Algunas rutinas del software matemático creado para la enseñanza del Cálculo Vectorial

C. Muriel
Departamento de Matemáticas
J. Vidal
Departamento de Construcciones Navales

Universidad de Cádiz
11510 Puerto Real. Cádiz. Spain

Resumen: Se describen algunas de las rutinas elaboradas con el programa Mathematica para la enseñanza de asignaturas con contenidos matemáticos relacionados con el cálculo vectorial. La creación de ejercicios interactivos facilitan la comprensión de contenidos matemáticos y el aprendizaje de técnicas que requieren estas disciplinas.

Variedades Diferenciables

Objetivos

- Saber dibujar variedades diferenciables de dimensiones 2 y 3 en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$ dadas en forma implícita, explícita o paramétrica
- Utilizar los dibujos para decidir de forma intuitiva si un conjunto es variedad diferenciable o no
- Entender el concepto de curva de nivel y saber dedicir cuándo es variedad diferenciable
- Saber calcular y dibujar espacios afines tangentes a una variedad en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$ utlizando representaciones implícitas, explícitas o paramétricas
- Saber calcular y dibujar vectores normales a una variedad en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$ utlizando representaciones implícitas, explícitas o paramétricas
- Utilizar animaciones para visualizar vectores tangentes y normales

1. Variedades diferenciables

1.1 Representaciones explícitas

Localmente, las variedades diferenciables son gráficas de funciones diferenciables, expresadas en alguna base ordenada de $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.1.1: Representaciones explicitas locales de una variedad de dimensión k en $\mathbb{R}^n$
Un subconjunto S $\subset \mathbb{R}^n$ es una variedad diferenciable de dimensión k en $\mathbb{R}^k$ y de clase C^r si para cada p$\in$ C existen una base B= $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, un entorno U $\subset \mathbb{R}^n$ de $p = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \ldots + x_n u_n$, un entorno V$\subset \mathbb{R}^k$ de $x_0 = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \ldots + x_k u_k$ y una aplicación f:V$\longrightarrow$ $\mathbb{R}^{n-k}$ de clase C^r con tal que S $\bigcap$ U coincide con la gráfica de f en V y en la base B.

Definición 1.1.2: Espacio afín tangente en términos de representaciones explícitas.
Dado un punto p $\in$ S, se elige una representación explícita local de C alrededor del punto p: f:V$\longrightarrow$ $\mathbb{R}^{n-k}$. El espacio vectorial tangente a S en el punto $p = (x_0, f(x_0))$ viene dado por:

$$T(p; S) = \{(h^1, h^2) \in \mathbb{R}^n : h^2 = \mathrm{Df}\,(x_0)\, h^1\}$$

El espacio afín tangente a S en p es el conjunto de puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^n$ tales que $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

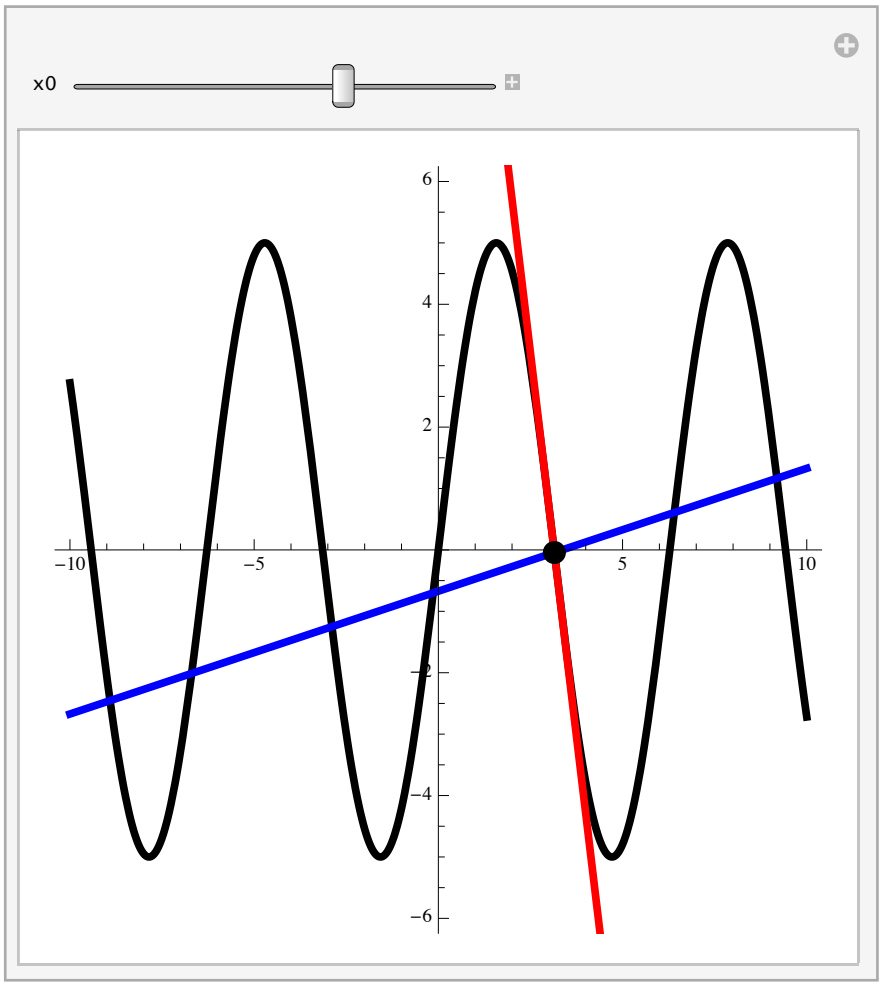
Si la base es la canónica, las órdenes de Mathematica más adecuadas a este tipo de representación son las instrucciones Plot y Plot3D para representar gráficas de funciones en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$. El uso de bases diferentes requiere utilizar otras instrucciones como ParametricPlot y ParametricPlot3D.

Rutinas 1.1 : Representaciones gráficas de variedades en forma explícita. Rectas y planos tangentes. Vectores normales.

Ejercicio

Encuentra la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función $f(x) = \text{sen}(x)$ en cada punto.

```
Module[{f, puntos, grafica, tangente, normal},
 Manipulate[f[x_] := 5 Sin[x];
  puntos = Graphics[
    {PointSize[0.03], Black, Point[{x0, f[x0]}]}];
  tangente = Plot[Tooltip[f[x0] + f'[x0] (x - x0)],
    {x, -10, 10}, PlotStyle → {Thickness[.01], Red}];
  normal = Plot[Tooltip[f[x0] - 1 / f'[x0] (x - x0)], {x,
     -10, 10}, PlotStyle → {Thickness[.01], Blue}];
  grafica = Plot[Tooltip[f[x]], {x, -10, 10},
    PlotStyle → {Thickness[.01], Black}];
  Show[grafica, normal, tangente, puntos, Axes → True,
   AspectRatio → 1, PlotRange → {{-10, 10}, {-6, 6}}],
  {{x0, 0}, -10, 10}]]
```

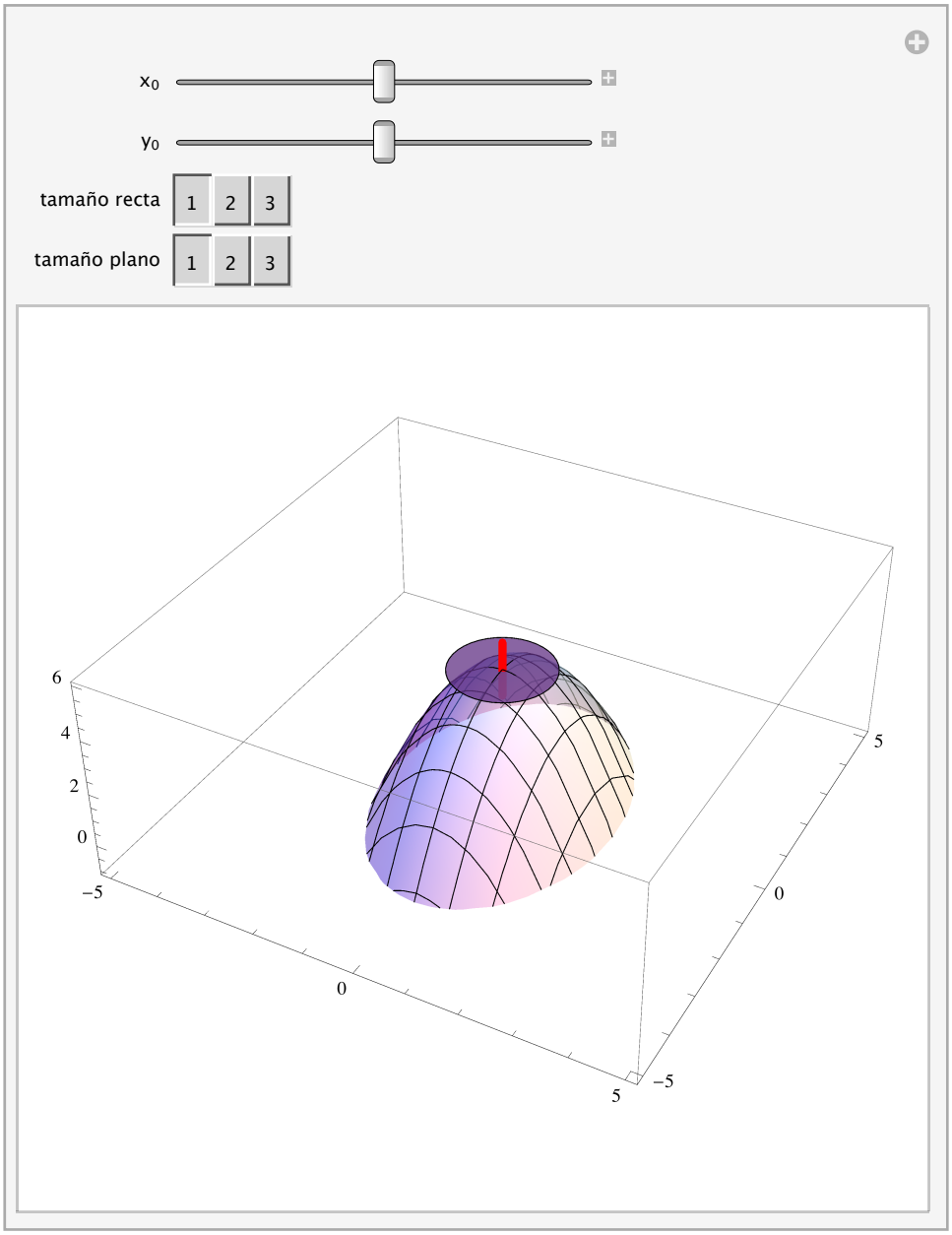


Ejercicio

Encuentra la ecuación del plano tangente y de la recta normal a la gráfica de la función $f(x, y) = 4 - 1/2\,(2\,x^2 + y^2)$ en el punto (1,1,f(1,1))

In[95]:=
```
Manipulate[
 Module[{f, dx, dy, grad},
  f[x_, y_] := 4 - 1 / 2 (2 x^2 + y^2) ;
  xmin = -5; xmax = 5;
  ymin = -5; ymax = 5; zmin = 0; zmax = 5;
  {xgrid1, ygrid1} = {1 / 2, 1 / 2};
  dx[x_, y_] = D[f[x, y], x];
  dy[x_, y_] = D[f[x, y], y];
  grad[x_, y_] = {dx[x, y], dy[x, y], -1};
  Show[Plot3D[f[x, y], {x, -5, 5},
    {y, -5, 5}, PlotStyle → Opacity[.5]],
   Graphics3D[{{Red, Point[{a, b, f[a, b]}]},
     {ColorData[1][2], Opacity[.5],
      Cylinder[{{a, b, f[a, b]},
        {a, b, f[a, b]} + .001 grad[a, b]}, m]},
     {Thickness[0.01], Red, Line[{{a, b, f[a, b]} +
         k grad[a, b] / Norm[grad[a, b]], {a, b, f[a,
           b]} - k grad[a, b] / Norm[grad[a, b]]}]}}],
   PlotRange → {zmin - 1, zmax + 1},
   ImageSize → {400, 400}]],
 {{a, 0, "x0"}, -5, 5},
 {{b, 0, "y0"}, -5, 5},
 {{k, 1, "tamaño recta"}, {1, 2, 3}},
 {{m, 1, "tamaño plano"}, {1, 2, 3}}
]
```

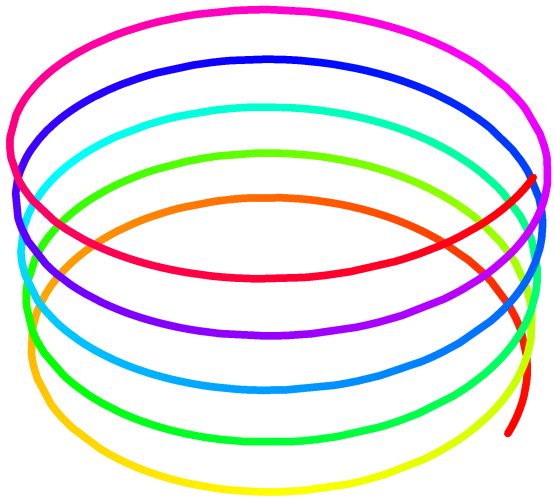
Out[95]=



Ejercicio

¿En qué base es la siguiente espiral la gráfica de una función diferenciable? Calcula la recta tangente y dos vectores normales a la espiral en un punto. Comprueba gráficamente tus resultados.

```
espiral = ParametricPlot3D[
  {3 Cos[t], 3 Sin[t], t}, {t, 0, 10 π}, Ticks → None,
  ColorFunction → (Hue[#4] &), Boxed → False,
  Axes → False, BoxRatios → {1, 1, 0.6},
  PlotStyle -> Thickness[.01]]
```



1.2 Representaciones implícitas

Muchos conjuntos de la geometría clásica aparecen al describir un recinto como el lugar geométrico de los puntos del plano o del espacio que satisfacen unas condiciones descritas por una o varias ecuaciones. Se formaliza matemáticamente el concepto de representación implícita, especialmente adecuada para describir conjuntos que se obtienen como cortes o intersecciones de otros.

Definición 1.2.1: Representaciones implicitas locales de una variedad de dimensión k en $\mathbb{R}^n$

Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es una variedad diferenciable de dimensión k en $\mathbb{R}^n$ y de clase C^p si para cada p S existen un entorno $U \subset \mathbb{R}^n$ de p, una aplicación $\Phi: U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ de clase C^p con las siguientes propiedades:

a) Φ de clase C^p en U

b) el rango de la matriz $[D\Phi(p)]$ es n-k

c) $S \cap U = \{x \in U: \Phi(x) = 0\}$

Definición 1.2.2: Espacio afín tangente y vectores normales en términos de representaciones implícitas

Dado un punto $p \in S$, se elige una representación implícita local de S alrededor del punto p: $\Phi: U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$. El espacio vectorial tangente es el núcleo de la diferencial de la aplicación Φ en el punto p. En este caso viene dado por: $T(p; S) = \{(h \in \mathbb{R}^n : D\Phi(p)(h) = 0\}$

Es importante observar que se deduce de forma inmediata los vectores columna de la matriz $[D\Phi(p)]$ son vectores normales a S el punto p. Las ecuaciones del espacio afín tangente a S en p son $D\Phi(p)(x-p)=0$.

Las órdenes de Mathematica necesarias para representar curvas y superficies dadas en forma implícita son ContourPlot y ContourPlot3D

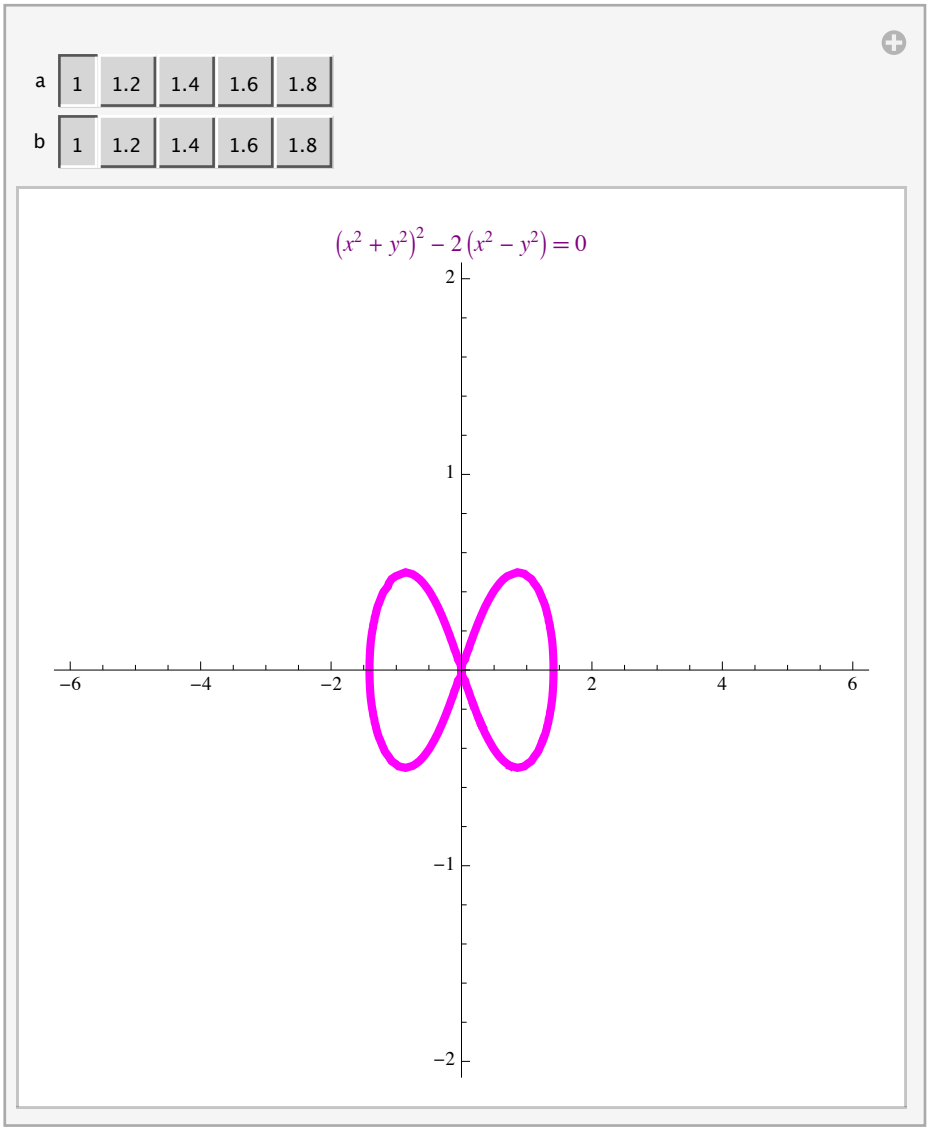
Rutinas 1.2 : Representaciones gráficas de variedades en forma implícita. Rectas y planos tangentes. Vectores normales.

Ejemplo

La siguiente rutina visualiza las curvas de ecuación $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) + a^4 - b^4 = 0$ conocidas con el nombre de Óvalos de Cassini. Observa que la forma del óvalo depende de la proporción b/a. ¿Descubres la relación entre los parámetros a y b para que sean variedades diferenciables?¿ Qué obtienes si a=b?

