delta \cdot V = 8520 \cdot 540186,33 \cdot 10^{-9} = 4,6 \text{ Kg}$$



26. Hallar el momento de inercia axial de la figura respecto al eje que pasa por el centro de gravedad y es horizontal.



Primero debemos calcular el centroide G que según hemos dispuesto los ejes estará localizado sobre OY,

$$A = \Sigma A_i = 9 \cdot 1,5 + 3 \cdot 1,5 + 4,5 \cdot 1,5 = 24,75 \text{ cm}^2$$

$$Y_G = \frac{0,75 \cdot 13,5 + 3 \cdot 4,5 + 5,25 \cdot 6,75}{24,75} = 2,38 \text{ cm}$$

Calculamos el momento de inercia de cada bloque considerando que su eje pasa por su centroide.

$$I = \frac{1}{12} b h^3$$

El momento de la figura la calculamos como suma de momentos de cada bloque respecto al eje en cuestión aplicando el teorema de Steiner.

$$I_1 = \frac{1}{12} 9 \cdot 1,5^3 = 2,53 \text{ cm}^4$$

$$I_2 = \frac{1}{12} 1,5 \cdot 3^3 = 3,38 \text{ cm}^4$$

$$I_3 = \frac{1}{12} 4,5 \cdot 1,5^3 = 1,27 \text{ cm}^4$$

$$I_G = I_{1G} + I_{2G} + I_{3G} = I_1 + A_1 \cdot d_1^2 + I_2 + A_2 \cdot d_2^2 + I_3 + A_3 \cdot d_3^2 =$$

$$2,53 \cdot 13,05 \cdot (2,38 - 0,75) + 3,38 \cdot 4,5 \cdot (3 - 2,38) + 1,27 \cdot 6,75 \cdot (5,25 - 2,38) = 52,14 \text{ cm}^4$$