In[97]:=
```
Manipulate[ContourPlot[
  (x^2 + y^2)^2 - 2 * a^2 (x^2 - y^2) + a^4 - b^4 == 0,
  {x, -6, 6}, {y, -2, 2}, Axes → True,
  Frame → False, PlotLabel → TraditionalForm[Style[
     (x^2 + y^2)^2 - 2 * a^2 (x^2 - y^2) - a^4 + b^4 == 0,
     Purple]], ImageSize → {400},
  ContourStyle → {Magenta, Thickness → 0.01}],
 {a, {1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8}},
 {b, {1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8}}]
```

Out[97]=



La orden ContourPlot[f,{x,xmin,xmax},{y,ymin,ymax}] dibuja las curvas de nivel de la función f.

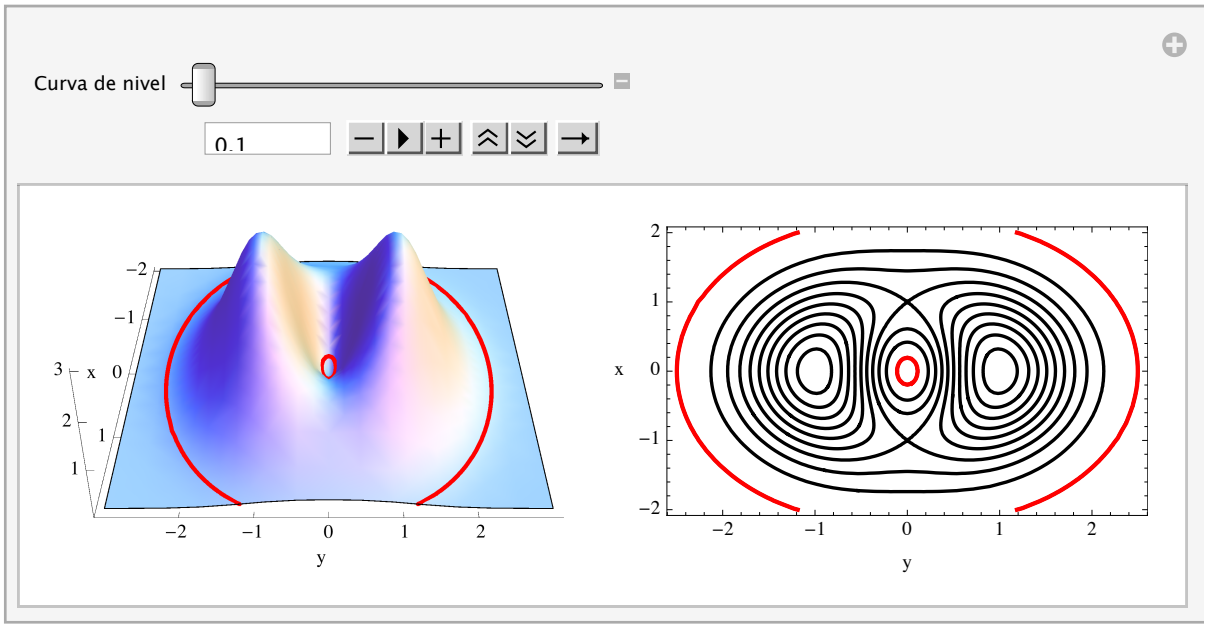
Ejemplo

Evalúa la siguiente rutina para visualizar las curvas de nivel de la función $f(x, y) = \left(x^2 + 3\, y^2\right) \mathrm{Exp}\left[1 - x^2 - y^2\right]$. ¿Para qué valores de c son variedades diferenciables? ¿Cuáles son sus dimensiones?

In[100]:=

```
Module[
 {f, superficie, curvasnivel, cn, c, data, data3D},
 f[x_, y_] := (x^2 + 3 y^2) Exp[1 - x^2 - y^2];
 superficie = Plot3D[f[x, y], {x, -2, 2}, {y, -3, 3},
   Boxed → False, ViewPoint → {2.2, 0, 1.5},
   Ticks → {Range[-2, 1], Range[-2, 2], {1, 2, 3}},
   AxesEdge → {{-1, -1}, {1, -1}, {1, -1}},
   Mesh → None, AxesLabel → {"x", "y", None},
   ImageSize → 250];
 curvasnivel = ContourPlot[f[x, y], {y, -2.5, 2.5},
   {x, -2, 2}, Contours → Range[0.1, 2.8, 0.3],
   ContourShading → False,
   FrameLabel → {"y", "x"}, RotateLabel → False,
   ContourStyle → Directive[Black, Thickness[0.007]],
   AspectRatio → 0.6, ImageSize → 250];
 cn[v_] := ContourPlot[f[x, y] == v,
   {y, -2.5, 2.5}, {x, -2, 2}];
 Do[data[c] = Cases[Normal[cn[c]], Line[_],
    Infinity], {c, 0.1, 2.8, 0.3}];
 Do[data3D[c] = data[c] /. {y_Real, x_} →
     {x, y, f[x, y]}, {c, 0.1, 2.8, 0.3}];
 Graphics3D[data3D /@ Range[0.1, 2.8, 0.3],
  ViewPoint → {2.2, 0, 1.5}, Boxed → False];
 Manipulate[Grid[{{
     Show[superficie,
      Graphics3D[{Thick, Red, data3D[c]}],
      PlotRegion → {{0, 1}, {0, 1.25}}],
     Show[curvasnivel,
      Graphics[{Thick, Red, data[c]}]]}}],
  {{c, 0.1, "Curva de nivel"}, 0.1, 2.8,
   0.3, Appearance → "Open"},
  TrackedSymbols → {c}]]
```

Out[100]=



Ejemplo

Las siguientes instrucciones dibujan de forma interactiva campos de vectores tangentes y normales a las variedades definidas implícitamente por las ecuaciones que se indican a continuación:

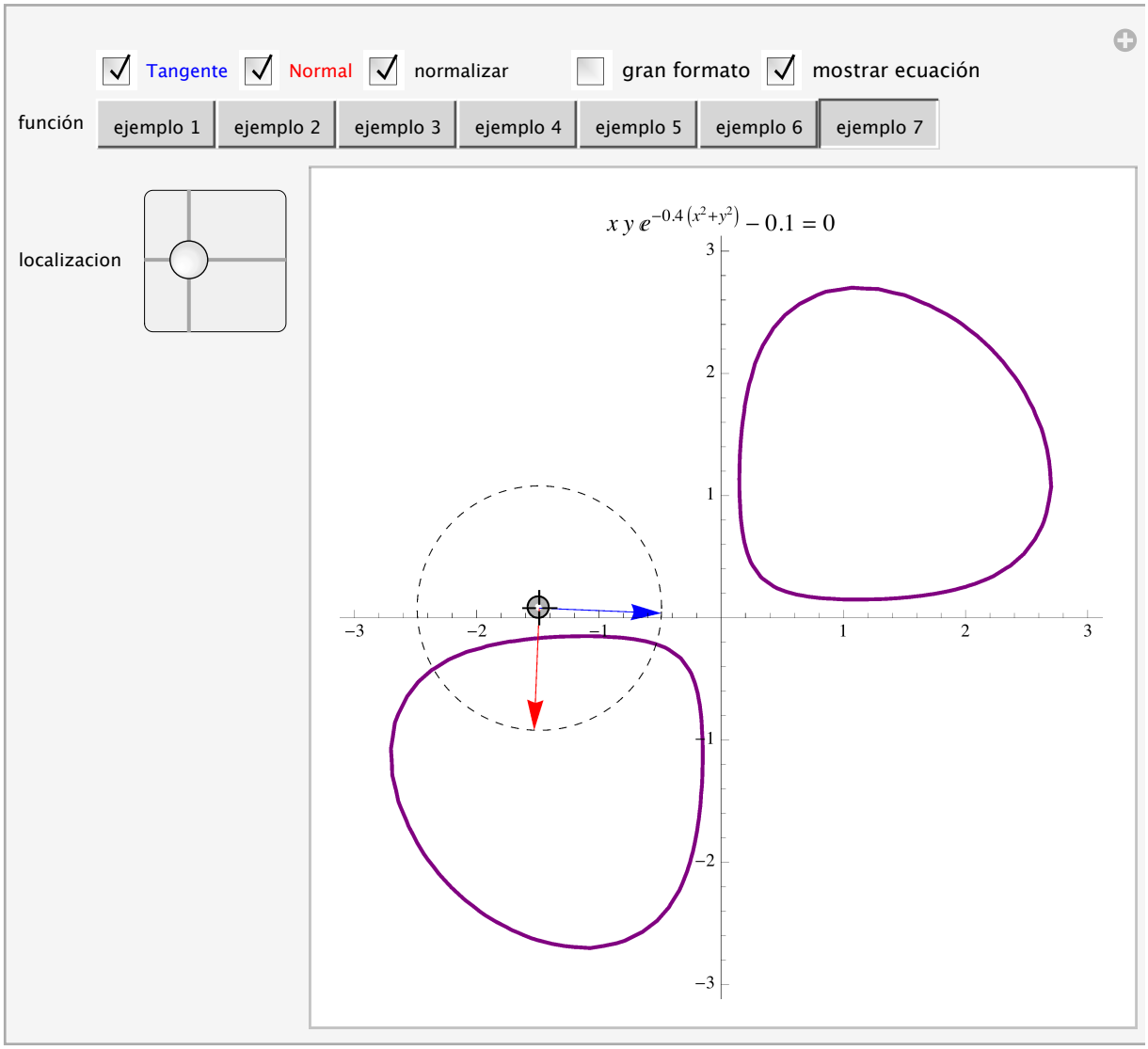
Ejemplo 1: $\Phi(x,y) = 5 - x^2/2 - y^2 - 1$
Ejemplo 2: $\Phi(x,y) = x^2/2 + y^2 - 1$
Ejemplo 3: $\Phi(x,y) = 1 - 2x + y$
Ejemplo 4: $\Phi(x,y) = x^2/2 - y^2 - 1$
Ejemplo 5: $\Phi(x,y) = -x^2/2 + y^2 - 1$
Ejemplo 6: $\Phi(x, y) = y - x^3$
Ejemplo 7: $\Phi(x,y) = x\,y\,e^{-0.4\,(x^2+y^2)} - 0.1$

Observa que los campos de vectores tangentes o normales pueden estar definidos en puntos que no están en la variedad.

```
Manipulate[
 DynamicModule[{grad, unitgrad, tang, unittang,
   function, buttonText, functionButtons},
  function[x_, y_] := {5 - x^2/2 - y^2 - 1,
    x^2/2 + y^2 - 1, 1 - 2 x + y, x^2/2 - y^2 - 1,
    -x^2/2 + y^2 - 1, y - x^3, x y e^(-0.4 (x^2+y^2)) - 0.1};
  buttonText = {" ejemplo 1", " ejemplo 2",
    " ejemplo 3", " ejemplo 4", " ejemplo 5",
    " ejemplo 6", " ejemplo 7"};
  functionButtons = Map[#[[1]] → #[[2]] &, Transpose[
     {Range[Length[buttonText]], buttonText}]];
  grad = D[function[x, y][[fff]], {{x, y}}];
  unitgrad = grad / Sqrt[grad.grad];
  tang = {-D[function[x, y][[fff]], y],
    D[function[x, y][[fff]], x]};
  unittang = tang / Sqrt[tang.tang];
  Deploy[
```

```
Show[{
  ContourPlot[function[x, y][[fff]] == 0, {x, -3, 3},
   {y, -3, 3}, Axes → True, Frame → False,
   ContourStyle → {Purple, Thickness[0.005]}],
  Graphics[{
    Red,
    If[MemberQ[options, gradient],
     If[MemberQ[options, normalize] &&
       Dynamic[grad /. {x → pt[[1]],
           y → pt[[2]]}] =!= {0, 0},
      Dynamic[Arrow[{pt, pt + (unitgrad /.
            {x → pt[[1]], y → pt[[2]]})}]],
      Dynamic[Tooltip[
        Arrow[{pt, pt + (grad /. {x → pt[[1]],
              y → pt[[2]]})}], Style[grad /.
          {x → pt[[1]], y → pt[[2]]}, Red]]],
     ],
     Red],
    If[MemberQ[options, normalize], {Black,
      Dashed, Dynamic[Circle[pt, 1]]}, Blue],
    Blue,
    If[MemberQ[options, neggradient],
     If[MemberQ[options, normalize] &&
       Dynamic[tang /. {x → pt[[1]],
           y → pt[[2]]}] =!= {0, 0},
      Dynamic[Arrow[{pt, pt + (unittang /. {x →
              pt[[1]], y → pt[[2]]})}]],
      Dynamic[Tooltip[Arrow[{pt, pt +
           (tang /. {x → pt[[1]], y → pt[[2]]})}],
        Style[tang /. {x → pt[[1]], y → pt[[2]]},
         Blue]]]
     ],
     Blue],
    Tooltip[
     Locator[Dynamic[pt]], Dynamic[pt]]}]},
 ImageSize → If[MemberQ[options, format],
   500, 380],
 PlotLabel → If[MemberQ[options, label],
   ToString[function[x, y][[fff]],
```

```
        TraditionalForm] <> " = 0",
      Column[{" "}, ItemSize → {Automatic, 2.75}]]]]
],
{{options, {gradient}, ""},
 {neggradient → Style[" Tangente", Blue],
  gradient → Style[" Normal", Red],
  normalize → " normalizar          ",
  format → Style[" gran formato", 10],
  label → Style[" mostrar ecuación", 10]}},
{{fff, 1, "función"},
 functionButtons, ControlType → Setter},
{{pt, {1, 0}, "localizacion"},
 {-3, -3}, {3, 3}, ImageSize →
  If[MemberQ[options, format], Large, Medium]},
ControlType → {CheckboxBar, Setter, Slider2D},
ControlPlacement → {Top, Top, Left},
Initialization :→ {Clear[x, y];
  buttonText = {" ejemplo 1",
    " ejemplo 2", " ejemplo 3", " ejemplo 4",
    " ejemplo 5", " ejemplo 6", " ejemplo 7"};
  functionButtons = Map[#[[1]] → #[[2]] &, Transpose[
     {Range[Length[buttonText]], buttonText}]];},
AutorunSequencing → {1, 2, 3}]
```


Tangente
Normal
normalizar
gran formato
mostrar ecuación
función
ejemplo 1
ejemplo 2
ejemplo 3
ejemplo 4
ejemplo 5
ejemplo 6
ejemplo 7
localizacion
$x\,y\,e^{-0.4\,(x^2+y^2)} - 0.1 = 0$

Rutinas 1.3 : Representaciones implicitas y recintos geométricos clásicos

Paraboloides

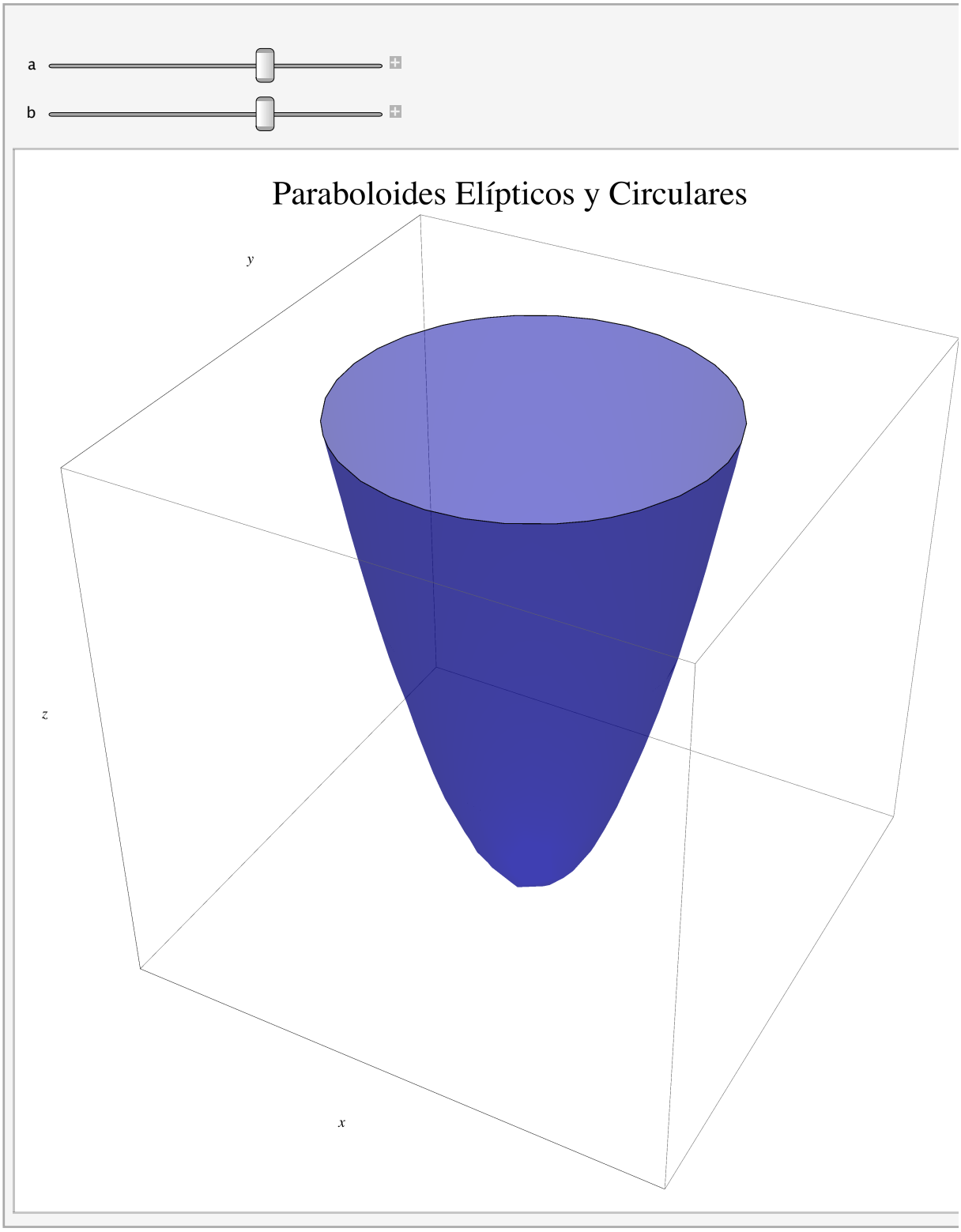
1: Paraboloides elípticos: $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

2: Paraboloides circulares: $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}$

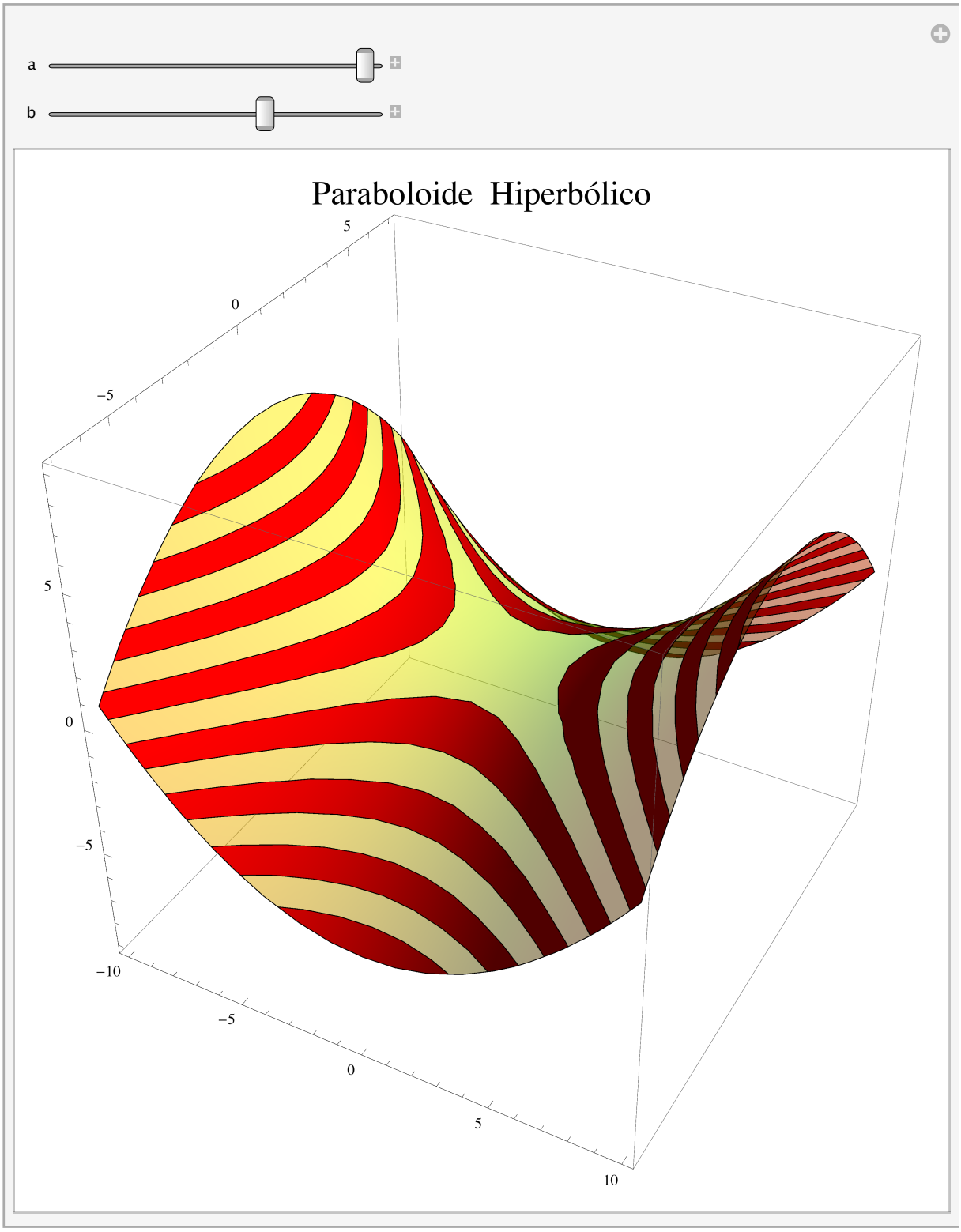
3: Paraboloides hiperbólicos: $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$

In[37]:=
```
puno = Manipulate[ContourPlot3D[
    (x/a)^2 + (y/b)^2 - z == 0, {x, -10, 10}, {y, -10, 10},
    {z, 0, 5}, Mesh → None, ImageSize → {600},
    AxesLabel → Automatic, Ticks → None, ContourStyle →
     Directive[Opacity[0.5], Blue], PlotLabel → Text[
      Style["Paraboloides Elípticos y Circulares",
       FontSize → 20]]],
   {{a, 3, "a"}, 1, 4}, {{b, 3, "b"}, 1, 4}]
pdos = Manipulate[ContourPlot3D[
    (x/a)^2 - (y/b)^2 - z == 0, {x, -10, 10}, {y, -7, 7},
    {z, -9, 9}, ImageSize → {600}, PlotLabel →
     Text[Style["Paraboloide  Hiperbólico",
       FontSize → 20]], MeshFunctions → {#3 &},
    ContourStyle → Directive[Opacity[0.5], Yellow],
    MeshShading → {Red, Automatic}],
   {{a, 4, "a"}, 1, 4}, {{b, 3, "b"}, 1, 4}]
```

Out[37]=



Out[38]=



Hiperboloides

1:Hiperboloides de una hoja: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

2: Hiperboloides de dos hojas: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$

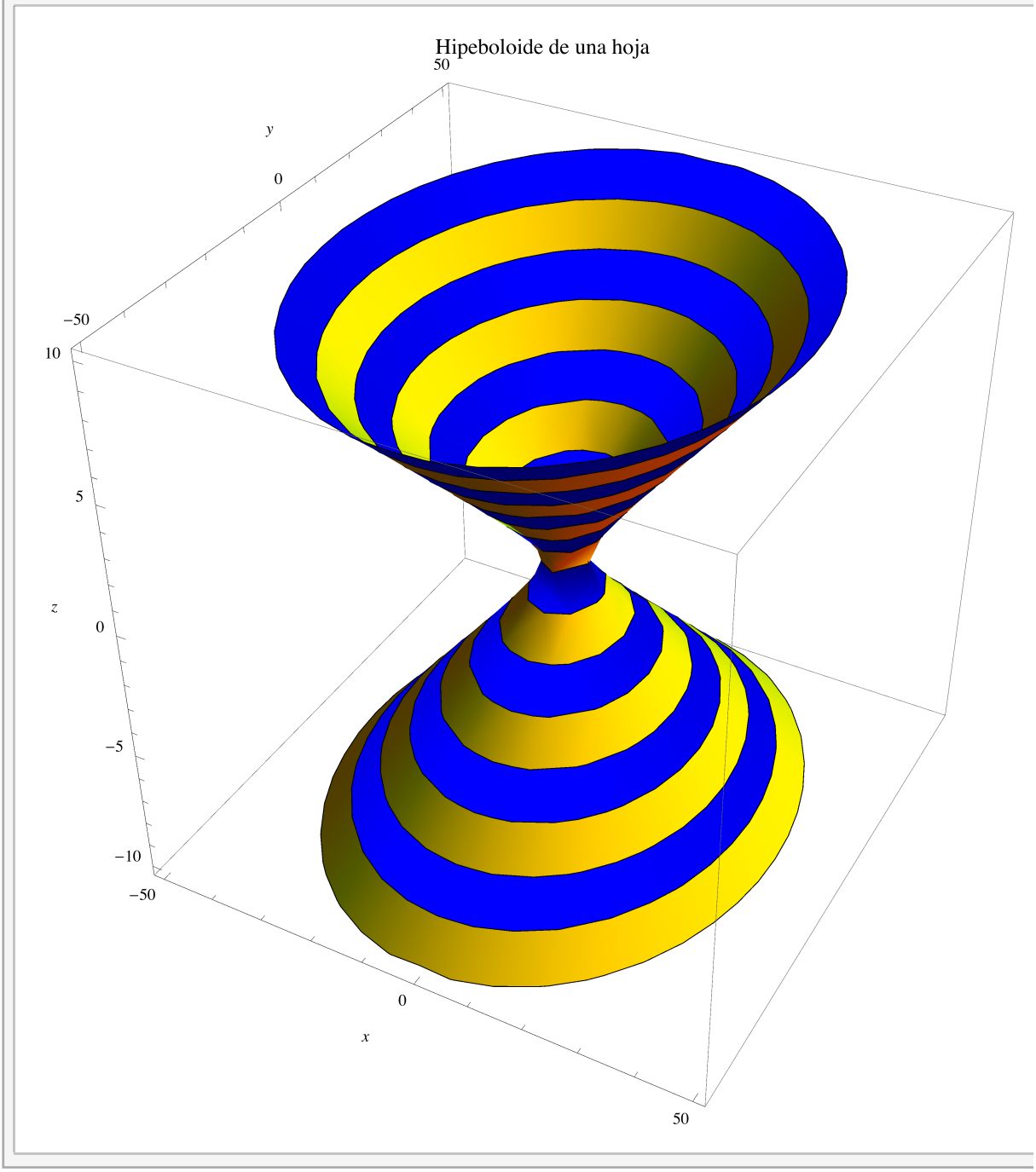
In[40]:=
```
uno = Manipulate[
  ContourPlot3D[(x/a)^2 + (y/b)^2 - (z/c)^2 - 1 == 0, {x, -50, 50},
   {y, -50, 50}, {z, -10, 10}, MeshFunctions → {#3 &},
   MeshShading → {Yellow, Blue}, AxesLabel →
    Automatic, PlotLabel → "Hipeboloide de una hoja",
   ImageSize → {600}], {{a, 4, "a"}, {1, 2, 3, 4, 5}},
  {{b, 5, "b"}, Range[5]}, {{c, 1, "c"}, Range[5]}]
dos = Manipulate[ContourPlot3D[
   (x/a)^2 + (y/b)^2 - (z/c)^2 + 1 == 0, {x, -100, 100},
   {y, -100, 100}, {z, -20, 20},
   ColorFunction → "BlueGreenYellow", Mesh → None,
   ImageSize → 520, AxesLabel → Automatic,
   PlotLabel → "Hipeboloide de dos hojas"],
  {{a, 5, "a"}, {1, 2, 3, 4, 5}},
  {{b, 5, "b"}, Range[5]}, {{c, 1, "c"}, Range[5]}]
```

a 1 2 3 4 5

b 1 2 3 4 5

c 1 2 3 4 5

Out[40]=

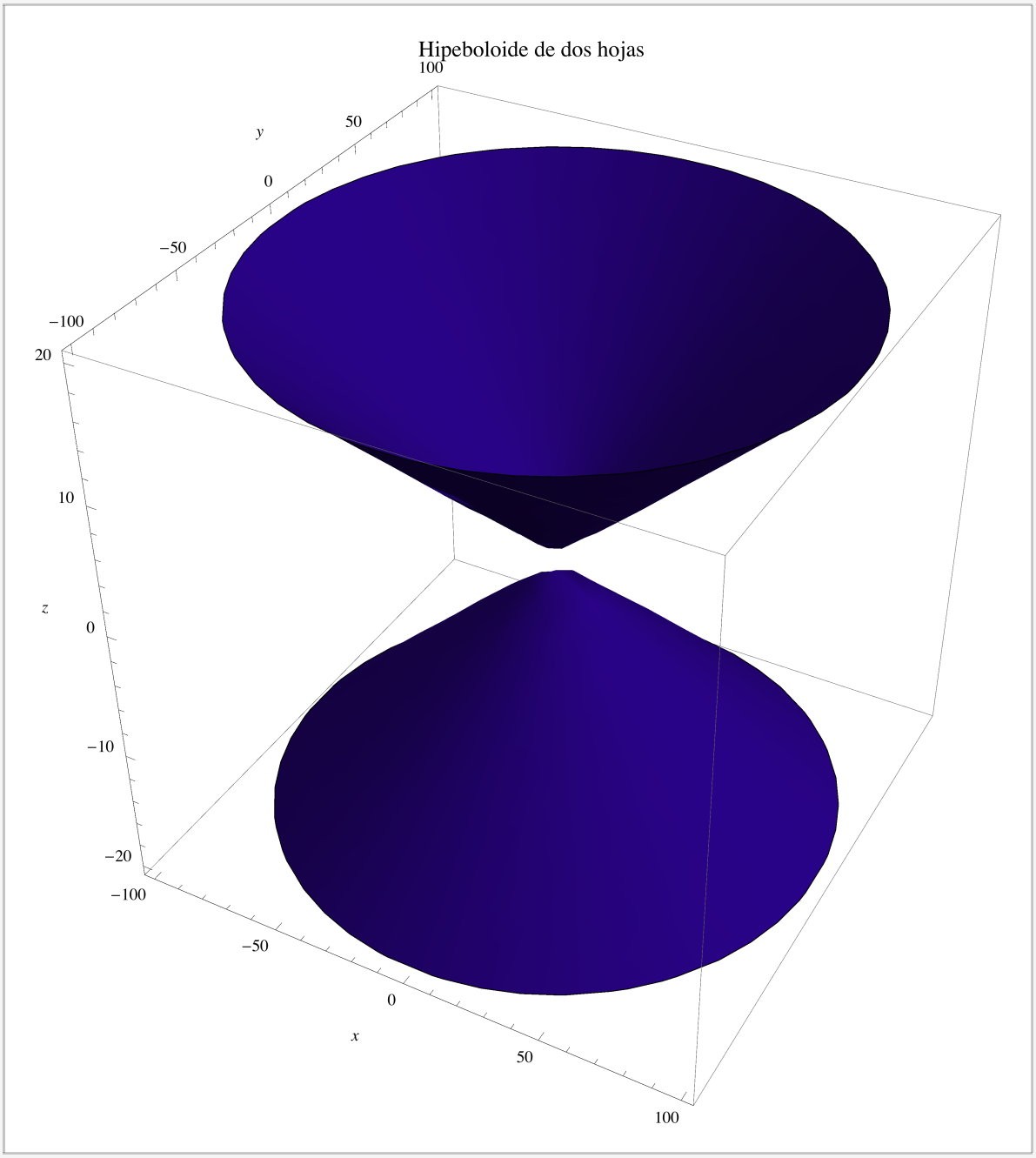


a 1 2 3 4 5

b 1 2 3 4 5

c 1 2 3 4 5

Out[41]=



Ejemplo

Las siguientes instrucciones dibujan de forma interactiva plantos tangentes y rectas normales a las variedades definidas implícitamente por las ecuaciones que se indican a continuación:

Ejemplo 1: $\Phi(x,y,z) = z + x^2 + y^2 - 4$
Ejemplo 2: $\Phi(x,y,z) = z - (y^2 - x^2)/2$
Ejemplo 3: $\Phi(x,y,z) = z - (x + y)/2$
Ejemplo 4: $\Phi(x,y,z) = z - x\,\mathrm{Cos}(2y)$
Ejemplo 5: $\Phi(x,y,z) = z - \mathrm{Cos}(y)\,\mathrm{Sen}(x)$

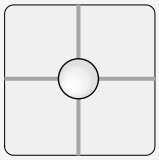
Cacula la ecuación del plano tangente y un vector normal en un punto arbitario de cada una de ellas.

In[101]:=
```
Manipulate[
  Module[{f, dx, dy, grad},
   Switch[fcn,
    f1,
    f[x_, y_] := 4 - x^2 - y^2;
    xmin = -5; xmax = 5;
    ymin = -5; ymax = 5; zmin = 0; zmax = 3.1;
    {xgrid1, ygrid1} = {1 / 2, 1 / 2},
    f2,
    f[x_, y_] := (y^2 - x^2) / 2;
    xmin = -2.5; xmax = 2.5; ymin = -2.5;
    ymax = 2.5; zmin = -2.1; zmax = 2.1;
    {xgrid1, ygrid1} = {1 / 2, 1 / 2},
    f3,
    f[x_, y_] := x Cos[2 y];
    xmin = -3; xmax = 3; ymin = -Pi;
    ymax = Pi; zmin = -3.1; zmax = 3.1;
    {xgrid1, ygrid1} = {1, Pi / 12},
    f4,
    f[x_, y_] := Sin[x] Cos[y];
    xmin = -1.5 Pi; xmax = 1.5 Pi; ymin = -1.5 Pi;
    ymax = 1.5 Pi; zmin = -1.1; zmax = 1.1;
    {xgrid1, ygrid1} = {Pi / 12, Pi / 12},
    f5,
```

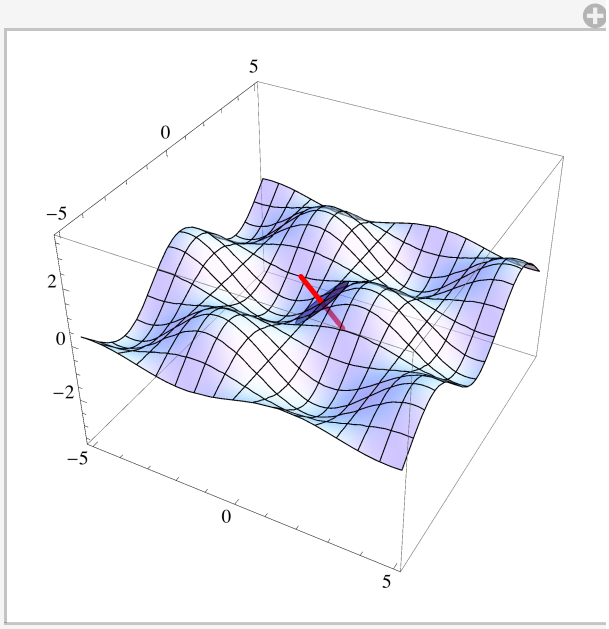
```
    f[x_, y_] := (x + y) / 2;
    xmin = -3; xmax = 3; ymin = -3;
    ymax = 3; zmin = -2.1; zmax = 2.1;
    {xgrid1, ygrid1} = {1 / 2, 1 / 2}
   ];
   dx[x_, y_] = D[f[x, y], x];
   dy[x_, y_] = D[f[x, y], y];
   grad[x_, y_] = {dx[x, y], dy[x, y], -1};
   p3 = Plot3D[f[x, y], {x, -5, 5},
     {y, -5, 5}, PlotStyle → Opacity[.5]];
   {a, b} = pt;
   Show[
    p3,
    Graphics3D[
     {{Red, Point[{a, b, f[a, b]}]}, {ColorData[1][2],
       Opacity[.5], Cylinder[{{a, b, f[a, b]},
         {a, b, f[a, b]} + .001 grad[a, b]}, 1]},
      {Thickness[0.01], Red, Line[
        {{a, b, f[a, b]} + grad[a, b] /
           Norm[grad[a, b]], {a, b, f[a, b]} -
          grad[a, b] / Norm[grad[a, b]]}]}}],
    PlotRange → {zmin - 2.5, zmax + 2.5},
    BoxRatios → Automatic, ImageSize → {250, 250}]],
  {{pt, {0, 0}, "(a,b)"}, {xmin, ymin},
   {xmax, ymax}},
  {{fcn, f4, "Φ(x,y,z) = "},
   {f1 → TraditionalForm[z - 4 + x^2 + y^2],
    f2 → TraditionalForm[z - (y^2 - x^2) / 2],
    f5 → TraditionalForm[z - (x + y) / 2],
    f3 → TraditionalForm[z - x Cos[2 y]],
    f4 → TraditionalForm[z - Sin[x] Cos[y]]},
   ControlType → PopupMenu},
  TrackedSymbols → Manipulate,
  ControlPlacement → Left
 ]
```

Out[101]=

(a,b)



$\Phi(x,y,z) =$ $z - \sin(x)\cos(y)$



1.3 Representaciones paramétricas

Definición 1.3.1: Representaciones paramétricas locales de una variedad de dimensión k en $\mathbb{R}^n$

Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es una variedad diferenciable de dimensión k en $\mathbb{R}^n$ y de clase C^r si para cada $p \in S$ existen un abierto $V \subset \mathbb{R}^k$, un entorno $U \subset \mathbb{R}^n$ de p y una aplicación $\phi: V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^r tales que

a) Existe $t_0 \in V$ tal que $\phi(t_0) = p$

b) $D\phi(t_0)$ es inyectiva. Equivalentemente, el rango de la matriz $[D\phi(t_0)]$ es k

c) ϕ es un homeomorfismo entre V y $S \cap U$, con la topología relativa

Definición 1.3.2: Espacio afín tangente y normales en términos de representaciones paramétricas

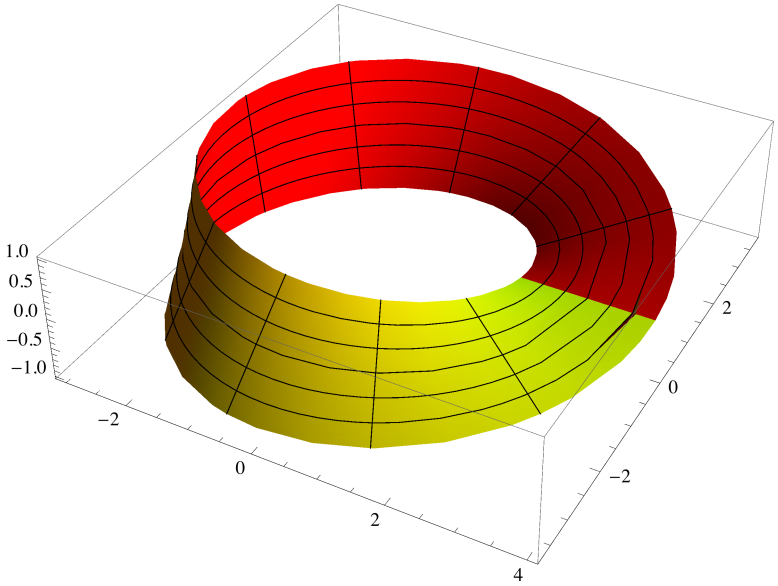
Dado un punto $p \in S$, se elige una representación paramétrica local de S alrededor del punto p: $\phi: V \longrightarrow \mathbb{R}^n$. El espacio vectorial tangente a S en el punto $p = \phi(t_0)$ viene dado por $T(p;\ S) = \mathrm{Im}(D\phi(t_0))$.

Una base de este espacio vectorial son los vectores columna de la matriz $[D\phi(t_0)]$

La orden del *Mathematica* más adecuada para representar recintos dados en forma implícita es ParametricPlot y ParametricPlot3D. Los cambios de coordenadas polares, cilíndricas y esféricas juegan un papel fundamental a la hora de aprender a parametrizar ciertas curvas y superficies.

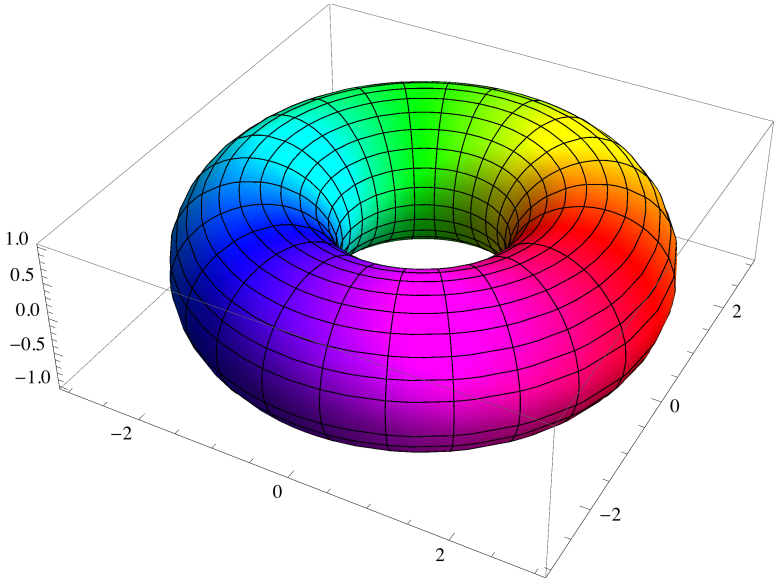
» La banda de Möbius

```
ParametricPlot3D[{Cos[t] (3 + r Cos[t / 2]),
  Sin[t] (3 + r Cos[t / 2]), r Sin[t / 2]},
 {r, -1, 1}, {t, 0, 2 Pi}, Mesh → {5, 10},
 PlotStyle → FaceForm[Red, Yellow]]
```



» El toro

```
ParametricPlot3D[
 {(2 + Cos[v]) Cos[u], (2 + Cos[v]) Sin[u], Sin[v]},
 {u, 0, 2 Pi}, {v, 0, 2 Pi}, Mesh → 25, ColorFunction →
  Function[{x, y, z, u, v}, Hue[u / (2 Pi)]],
 ColorFunctionScaling → False]
```



Rutinas 1.3 : Coordenadas polares, cilíndricas, esféricas. Significado geométrico de los parámetros

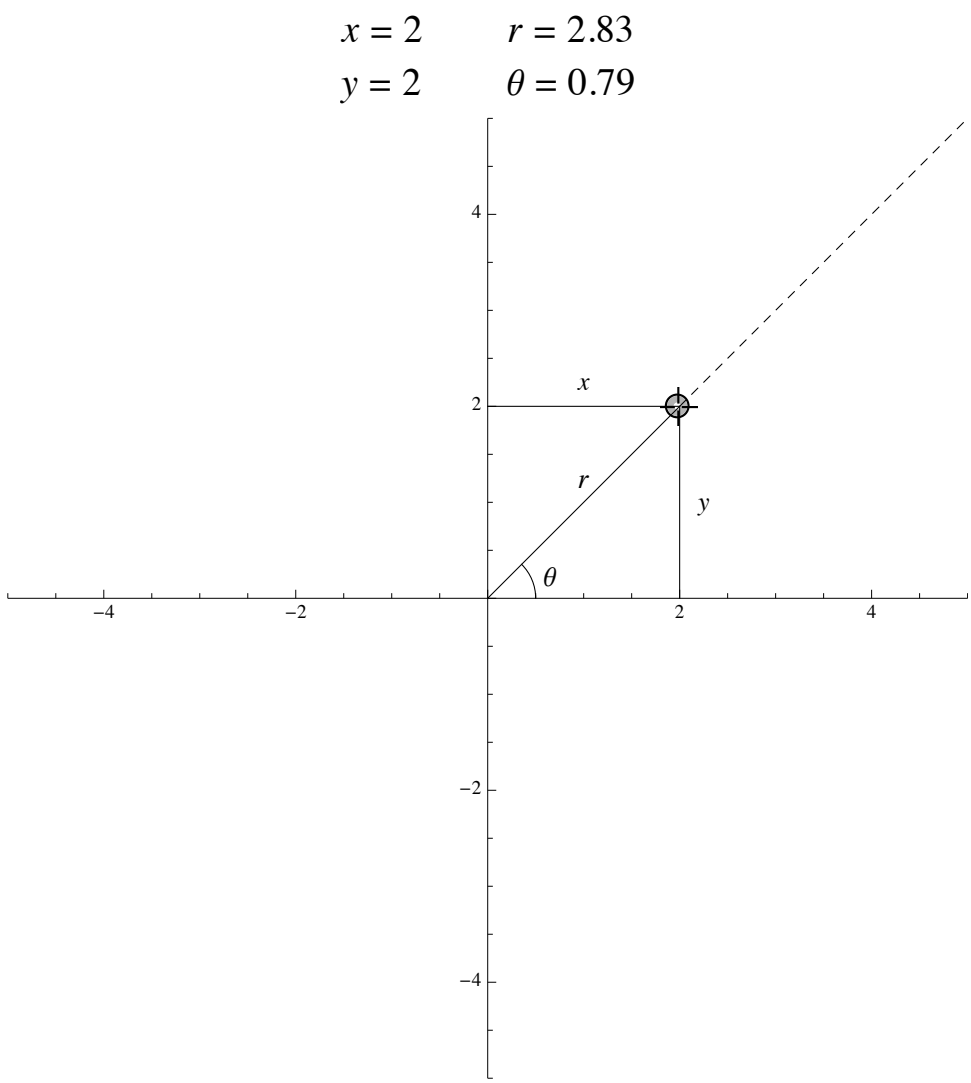
THIS NOTEBOOK IS THE SOURCE CODE FROM

"Cylindrical Coordinates" from the Wolfram Demonstrations Project
http://demonstrations.wolfram.com/CylindricalCoordinates/

- Contributed by: Jeff Bryant

In[105]:=
```
polares = Manipulate[
  theta[a_] := If[a[[2]] ≥ 0, Arg[a[[1]] + a[[2]] I],
    2 Pi + Arg[a[[1]] + a[[2]] I]];
  Column[{Text@Style[Row[{TraditionalForm@x, " = ",
        a[[1]], Spacer[40], TraditionalForm@r,
        " = ", SetAccuracy[Norm[a], 3]}]],
    Text@Style[Row[{TraditionalForm@y,
        " = ", a[[2]], Spacer[40], "θ = ",
        SetAccuracy[theta[a], 3]}]],
    Graphics[{{Dashed, Line[{a, {10 * Sign[a[[1]]],
          a[[2]] / a[[1]] * 10 * Sign[a[[1]]]}}]},
      Line[{{0, 0}, a}],
              Line[{{0, a[[2]]}, a}],
              Line[{{a[[1]], 0}, a}],
              Circle[{0, 0}, .5, {0, theta[a]}],
              Text[Style[TraditionalForm@x,
        N[14 * (1 - Exp[-Abs[a[[1]]]])]],
       {a[[1]] / 2, a[[2]] + .25}],
              Text[Style[TraditionalForm@y,
        N[14 * (1 - Exp[-Abs[a[[2]]]])]],
       {a[[1]] + .25, a[[2]] / 2}],
              Text[Style[TraditionalForm@r,
        N[14 * (1 - Exp[-Abs[Norm[a]]])]],
       {a[[1]] / 2, a[[2]] / 2 + .25}],
              Text[Style["θ",
        N[14 * (1 - Exp[-Abs[Norm[a]]])]], {.7 *
         Cos[theta[a] / 2], .6 * Sin[theta[a] / 2]}]},
              ImageSize → 450, PlotRange →
      {{-5, 5}, {-5, 5}}, Axes → True]}, Center],
  {{a, {2, 2}}, {-5, -5}, {5, 5}, Locator},
  TrackedSymbols :→ {a}]
```

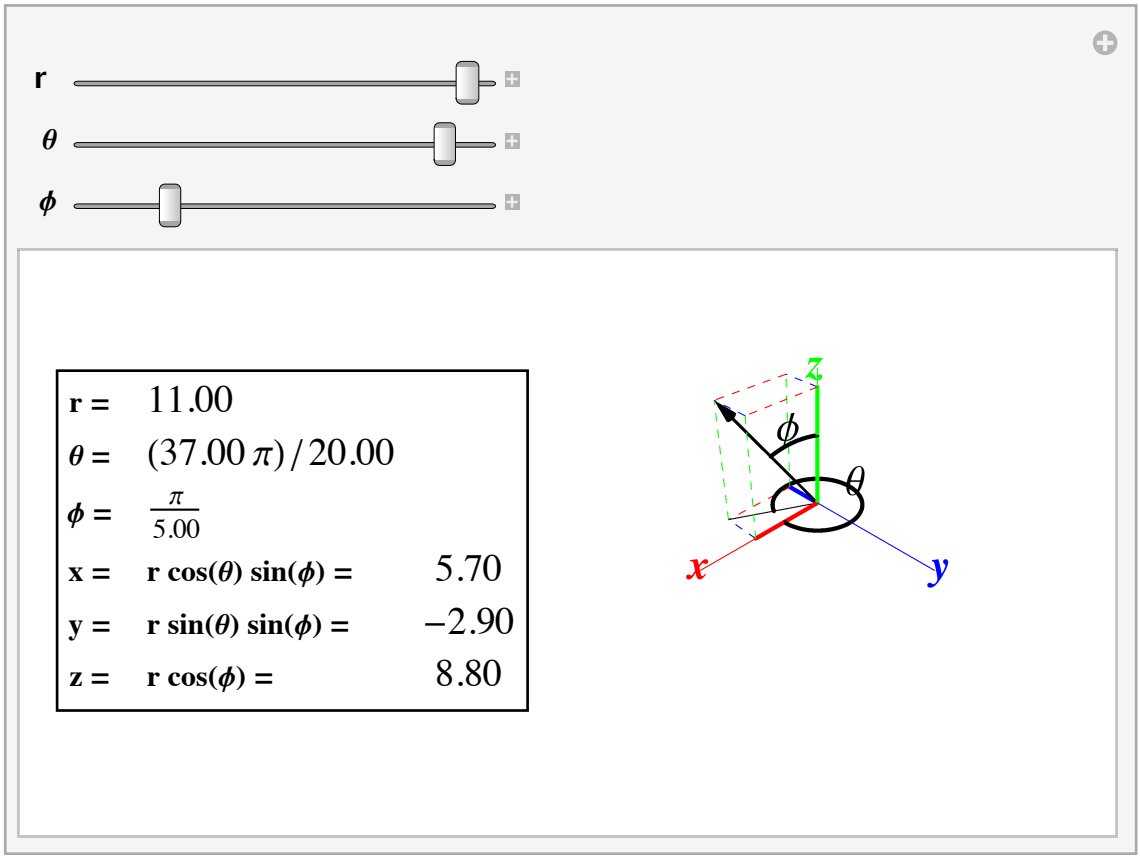
Out[105]=



```
DynamicModule[
  {r, theta, phi, x, y, z, p,
   origen = {0, 0, 0},
   radioprin = 11, radioini = 2,
   radiof = 11, limf = 10, limv = 11,
   paso = Pi / 20},
  Manipulate[
    x = r Cos[theta] Sin[phi];
    y = r Sin[theta] Sin[phi];
    z = r Cos[phi];
    p = {x, y, z};
Grid[{{Framed[Text@Grid[{
          {Style["r = ", Bold, 14] ,
           NumberForm[Chop[r], {2, 2}]},
          {Style["θ = ", Bold, 14],
           NumberForm[Chop[theta], {2, 2}]},
          {Style["ϕ = ", Bold, 14],
           NumberForm[Chop[phi], {2, 2}]},
          {Style["x = ", Bold, 14],
           Style["r cos(θ) sin(ϕ) = ", Bold, 14],
           NumberForm[Chop[N[x]], {2, 2}]},
          {Style["y = ", Bold, 14],
           Style["r sin(θ) sin(ϕ) = ", Bold, 14],
           NumberForm[Chop[N[y]], {2, 2}]},
          {Style["z = ", Bold, 14],
           Style["r cos(ϕ) = ", Bold, 14],
           NumberForm[Chop[N[z]], {2, 2}]}
         },
         Alignment → {{Center, Left}}
        ]],
      Show[
      Graphics3D[{
         (* Vector *)
         Black,
         Arrow[Tube[{origen, p}, 0.1]],
          (* ejes y proyecciones... *)
  { Red, Line[{origen, {limf, 0, 0}}],
          Text[Style["x", Red, Italic, Bold, 20],
```

```
          {limf + .2, 0, .3}], Blue,
         Line[{origen, {0, limf, 0}}],
         Text[Style["y", Blue, Italic, Bold, 20],
          {0, limf + .2, .3}], Green,
         Line[{origen, {0, 0, limf}}]},
        Text[Style["z", Green, Italic, Bold, 20],
         {.3, 0, limf + .2}],
        Red, {Thick, Line[{origen, {x, 0, 0}}]},
        {Dashed, Line[{{0, y, 0}, {x, y, 0}}],
         Line[{{0, 0, z}, {x, 0, z}}],
         Line[{{0, y, z}, {x, y, z}}]},
        Blue, {Thick, Line[{origen, {0, y, 0}}]},
        {Dashed, Line[{{x, 0, 0}, {x, y, 0}}],
         Line[{{0, 0, z}, {0, y, z}}],
         Line[{{x, 0, z}, {x, y, z}}]},
        Green, {Thick, Line[{origen, {0, 0, z}}]},
        {Dashed, Line[{{x, 0, 0}, {x, 0, z}}],
         Line[{{0, y, 0}, {0, y, z}}],
         Line[{{x, y, 0}, {x, y, z}}]},
        Black, Line[{origen, {x, y, 0}}],
        (* etiqueta theta *)
        If[theta == 0 || phi == 0 || phi == Pi, {},
         {Text[Style["θ", Thick, 20],
           {Sqrt[x^2 + y^2] / 2 Cos[theta / 2], Sqrt[
               x^2 + y^2] / 2 Sin[theta / 2], .5}]}],
        (* etiqueta phi *)
        If[phi == 0, {}, {Text[Style["ϕ", Thick, 20],
           {(Sqrt[x^2 + y^2 + z^2] + 2) / 2
             Cos[theta] Sin[phi / 2],
            (Sqrt[x^2 + y^2 + z^2] + 2) / 2 Sin[theta]
             Sin[phi / 2], (Sqrt[x^2 + y^2 + z^2] + 2) /
              2 Cos[phi / 2]}]}
        ]
}, Boxed → False](*Graphics3D*),
     (* arco theta *)
     If[theta == 0, {},
      {ParametricPlot3D[{Sqrt[x^2 + y^2] / 2 Cos[t],
         Sqrt[x^2 + y^2] / 2 Sin[t], 0},
        {t, 0, theta}, PlotStyle → {Thick}]}],
```

```
        (* arco phi *)
        If[phi == 0, {}, ParametricPlot3D[
          {Sqrt[x^2 + y^2 + z^2] / 2 Cos[theta] Sin[t],
           Sqrt[x^2 + y^2 + z^2] / 2 Sin[theta] Sin[t],
           Sqrt[x^2 + y^2 + z^2] / 2 Cos[t]},
          {t, 0, phi}, PlotStyle → {Thick}]],
  PlotRange → { {-limv, limv}, {-limv, limv} ,
          {-limv, limv}},
        ViewPoint → {1, 1, 1},
        ImageSize → {Scaled[.5]}
  ](*Show*)
     }},
    Alignment → {{Top, Top}}
   ](*Row*),
  (* variables dinámicas: *)
 {{r, radioprin, Style["r ", Bold, 14]},
    radioini, radiof, .01},
   {{theta, 17 Pi / 10, Style["θ", Bold, 14]},
    0, 2 Pi, paso},
   {{phi, Pi / 5, Style["ϕ", Bold, 14]}, 0, Pi, paso}
  ]
 ]
```


r
θ
ϕ
r = 11.00
θ = (37.00 π) / 20.00
ϕ = π / 5.00
x = r cos(θ) sin(ϕ) = 5.70
y = r sin(θ) sin(ϕ) = −2.90
z = r cos(ϕ) = 8.80
z
ϕ
θ
x
y

Orientación en variedades

Objetivos

» Utilizar animaciones para visualizar la orientación a través de campos de vectores tangentes. Orientación normal en hipersuperficies
» Comprobar interactivamente si una parametrización es coherente o no con una orientación dada
» Visualizar el concepto de vector que apunta hacia fuera en puntos del borde de una variedad con pseudo-borde
» Saber determinar visualmente la orientación inducida en el borde de una variedad con pseudo-borde orientada
» Comprender el concepto de no-orientabilidad con animaciones utilizando la banda de Mobius

2. Orientación en variedades

Rutinas 2.1 : Parametrizaciones y orientación por campos de vectores tangentes

In[1]:=

```
orientacion3D[funclist_,
   paramlist_, optionsList_, iniList_] :=
  DynamicModule[{tmin, tmax, param, f, Df},
    param = paramlist[[1]];
  tmin = paramlist[[2]]; tmax = paramlist[[3]];
       f[t_] = Evaluate[funclist /. param -> t];
    Df[t_] = D[f[t], t];
   Manipulate[Show[
     ParametricPlot3D[funclist, paramlist,
      PlotStyle → {Blue, Thick}, PlotLabel → Text[
        Style[StringForm["ϕ(``)=``,", paramlist[[
            1]], funclist], FontSize → 20]]],
     Graphics3D[
      {Hue[1], Thick,
       Arrow[{f[k], f[k] + m / Norm[Df[k]] * Df[k]}]}
     ],
     Graphics3D[
      {Blue, PointSize[0.02], Point[Evaluate[f[k]]]}
     ],
     optionsList],
    {{k, iniList[[1]], t0},
     tmin, tmax, Appearance → "Labeled"},
    {{m, iniList[[2]], "longitud"}, .3,
     2, Appearance → "Labeled"}]];

orientacion[funclist_,
  paramlist_, optionsList_, iniList_] :=
```

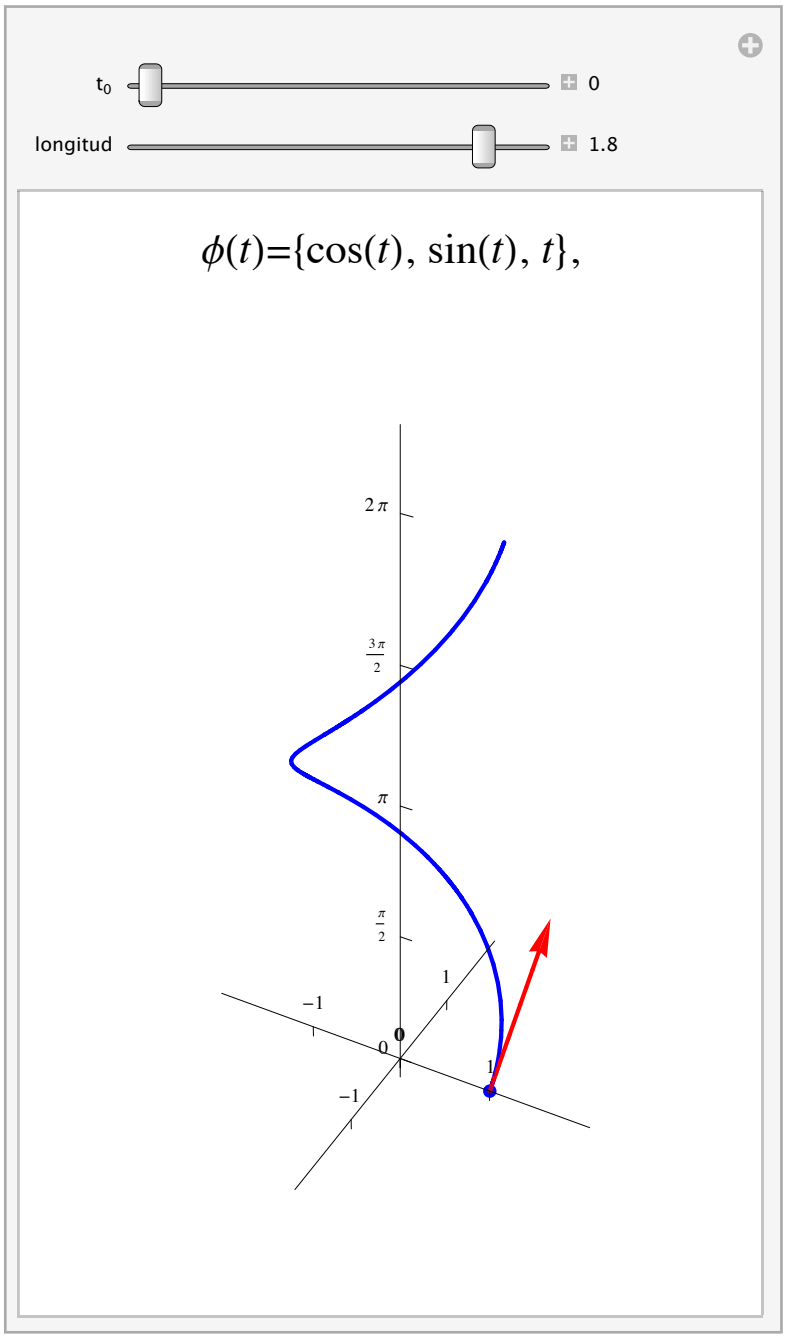
```
DynamicModule[{tmin, tmax, param, f, Df},
  param = paramlist[[1]];
 tmin = paramlist[[2]]; tmax = paramlist[[3]];
     f[t_] = Evaluate[funclist /. param -> t];
   Df[t_] = D[f[t], t];
 Manipulate[Show[
   ParametricPlot[funclist, paramlist,
    PlotStyle → {Blue, Thick}, PlotLabel → Text[
      Style[StringForm["ϕ(``)=``,", paramlist[[
         1]], funclist], FontSize → 20]]],
   Graphics[{Hue[1], Thick, Arrow[
      {f[k], f[k] + m / Norm[Df[k]] * Df[k]}]}],
   Graphics[{Blue, PointSize[0.02],
     Point[Evaluate[f[k]]]}
   ],
   optionsList],
  {{k, iniList[[1]],  t0},
   tmin, tmax, Appearance → "Labeled"},
  {{m, iniList[[2]], "longitud"}, .3,
   1, Appearance → "Labeled"}]]
```

Ejemplo

Posibles orientaciones en la espiral

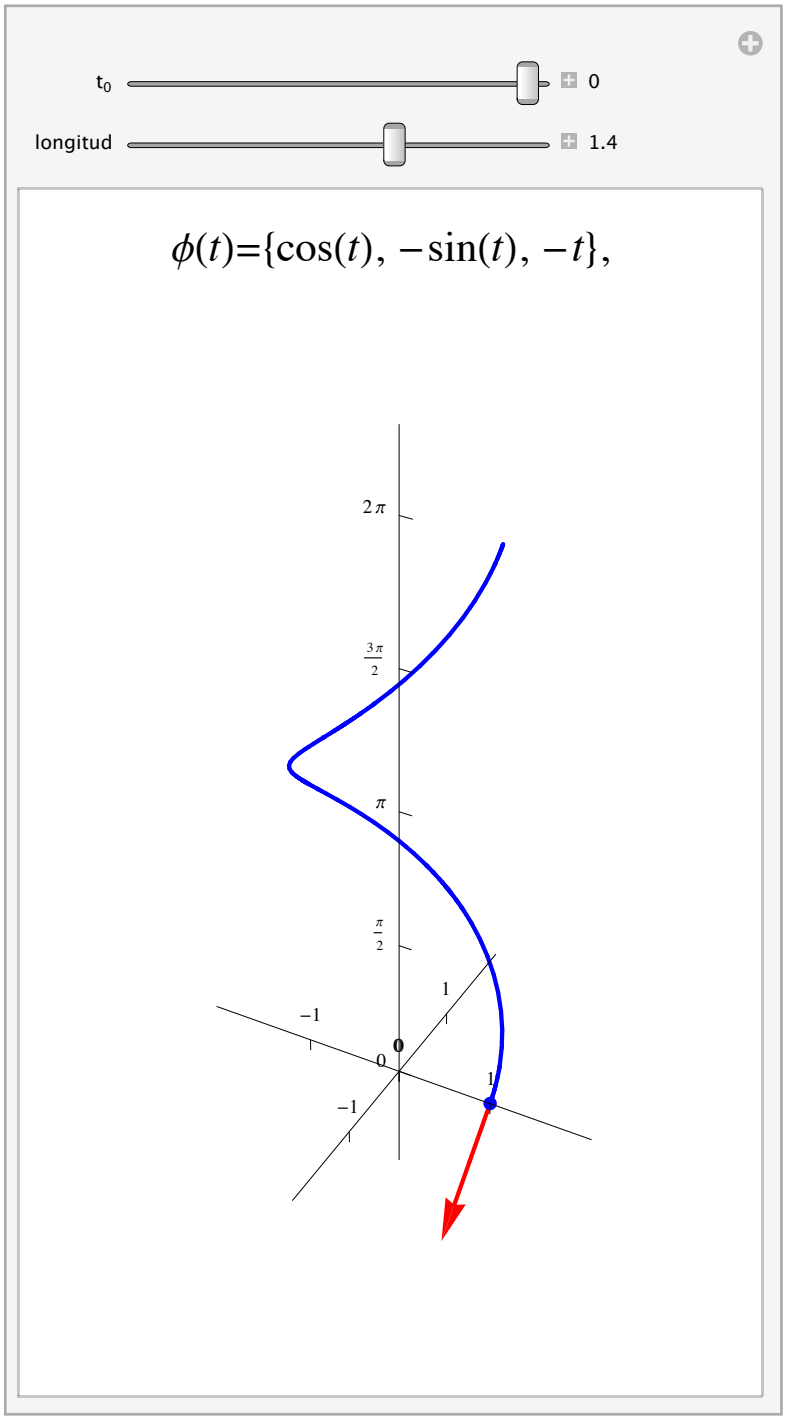
In[162]:=
```
helice1 =
  orientacion3D[{Cos[t], Sin[t], t}, {t, 0, 2 * Pi},
   {Axes → True, AxesOrigin → {0, 0, 0}, Boxed → False,
    PlotRange → {{-2, 2}, {-2, 2}, {-0.1, 7}},
    ImageSize -> 315, Ticks → {{-1, 0, 1},
      {-1, 0, 1}, Range[0, 2 π, π / 2]}}, {0, 1.8}]
```

Out[162]=



In[107]:=
```
helice2 = orientacion3D[{Cos[t], -Sin[t], -t},
   {t, -2 * Pi, 0}, {Axes -> True,
    AxesOrigin -> {0, 0, 0}, Boxed -> False,
    PlotRange -> {{-2, 2}, {-2, 2}, {-1, 7}},
    ImageSize -> 315, Ticks -> {{-1, 0, 1},
      {-1, 0, 1}, Range[0, 2 π, π / 2]}}, {0, 1.4}]
```

Out[107]=

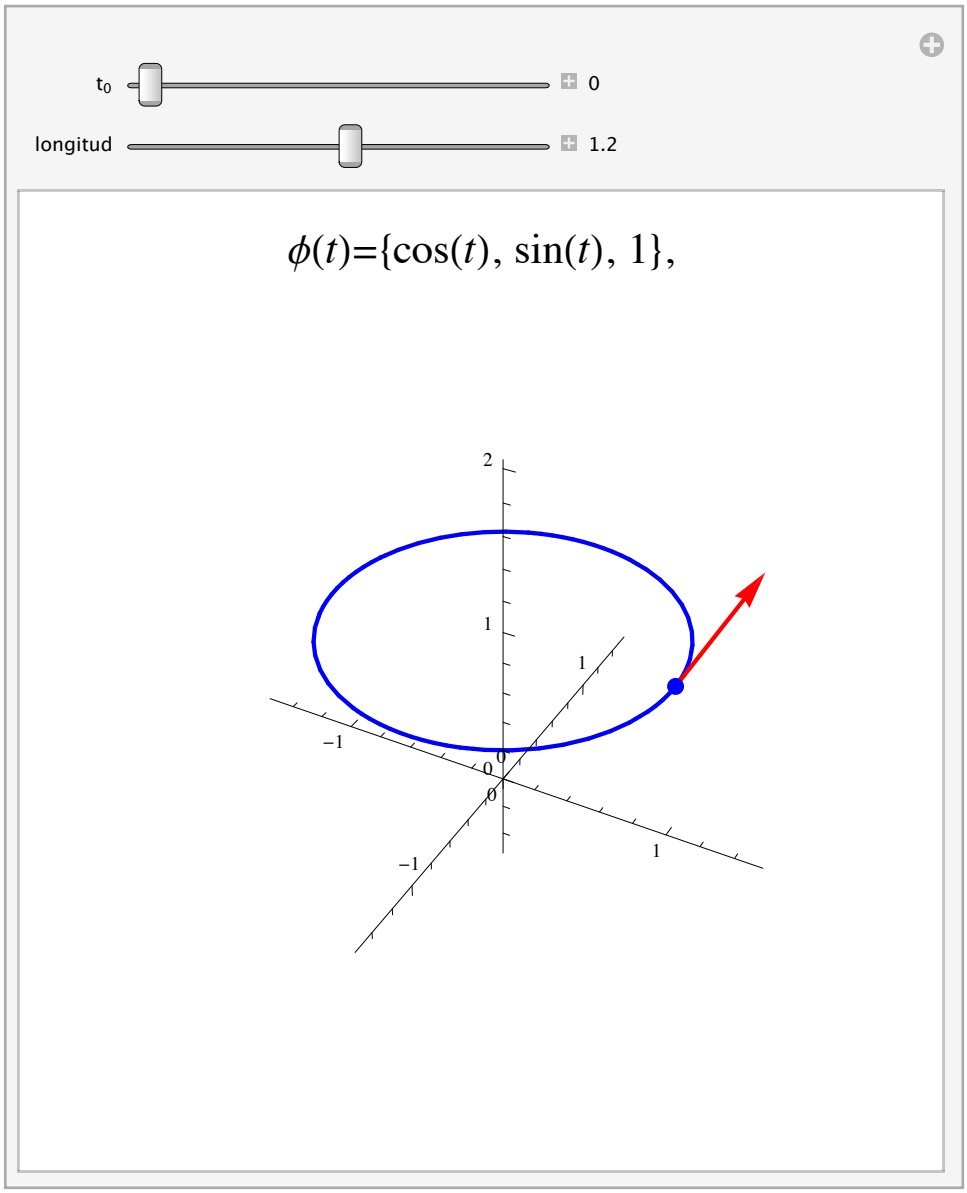


Ejemplo

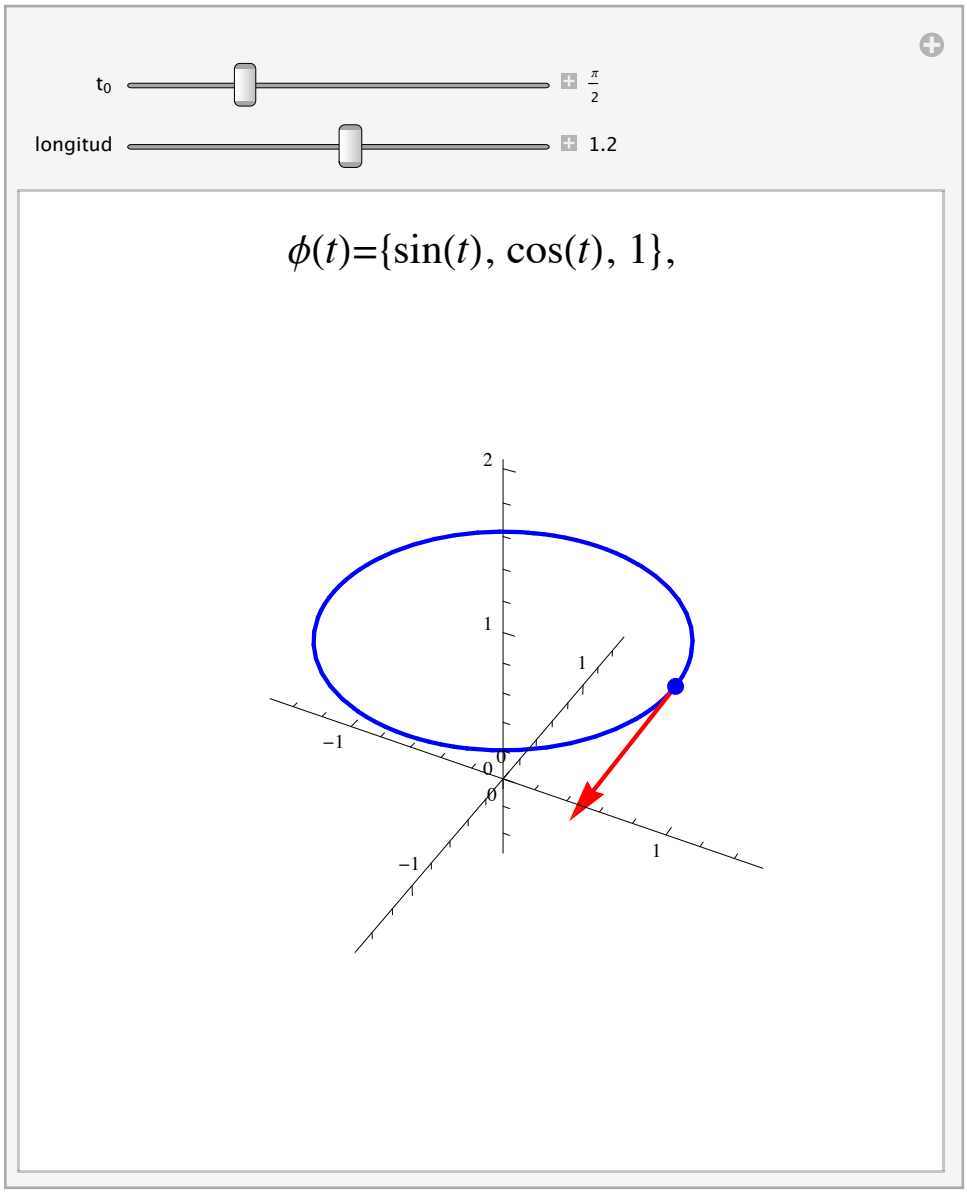
Posibles orientaciones en una circunferencia en $\mathbb{R}^3$

In[108]:=
```
cir1 =
 orientacion3D[{Cos[t], Sin[t], 1}, {t, 0, 2 * Pi},
  {Axes → True, AxesOrigin → {0, 0, 0}, Boxed → False,
   PlotRange → {{-1.5, 1.5}, {-1.5, 1.5}, {-0.5, 2}},
   ImageSize → 400}, {0, 1.2}]
cir2 = orientacion3D[{Sin[t], Cos[t], 1},
  {t, 0, 2 * Pi}, {Axes → True,
   AxesOrigin → {0, 0, 0}, Boxed → False,
   PlotRange → {{-1.5, 1.5}, {-1.5, 1.5}, {-0.5, 2}},
   ImageSize → 400}, {π / 2, 1.2}]
```

Out[108]=



Out[109]=



2.1 Variedades no orientables: La banda de Möbius

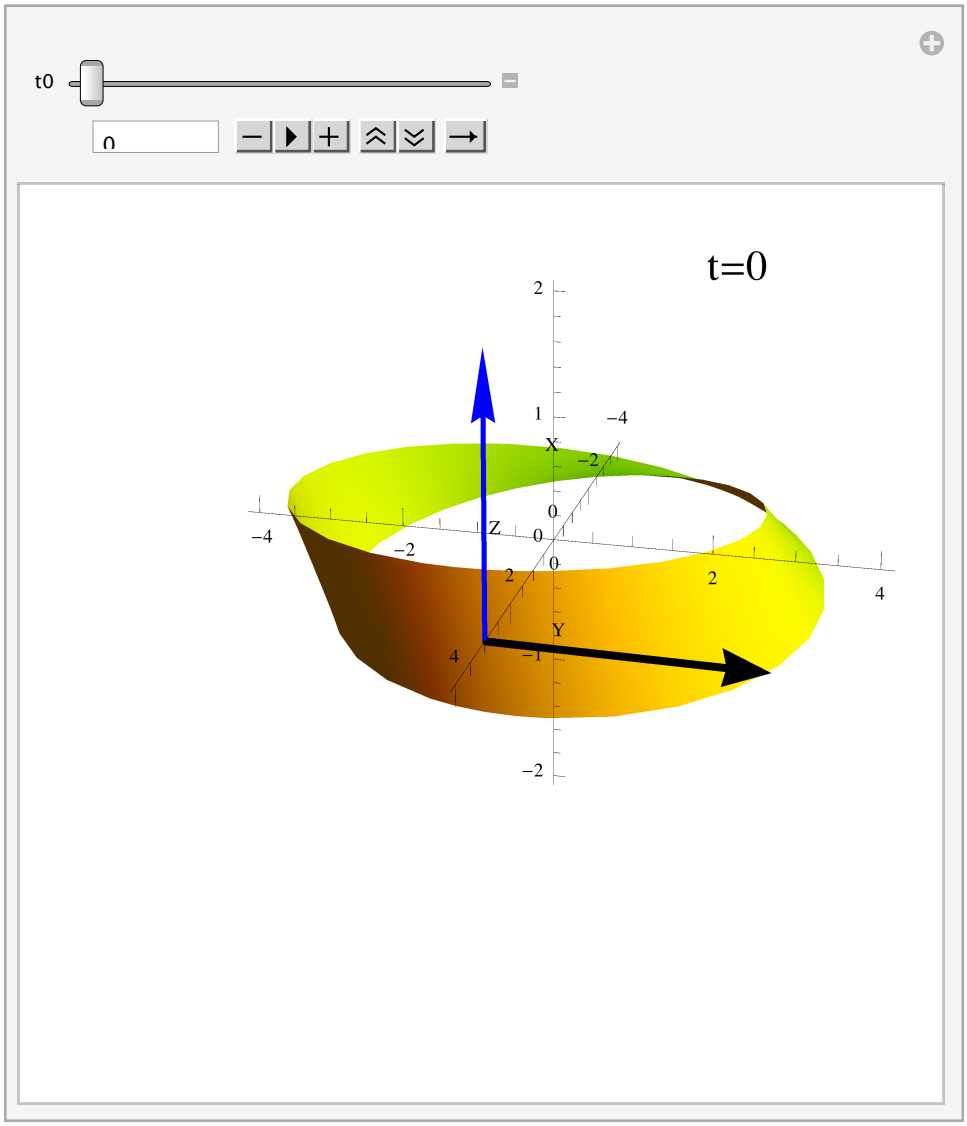
In[112]:=

```
Clear[t0, a, an, b, vt, pt, jacobiana];
mobius1 = Module[{an, b, vt, pt,
    tangentes, normal, x, y, z, ϕ, jacobiana},
   x[s_, t_] := (a - s * Sin[t / 2]) Cos[t];
   y[s_, t_] := (a - s * Sin[t / 2]) Sin[t];
   z[s_, t_] := (s * Cos[t / 2]);
   ϕ[s_, t_] := {x[s, t], y[s, t], z[s, t]};
   jacobiana[a_, b_] :=
    D[{x[s, t], y[s, t], z[s, t]}, {{s, t}}] /.
     {s → a, t → b};
   an = 3;
   b = 1;
   vt[t_] := Transpose[jacobiana[0, t]] /. {a → an};
   pt[t_] :=
    {(an - s * Sin[t / 2]) Cos[t], (an - s * Sin[t / 2])
       Sin[t], (s * Cos[t / 2])} /. {s → 0};
   Manipulate[Show[{
      ParametricPlot3D[{(an - s * Sin[t / 2]) Cos[t],
        (an - s * Sin[t / 2]) Sin[t], (s * Cos[t / 2])},
       {t, 0, 2 π}, {s, -0.5, 0.5},
       PlotStyle → {Directive[Yellow, Opacity[1]]},
       Mesh → False],

      Graphics3D[Text[Style[StringForm["t=``", t0],
         FontSize → 20], {-2, 2, 2}]],
      Graphics3D[{
        {Blue, Thickness[0.006], Arrow[Evaluate[
           {{pt[t0], pt[t0] + 2 vt[t0][[1]]}}]]},
        {Black, Thickness[0.006], Arrow[Evaluate[
           {{pt[t0], pt[t0] + vt[t0][[2]]}}]]}
         }]},
     ImageSize → 400, ViewPoint → {2, 0.5, 0.5},
     AspectRatio → 1, PlotRange → {{-(an + 1), an + 1},
       {-(an + 1), an + 1}, {-b - 1, b + 1}}, Boxed → False,
```

```
    AxesLabel → {"X", "Y", "Z"}, AxesOrigin → {0, 0, 0}
   ],
   {{t0, 0}, 0, 2 π, Appearance → "Open"}]
 ]
```

Out[113]=



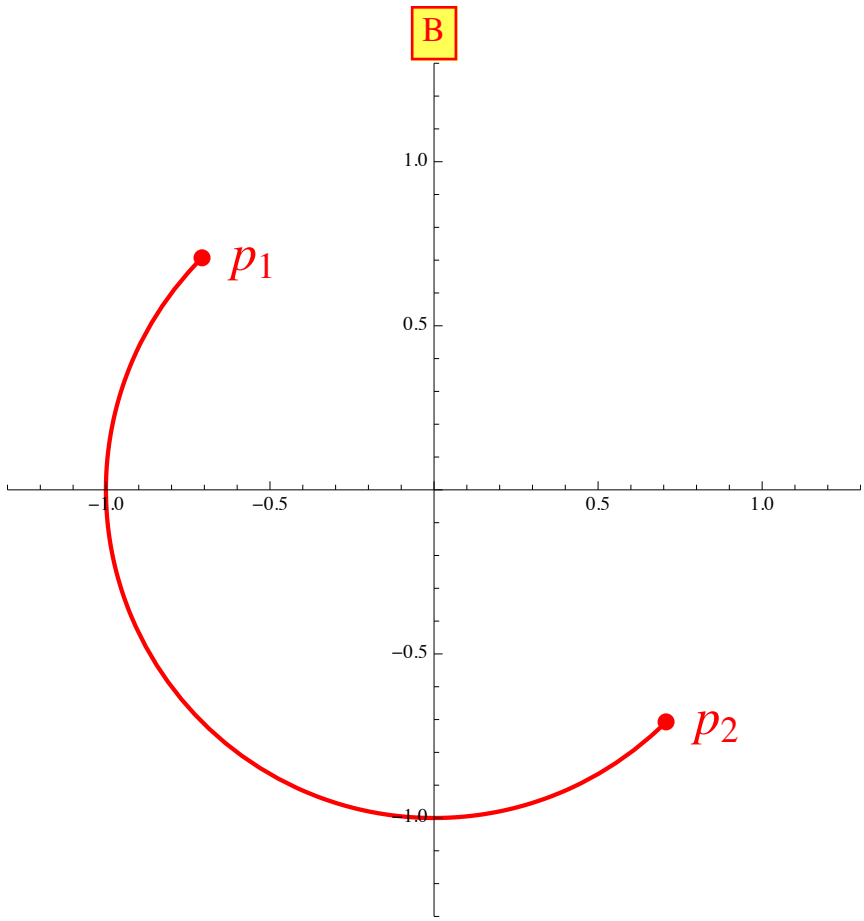
2.2 Variedades con pseudo-borde

» Dimensión 1 en $\mathbb{R}^2$

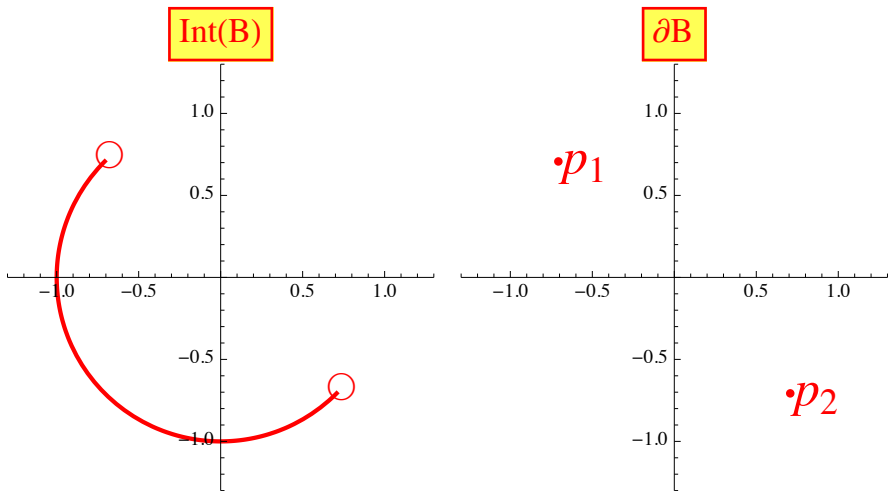
In[114]:=
```
grafB = Show[ParametricPlot[
    {Cos[t], Sin[t]}, {t, -5 π / 4, -π / 4},
    PlotStyle → {Red, Thick},
    PlotLabel -> Style[Framed["B"],
      16, Red, Background → Lighter[Yellow]],
    PlotRange → {{-1.3, 1.3}, {-1.3, 1.3}},
    ImageSize → 400],
   Graphics[{Red, PointSize[0.02], Point[
      {-1/√2, 1/√2}], Text[Style["p1", Large],
      Offset[{0, 0}, {-1/√2 + 0.152, 1/√2}]]}],
   Graphics[{Red, PointSize[0.02], Point[
      {1/√2, -1/√2}], Text[Style["p2", Large],
      Offset[{0, 0}, {1/√2 + 0.15, -1/√2}]]}]]
grafIntB = ParametricPlot[{Cos[t], Sin[t]},
    {t, -5 π / 4, -π / 4},
    PlotStyle → {Red, Thick},
    PlotLabel -> Style[Framed["Int(B)"],
      16, Red, Background → Lighter[Yellow]],
    PlotRange → {{-1.3, 1.3}, {-1.3, 1.3}},
    Epilog → {Inset[Style["○", 20, Red], {1/√2 + 0.03,
        -1/√2 + 0.03}], Inset[Style["○", 20, Red],
       {-1/√2 + 0.03, +1/√2 + 0.03}]},
    ImageSize → 200];
grafbordeB = Show[
```

```
Graphics[{Red, PointSize[0.02], Point[
    {-1/√2, 1/√2}], Text[Style["p1", Large],
    Offset[{0, 0}, {-1/√2 + 0.15, 1/√2}]]}],
Graphics[{Red, PointSize[0.02], Point[
    {1/√2, -1/√2}], Text[Style["p2", Large],
    Offset[{0, 0}, {1/√2 + 0.15, -1/√2}]]}],
Axes → True, ImageSize → 200,
PlotRange → {{-1.3, 1.3}, {-1.3, 1.3}},
PlotLabel -> Style[Framed["∂B"], 16,
  Red, Background → Lighter[Yellow]]];
Grid[{{grafIntB, grafbordeB}}]
```

Out[114]=



Out[116]=

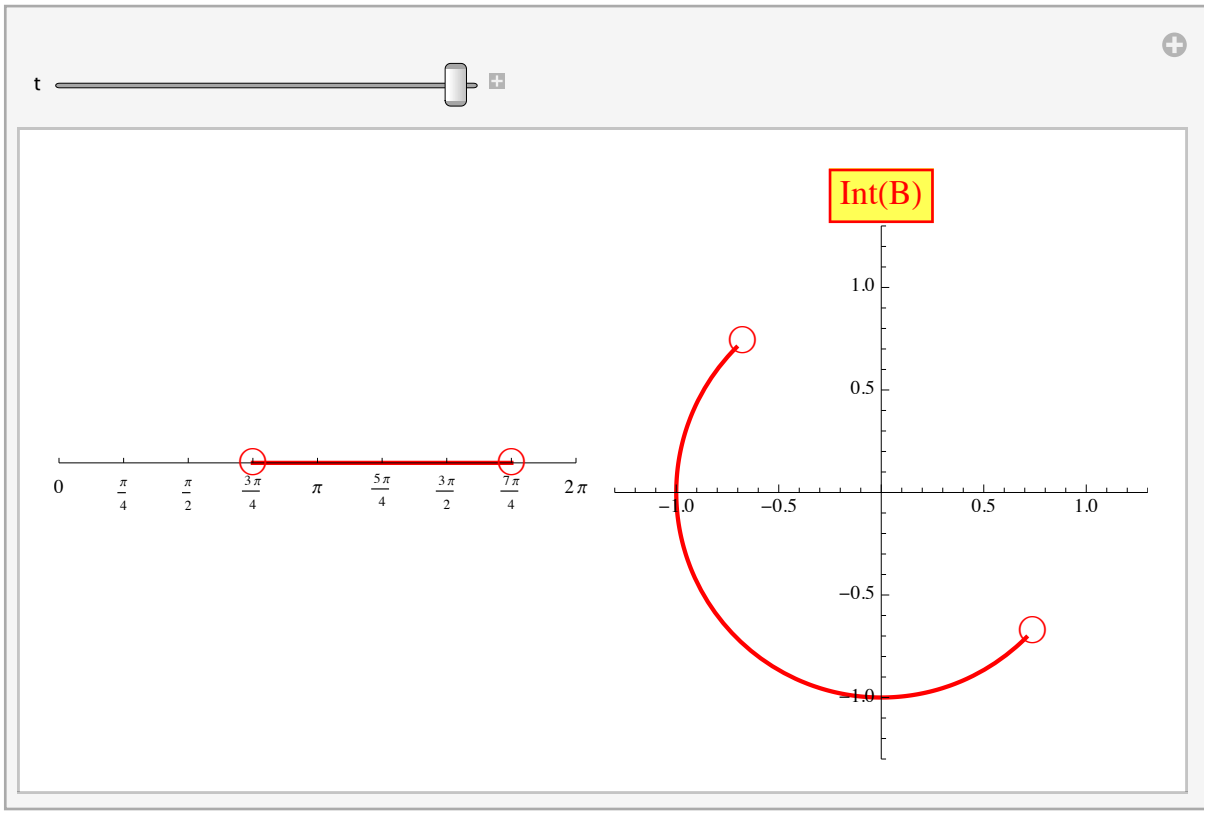


Rutinas 3.1 : Representación paramétrica de B en cada punto y significado geométrico del parámetro

» Puntos del interior

In[119]:=
```
Manipulate[Grid[{{
    ParametricPlot[{t, 0}, {t, 3 π / 4, amax},
     Axes → {True, False}, PlotStyle → {Red, Thick},
     PlotRange → {{0, 2 π}, {-1.3, 1.3}},
     Ticks → {{0, π / 4, π / 2, 3 π / 4, π,
        5 π / 4, 3 π / 2, 7 π / 4, 2 π}, None},
     Epilog → {Inset[Style["○", 20, Red],
        {3 π / 4 + 0.00001, 0}], If[7 π / 4 ≤ amax,
        Inset[Style["○", 20, Red], {7 π / 4, 0}],
        {}]}, ImageSize → 250],
    ParametricPlot[{Cos[t], Sin[t]},
     {t, 3 π / 4, amax},
     PlotStyle → {Red, Thick},
     PlotLabel -> Style[Framed["Int(B)"],
       16, Red, Background → Lighter[Yellow]],
     PlotRange → {{-1.3, 1.3}, {-1.3, 1.3}},
     Epilog → {Inset[Style["○", 20, Red],
        {-1 / √2 + 0.03, +1 / √2 + 0.03}],
       If[7 π / 4 ≤ amax, Inset[Style["○", 20, Red],
         {1 / √2 + 0.03, -1 / √2 + 0.03}], {}]},
     ImageSize → 250]
   }}], {{amax, 3 π / 4 + 0.00001, "t"},
  3 π / 4 + 0.00001, 7 π / 4}]
```

Out[119]=



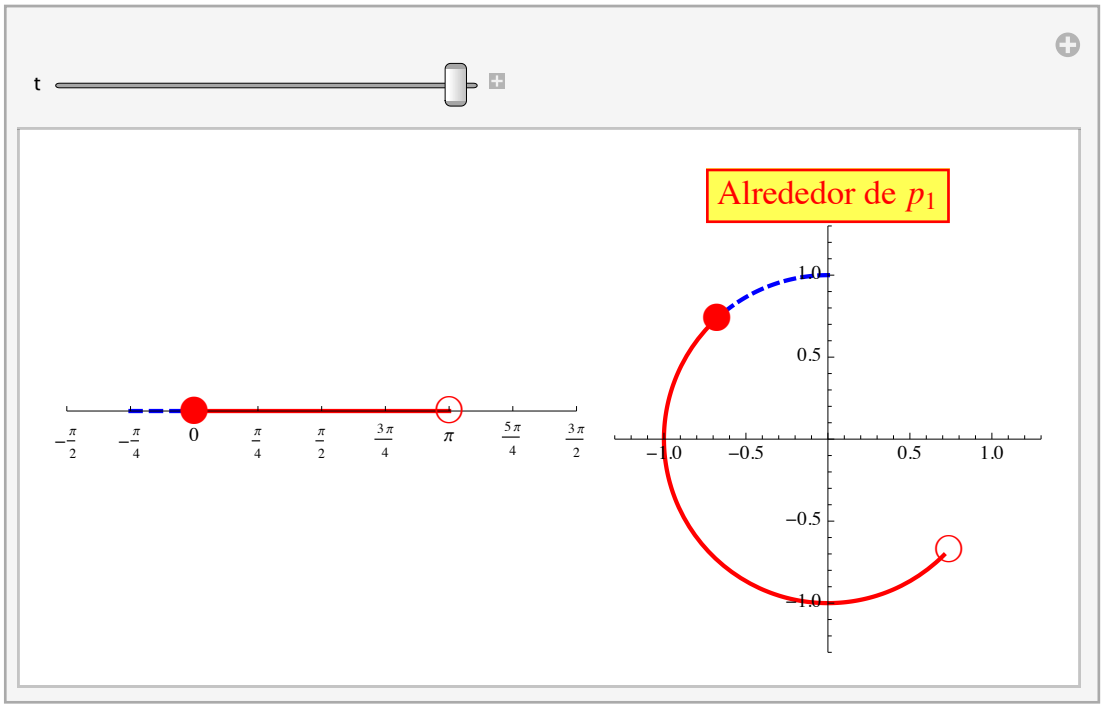
» Puntos del borde

Representación paramétrica de B en el punto p_1 del borde y significado geométrico del parámetro

In[121]:=
```
Manipulate[ Grid[{{If[amin ≤ 0,
        ParametricPlot[{t, 0},
         {t, -π / 4, Min[0, amin]}, Axes → {True, False},
         PlotStyle → {Dashing[0.02], Blue, Thick},
         PlotRange → {{-π / 2, 3 π / 2}, {-1.3, 1.3}},
         Ticks → {{-π / 4, -π / 2, 0, π / 4, π / 2,
            3 π / 4, π, 5 π / 4, 3 π / 2, 7 π / 4, 2 π},
           None}, ImageSize → 400],
        Show[{ParametricPlot[{t, 0}, {t, -π / 4,
            Min[0, amin]}, Axes → {True, False},
           PlotStyle → {Dashing[0.02], Blue, Thick},
           PlotRange → {{-π / 2, 3 π / 2}, {-1.3, 1.3}},
           Ticks → {{-π / 4, -π / 2, 0, π / 4, π / 2, 3 π / 4,
              π, 5 π / 4, 3 π / 2, 7 π / 4, 2 π}, None},
           Epilog → {Inset[Style["●", 20, Red], {0, 0}],
             If[π ≤ amin, Inset[Style["○", 20, Red],
                {π, 0}], {}]}, ImageSize → 250],
          ParametricPlot[{t, 0}, {t, 0, amin}, Axes →
            {True, False}, PlotStyle → {Red, Thick},
           PlotRange → {{-π / 2, 3 π / 2}, {-1.3, 1.3}},
           Ticks → {{0, π / 4, π / 2, 3 π / 4, π,
              5 π / 4, 3 π / 2, 7 π / 4, 2 π}, None},
           Epilog → {Inset[Style["●", 20, Red], {0, 0}],
             If[π ≤ amin, Inset[Style["○", 20, Red],
                {π, 0}], {}]}, ImageSize → 200]}]],
       If[amin ≤ 0,
        ParametricPlot[{Cos[s + 3 π / 4], Sin[s + 3 π / 4]},
         {s, -π / 4, Min[0, amin]},
         PlotStyle → {Dashing[0.02], Blue, Thick},
         PlotLabel -> Style[Framed["Alrededor de p1"],
           16, Red, Background → Lighter[Yellow]],
         PlotRange → {{-1.3, 1.3}, {-1.3, 1.3}},
         ImageSize → 250],
        Show[{
```

```
        ParametricPlot[{Cos[s + 3 π / 4],
          Sin[s + 3 π / 4]}, {s, -π / 4, 0},
         PlotStyle → {Dashing[0.02], Blue, Thick},
         PlotLabel ->
          Style[Framed["Alrededor de p1"], 16,
           Red, Background → Lighter[Yellow]],
         PlotRange → {{-1.3, 1.3}, {-1.3, 1.3}},
         Epilog →
          {If[0 ≤ amin, Inset[Style["●", 20, Red],
             Evaluate[{Cos[0 + 3 π / 4], Sin[
                  0 + 3 π / 4]} + 0.03]], {}],
           If[π ≤ amin, Inset[Style["○", 20, Red],
             Evaluate[{Cos[π + 3 π / 4], Sin[
                  π + 3 π / 4]} + 0.03]], {}]},
         ImageSize → 200],
        ParametricPlot[{Cos[s + 3 π / 4],
          Sin[s + 3 π / 4]}, {s, 0, amin},
         PlotStyle → {Red, Thick},
         PlotLabel ->
          Style[Framed["Alrededor de p1"], 16,
           Red, Background → Lighter[Yellow]],
         PlotRange → {{-1.3, 1.3}, {-1.3, 1.3}},
         Epilog →
          {If[0 ≤ amin, Inset[Style["●", 20, Red],
             Evaluate[{Cos[0 + 3 π / 4], Sin[
                  0 + 3 π / 4]} + 0.03]], {}],
           If[π ≤ amin, Inset[Style["○", 20, Red],
             Evaluate[{Cos[π + 3 π / 4], Sin[
                  π + 3 π / 4]} + 0.03]], {}]},
         ImageSize → 400]}]]}}],
    {{amin, -π / 4 + 0.00001, "t"}, -π / 4 + 0.00001, π}]
```

Out[121]=

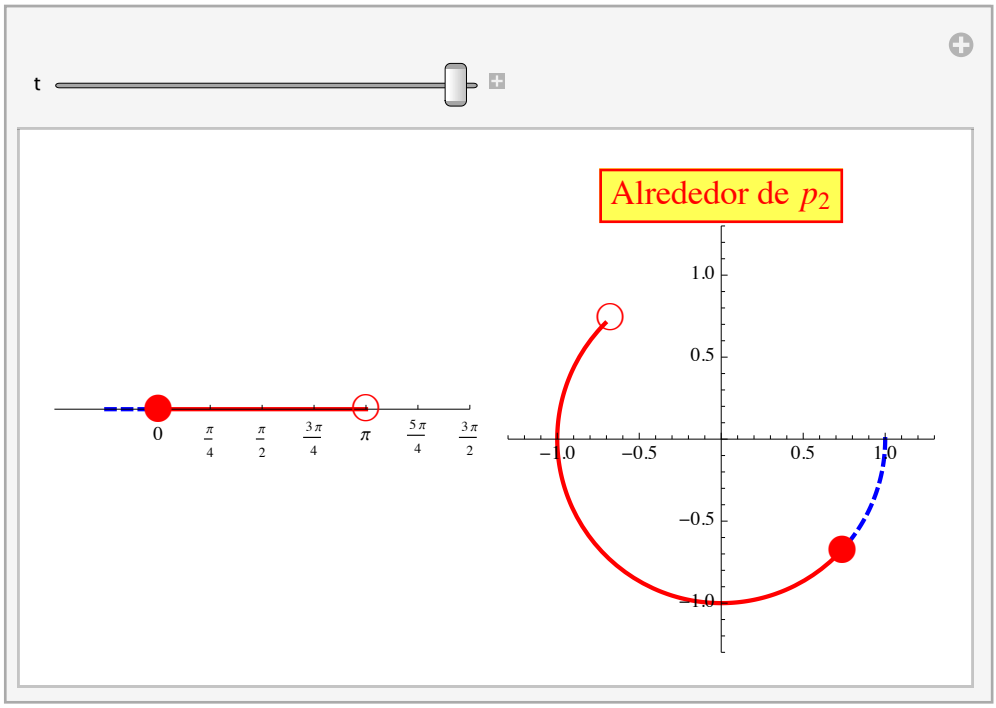

t
Alrededor de p_1
$-\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{4}$
0
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$
π
$\frac{5\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{2}$
1.0
0.5
−0.5
−1.0
−1.0
−0.5
0.5
1.0

Representación paramétrica de B en el punto p_2 del borde y significado geométrico del parámetro

```
In[123]:= Manipulate[ Grid[{{If[amin ≤ 0,
          ParametricPlot[{t, 0},
           {t, -π / 4, Min[0, amin]}, Axes → {True, False},
           PlotStyle → {Dashing[0.02], Blue, Thick},
           PlotRange → {{-π / 2, 3 π / 2}, {-1.3, 1.3}},
           Ticks → {{0, π / 4, π / 2, 3 π / 4, π, 5 π / 4, 3 π / 2,
              7 π / 4, 2 π}, None}, ImageSize → 400],
          Show[{ParametricPlot[{t, 0}, {t, -π / 4,
              Min[0, amin]}, Axes → {True, False},
             PlotStyle → {Dashing[0.02], Blue, Thick},
             PlotRange → {{-π / 2, 3 π / 2}, {-1.3, 1.3}},
             Ticks → {{0, π / 4, π / 2, 3 π / 4, π,
                5 π / 4, 3 π / 2, 7 π / 4, 2 π}, None},
             Epilog → {Inset[Style["●", 20, Red], {0, 0}],
               If[π ≤ amin, Inset[Style["○", 20, Red],
                 {π, 0}], {}]}, ImageSize → 200],
            ParametricPlot[{t, 0}, {t, 0, amin}, Axes →
              {True, False}, PlotStyle → {Red, Thick},
             PlotRange → {{-π / 2, 3 π / 2}, {-1.3, 1.3}},
             Ticks → {{0, π / 4, π / 2, 3 π / 4, π,
                5 π / 4, 3 π / 2, 7 π / 4, 2 π}, None},
             Epilog → {Inset[Style["●", 20, Red], {0, 0}],
               If[π ≤ amin, Inset[Style["○", 20, Red],
                 {π, 0}], {}]}, ImageSize → 200]}]],
         If[amin ≤ 0,
          ParametricPlot[{Cos[-s + 7 π / 4],
            Sin[-s + 7 π / 4]}, {s, -π / 4, Min[0, amin]},
           PlotStyle → {Dashing[0.02], Blue, Thick},
           PlotLabel -> Style[Framed["Alrededor de p₂"],
             16, Red, Background → Lighter[Yellow]],
           PlotRange → {{-1.3, 1.3}, {-1.3, 1.3}},
           ImageSize → 400],
          Show[{
            ParametricPlot[{Cos[-s + 7 π / 4],
              Sin[-s + 7 π / 4]}, {s, -π / 4, 0},
             PlotStyle → {Dashing[0.02], Blue, Thick},
             PlotLabel ->
```

```
          Style[Framed["Alrededor de p2"], 16,
           Red, Background → Lighter[Yellow]],
         PlotRange → {{-1.3, 1.3}, {-1.3, 1.3}},
         Epilog →
          {If[0 ≤ amin, Inset[Style["●", 20, Red],
             Evaluate[{Cos[0 + 7 π / 4], Sin[
                  0 + 7 π / 4]} + 0.03]], {}],
           If[π ≤ amin, Inset[Style["○", 20, Red],
             Evaluate[{Cos[π + 7 π / 4], Sin[
                  π + 7 π / 4]} + 0.03]], {}]},
         ImageSize → 200],
        ParametricPlot[{Cos[-s + 7 π / 4],
          Sin[-s + 7 π / 4]}, {s, 0, amin},
         PlotStyle → {Red, Thick},
         PlotLabel ->
          Style[Framed["Alrededor de p2"], 16,
           Red, Background → Lighter[Yellow]],
         PlotRange → {{-1.3, 1.3}, {-1.3, 1.3}},
         Epilog →
          {If[0 ≤ amin, Inset[Style["●", 20, Red],
             Evaluate[{Cos[0 + 7 π / 4], Sin[
                  0 + 7 π / 4]} + 0.03]], {}],
           If[π ≤ amin, Inset[Style["○", 20, Red],
             Evaluate[{Cos[π + 7 π / 4], Sin[
                  π + 7 π / 4]} + 0.03]], {}]},
         ImageSize → 200]}]]}}],
{{amin, -π / 4 + 0.00001, "t"}, -π / 4 + 0.00001, π}]
```

Out[123]=


t
Alrededor de p_2
0
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$
π
$\frac{5\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{2}$
1.0
0.5
−0.5
−1.0
−1.0
−0.5
0.5
1.0

2.2 Variedades con pseudo-borde

» Dimensión 2 en $\mathbb{R}^3$

Ejemplo 2

Calcula una representación paramétrica de $B = \left\{(x, y, z) : x \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 4, \sqrt{2} \ \leq z \leq \sqrt{3}\right\}$ en cada punto y utiliza animaciones para entender el significado de los parámetros

» Puntos del Borde

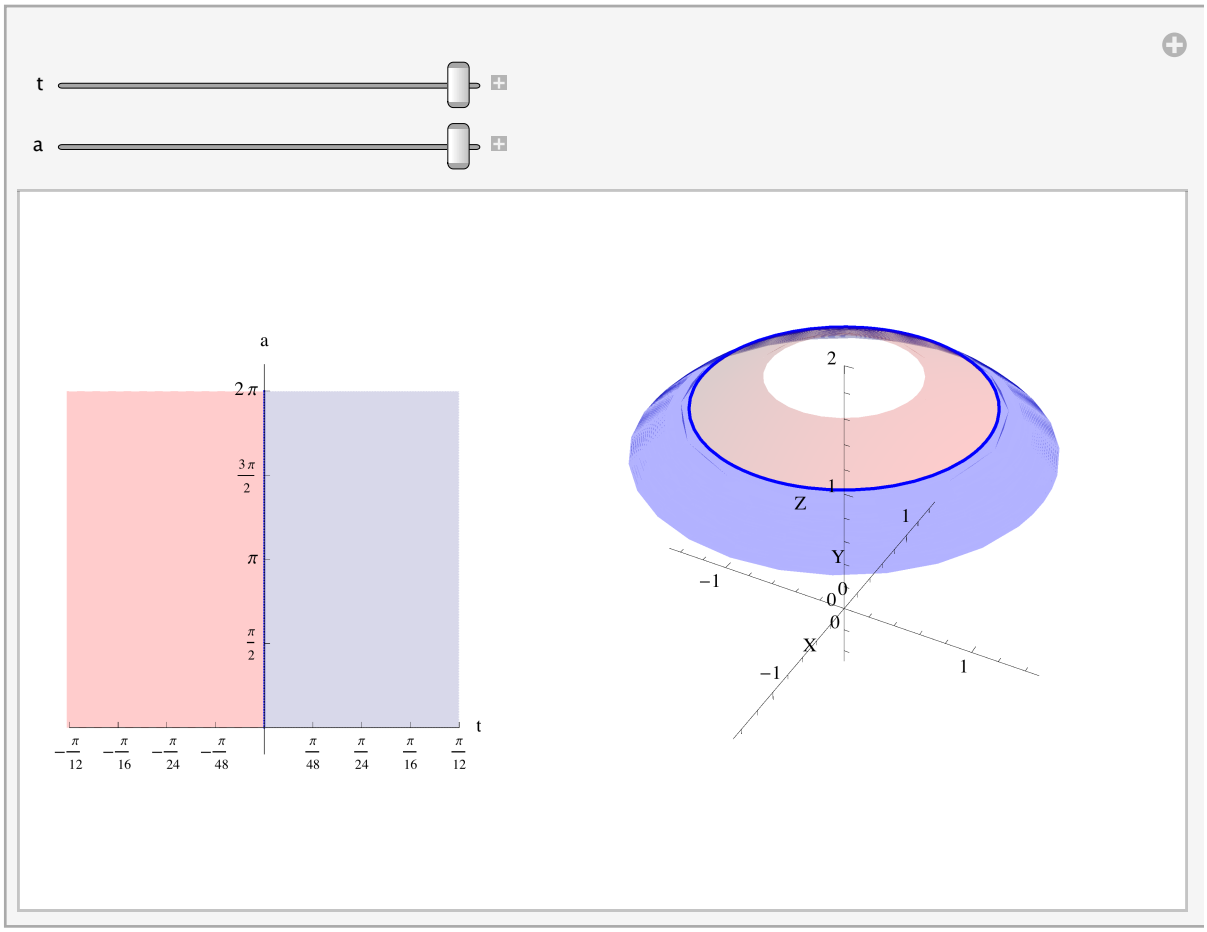
Representación paramétrica de B en un punto p_1 del borde C_1 y significado geométrico los parámetros

In[163]:=
```
Manipulate[Grid[{{
      If[t0 < 0,
       ParametricPlot[{{t, a}}, {a, 0, a0}, {t, -π / 12,
         t0}, BoundaryStyle → {Dashing[0.02], White},
        PlotStyle → {Red, Opacity[0.2]},
        Mesh → False, Frame → False, Axes → True,
        PlotRange → {{-π / 12, π / 12}, {-0.5, 2 π + 0.5}},
        Ticks → {Range[-π / 12, π / 12, π / 48],
          Range[0, 2 π, π / 2]}, AspectRatio → 1,
        AxesLabel → {"t", "a"}, ImageSize → 200],
       Show[{ParametricPlot[{{t, a}}, {a, 0, a0},
          {t, -0.5, 0}, BoundaryStyle → {Dashing[0.02],
            White}, PlotStyle → {Red, Opacity[0.2]},
          Mesh → False, Frame → False, Axes → True,
          PlotRange → {{-π / 12, π / 12},
            {-0.5, 2 π + 0.5}},
          Ticks → {Range[-π / 12, π / 12, π / 48],
            Range[0, 2 π, π / 2]}, AspectRatio → 1,
          AxesLabel → {"t", "a"}, ImageSize → 200],
         ParametricPlot[{{0, a}}, {a, 0, a0},
          PlotStyle → {Thickness[0.005], Blue},
```

```
      Axes → True, PlotRange →
       {{-π / 12, π / 12}, {-0.5, 2 π + 0.5}},
      Ticks → {Range[-π / 12, π / 12, π / 48],
        Range[0, 2 π, π / 2]}, AspectRatio → 1,
      AxesLabel → {"t", "a"}, ImageSize → 200],
     ParametricPlot[{{t, a}}, {a, 0, a0},
      {t, 0, t0}, BoundaryStyle →
       {Dashing[0.0001], White}, Mesh → False,
      Frame → False, Axes → True, PlotRange →
       {{-π / 12, π / 12}, {-0.5, 2 π + 0.5}},
      Ticks → {Range[-π / 12, π / 12, π / 48],
        Range[0, 2 π, π / 2]}, AspectRatio → 1,
      AxesLabel → {"t", "a"}, ImageSize → 300]}]],
 If[t0 < 0,
  ParametricPlot3D[{2 Cos[a] * Sin[t + π / 6],
     2 Sin[a] * Sin[t + π / 6], 2 Cos[t + π / 6]},
    {a, 0, a0}, {t, -π / 12, t0}, PlotRange →
     {{-1.5, 1.5}, {-1.5, 1.5}, {-0.5, 2}},
   Mesh → None, AxesLabel → {"X", "Y", "Z"},
   ImageSize → 200,
   PlotStyle → {Opacity[0.2], Red}, Boxed → False,
   Axes → True, AxesOrigin → {0, 0, 0}],
  Show[ParametricPlot3D[{2 Cos[a] * Sin[t + π / 6],
      2 Sin[a] * Sin[t + π / 6], 2 Cos[t + π / 6]},
     {a, 0, a0}, {t, 0, t0}, PlotRange →
      {{-1.5, 1.5}, {-1.5, 1.5}, {-0.5, 2}},
     Mesh → None, AxesLabel → {"X", "Y", "Z"},
     ImageSize → 300, PlotStyle →
      {Blue, Opacity[0.3]}, Boxed → False,
     Axes → True, AxesOrigin → {0, 0, 0}],
   ParametricPlot3D[{2 Cos[a] * Sin[0 + π / 6],
      2 Sin[a] * Sin[0 + π / 6], 2 Cos[0 + π / 6]},
     {a, 0, a0}, PlotRange → {{-1.5, 1.5},
       {-1.5, 1.5}, {-0.5, 2}}, Mesh → None,
     AxesLabel → {"X", "Y", "Z"}, ImageSize → 200,
     PlotStyle → {Thickness[0.005], Blue},
     Boxed → False, Axes → True,
     AxesOrigin → {0, 0, 0}],
   ParametricPlot3D[{2 Cos[a] * Sin[t + π / 6],
```

```
        2 Sin[a] * Sin[t + π / 6], 2 Cos[t + π / 6]},
       {a, 0, a0}, {t, -π / 12, 0}, PlotRange →
        {{-1.5, 1.5}, {-1.5, 1.5}, {-0.5, 2}},
       Mesh → None, AxesLabel → {"X", "Y", "Z"},
       ImageSize → 200,
       PlotStyle → {Opacity[0.2], Red}, Boxed → False,
       Axes → True, AxesOrigin → {0, 0, 0}]
    ]]}}],
{{t0, π / 12, "t"}, -π / 12 + 0.00001, π / 12},
{{a0, 2 π, "a"}, 0.00001, 2 π}]
```

Out[163]=



2.3 Vector que apunta hacia fuera y orientación inducida en el borde

» Dimensión 2 en $\mathbb{R}^3$

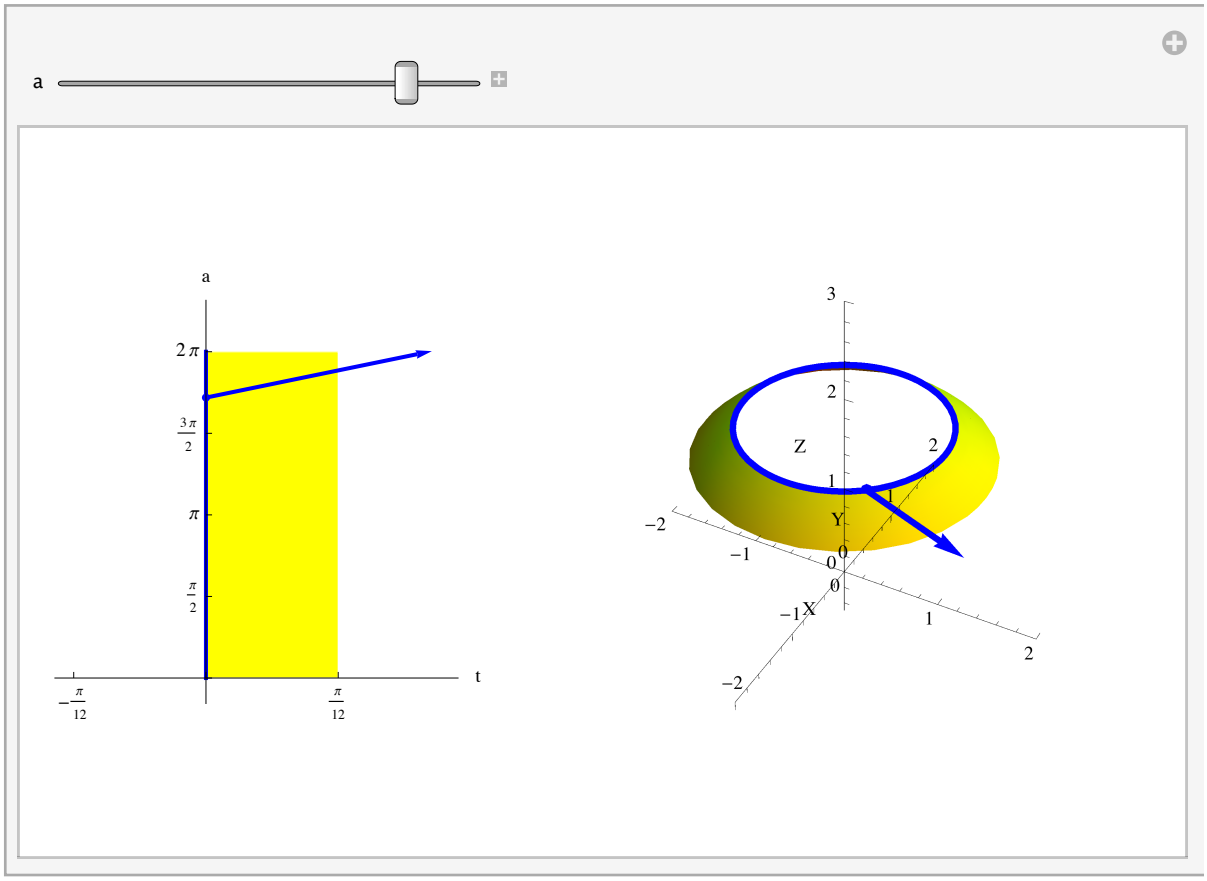
Rutinas 2.1 : Visualización del concepto de vector que apunta hacia fuera

In[127]:=
```
vectorhaciadentro = Manipulate[vector = {1 / 2, 1};
  ϕ2[u_, v_] := {2 Cos[v] * Sin[u + π / 6],
    2 Sin[v] * Sin[u + π / 6], 2 Cos[u + π / 6]};
  jacobiana := D[ϕ2[u, v], {{u, v}}];
  Grid[{{
     Show[{ParametricPlot[
        {{t, a}}, {a, 0, 2 π}, {t, 0, π / 12},
        BoundaryStyle → {Dashing[0.0001], White},
        PlotStyle → {Directive[Yellow, Opacity[1]]},
        Mesh → False, Frame → False, Axes → True,
        PlotRange → {{-.3, 0.5}, {-0.5, 2 π + 1}},
        Ticks → {Range[-π / 12, π / 12, π / 12],
          Range[0, 2 π, π / 2]}, AspectRatio → 1,
        AxesLabel → {"t", "a"}, ImageSize → 200],
       ParametricPlot[{{0, a}}, {a, 0, 2 π}, Axes →
         True, PlotStyle → {Thickness[0.01], Blue},
        PlotRange → {{-π / 12, π / 12}, {-0.5, 2 π + 1}},
        Ticks → {Range[-π / 12, π / 12, π / 12],
          Range[0, 2 π, π / 2]}, AspectRatio → 1,
        AxesLabel → {"t", "a"}, ImageSize → 200],
       Graphics[{Blue, PointSize[0.02],
         Point[{0, a0}]}],
       Graphics[{Blue, Thickness[0.01], Arrow[
           {{0, a0}, {0, a0} + Normalize[vector]}]}]
      }],

     Show[
      ParametricPlot3D[{2 Cos[a] * Sin[t + π / 6],
        2 Sin[a] * Sin[t + π / 6], 2 Cos[t + π / 6]},
       {a, 0, 2 π}, {t, 0, π / 12}, PlotRange →
        {{-2, 2}, {-2, 2}, {-0.5, 3}}, Mesh → None,
```

```
      AxesLabel → {"X", "Y", "Z"}, ImageSize → 300,
      PlotStyle → {Directive[Yellow, Opacity[1]]},
      Boxed → False, Axes → True,
      AxesOrigin → {0, 0, 0}],
     ParametricPlot3D[{2 Cos[a] * Sin[0 + π / 6],
       2 Sin[a] * Sin[0 + π / 6], 2 Cos[0 + π / 6]},
      {a, 0, 2 π}, PlotRange →
       {{-2, 2}, {-2, 2}, {-0.5, 3}}, Mesh → None,
      AxesLabel → {"X", "Y", "Z"}, ImageSize → 200,
      PlotStyle → {Thickness[0.01], Blue},
      Boxed → False, Axes → True,
      AxesOrigin → {0, 0, 0}],
     Graphics3D[{Blue, PointSize[0.02],
       Point[Evaluate[ϕ2[0, a0]]]}],
     Graphics3D[{Blue, Thickness[0.01],
       Arrow[{ϕ2[0, a0], ϕ2[0, a0] +
          Normalize[Evaluate[(jacobiana.vector) /.
             {u → 0, v → a0}]]}]}]
    ]}}],
{{a0, 5.4, "a"}, 0.00001, 2 π}]
```

Out[127]=



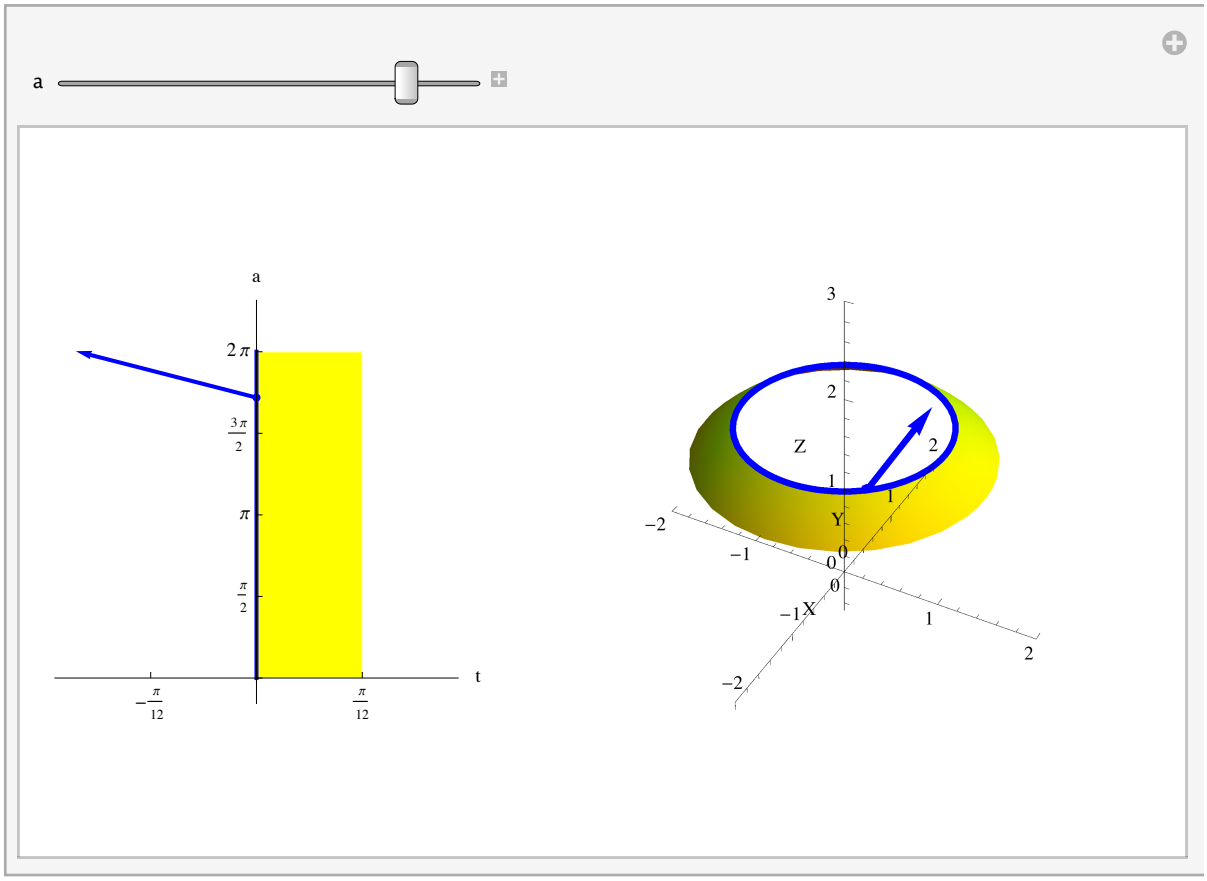
In[128]:=

```
vectorhaciafuera = Manipulate[vector = {-1 / 2, 1};
  ϕ2[u_, v_] := {2 Cos[v] * Sin[u + π / 6],
    2 Sin[v] * Sin[u + π / 6], 2 Cos[u + π / 6]};
  jacobiana := D[ϕ2[u, v], {{u, v}}];
  Grid[{{
     Show[{ParametricPlot[
         {{t, a}}, {a, 0, 2 π}, {t, 0, π / 12},
         BoundaryStyle → {Dashing[0.0001], White},
         PlotStyle → {Directive[Yellow, Opacity[1]]},
         Mesh → False, Frame → False, Axes → True,
         PlotRange → {{-.5, 0.5}, {-0.5, 2 π + 1}},
         Ticks → {Range[-π / 12, π / 12, π / 12],
           Range[0, 2 π, π / 2]}, AspectRatio → 1,
         AxesLabel → {"t", "a"}, ImageSize → 200],
        ParametricPlot[{{0, a}}, {a, 0, 2 π}, Axes →
          True, PlotStyle → {Thickness[0.01], Blue},
         PlotRange → {{-π / 12, π / 12}, {-0.5, 2 π + 1}},
         Ticks → {Range[-π / 12, π / 12, π / 12],
           Range[0, 2 π, π / 2]}, AspectRatio → 1,
```

```
        AxesLabel → {"t", "a"}, ImageSize → 200],
       Graphics[{Blue, PointSize[0.02],
         Point[{0, a0}]}],
       Graphics[{Blue, Thickness[0.01], Arrow[
           {{0, a0}, {0, a0} + Normalize[vector]}]}]
      }],

     Show[
      ParametricPlot3D[{2 Cos[a] * Sin[t + π / 6],
        2 Sin[a] * Sin[t + π / 6], 2 Cos[t + π / 6]},
       {a, 0, 2 π}, {t, 0, π / 12}, PlotRange →
        {{-2, 2}, {-2, 2}, {-0.5, 3}}, Mesh → None,
       AxesLabel → {"X", "Y", "Z"}, ImageSize → 300,
       PlotStyle → {Directive[Yellow, Opacity[1]]},
       Boxed → False, Axes → True,
       AxesOrigin → {0, 0, 0}],
      ParametricPlot3D[{2 Cos[a] * Sin[0 + π / 6],
        2 Sin[a] * Sin[0 + π / 6], 2 Cos[0 + π / 6]},
       {a, 0, 2 π}, PlotRange →
        {{-2, 2}, {-2, 2}, {-0.5, 3}}, Mesh → None,
       AxesLabel → {"X", "Y", "Z"}, ImageSize → 300,
       PlotStyle → {Thickness[0.01], Blue},
       Boxed → False, Axes → True,
       AxesOrigin → {0, 0, 0}],
      Graphics3D[{Blue, PointSize[0.02],
        Point[Evaluate[ϕ2[0, a0]]]}],
      Graphics3D[{Blue, Thickness[0.01],
        Arrow[{ϕ2[0, a0], ϕ2[0, a0] +
           Normalize[Evaluate[(jacobiana.vector) /.
              {u → 0, v → a0}]]}]}]
     ]}}],
  {{a0, 5.4, "a"}, 0.00001, 2 π}]
```

Out[128]=



Rutinas 2.2 : Visualización del concepto de orientación inducida

» Dimensión 2 en $\mathbb{R}^3$

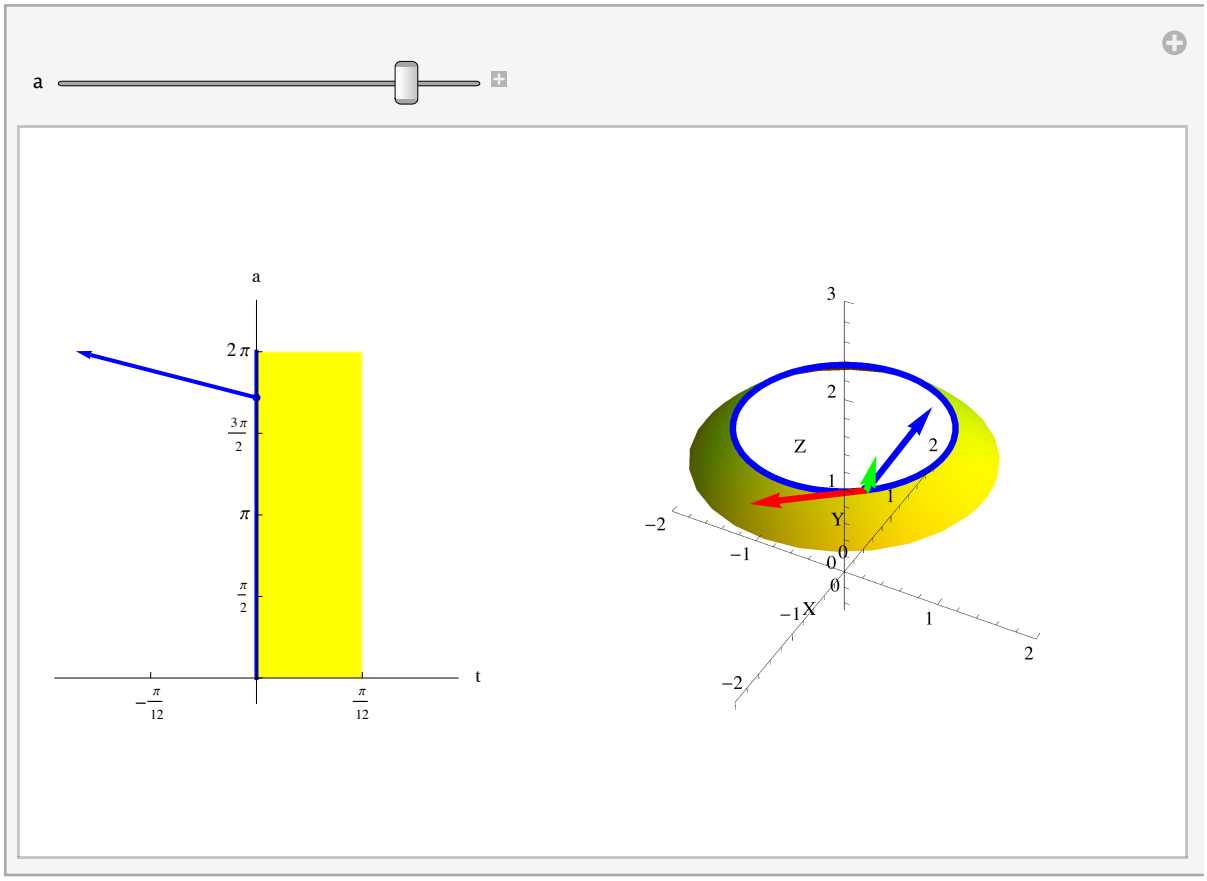
In[130]:=

```
vectorhaciafueracontg =
 Manipulate[vector = {-1 / 2, 1};
  ϕ2[u_, v_] := {2 Cos[v] * Sin[u + π / 6],
    2 Sin[v] * Sin[u + π / 6], 2 Cos[u + π / 6]};
  jacobiana := D[ϕ2[u, v], {{u, v}}];
  Grid[{{
     Show[{ParametricPlot[
         {{t, a}}, {a, 0, 2 π}, {t, 0, π / 12},
         BoundaryStyle → {Dashing[0.0001], White},
         PlotStyle → {Directive[Yellow, Opacity[1]]},
         Mesh → False, Frame → False, Axes → True,
         PlotRange → {{-.5, 0.5}, {-0.5, 2 π + 1}},
         Ticks → {Range[-π / 12, π / 12, π / 12],
           Range[0, 2 π, π / 2]}, AspectRatio → 1,
         AxesLabel → {"t", "a"}, ImageSize → 200],
        ParametricPlot[{{0, a}}, {a, 0, 2 π}, Axes →
          True, PlotStyle → {Thickness[0.01], Blue},
         PlotRange → {{-π / 12, π / 12}, {-0.5, 2 π + 1}},
         Ticks → {Range[-π / 12, π / 12, π / 12],
           Range[0, 2 π, π / 2]}, AspectRatio → 1,
         AxesLabel → {"t", "a"}, ImageSize → 200],
        Graphics[{Blue, PointSize[0.02],
          Point[{0, a0}]}],
        Graphics[{Blue, Thickness[0.01], Arrow[
            {{0, a0}, {0, a0} + Normalize[vector]}]}]
       }],

     Show[
      ParametricPlot3D[{2 Cos[a] * Sin[t + π / 6],
        2 Sin[a] * Sin[t + π / 6], 2 Cos[t + π / 6]},
       {a, 0, 2 π}, {t, 0, π / 12}, PlotRange →
        {{-2, 2}, {-2, 2}, {-0.5, 3}}, Mesh → None,
```

```
      AxesLabel → {"X", "Y", "Z"}, ImageSize → 300,
      PlotStyle → {Directive[Yellow, Opacity[1]]},
      Boxed → False, Axes → True,
      AxesOrigin → {0, 0, 0}],
     ParametricPlot3D[{2 Cos[a] * Sin[0 + π / 6],
       2 Sin[a] * Sin[0 + π / 6], 2 Cos[0 + π / 6]},
      {a, 0, 2 π}, PlotRange →
       {{-2, 2}, {-2, 2}, {-0.5, 3}}, Mesh → None,
      AxesLabel → {"X", "Y", "Z"}, ImageSize → 200,
      PlotStyle → {Thickness[0.01], Blue},
      Boxed → False, Axes → True,
      AxesOrigin → {0, 0, 0}],
     Graphics3D[{Blue, PointSize[0.02],
       Point[Evaluate[ϕ2[0, a0]]]}],
     Graphics3D[{Blue, Thickness[0.01],
       Arrow[{ϕ2[0, a0], ϕ2[0, a0] +
          Normalize[Evaluate[(jacobiana.vector) /.
             {u → 0, v → a0}]]}]}],
     Graphics3D[{Red, Thickness[0.01],
       Arrow[{ϕ2[0, a0], ϕ2[0, a0] +
          Normalize[Evaluate[(jacobiana.{0, -1}) /.
             {u → 0, v → a0}]]}]}],
     Graphics3D[{Green, Thickness[0.01],
       Arrow[{ϕ2[0, a0], ϕ2[0, a0] + Cross[
           Normalize[Evaluate[(jacobiana.
                vector) /. {u → 0, v → a0}]],
           Normalize[Evaluate[(jacobiana.
                {0, -1}) /. {u → 0, v → a0}]]]}]}]
    ]}}],
  {{a0, 5.4, "a"}, 0.00001, 2 π}]
```

Out[130]=



Medida e integración en variedades

Objetivos

» Visualizar el concepto medida de paralelepípedos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Interpretación geométrica del producto mixto.
» Comprender el concepto de medida local en variedades.
» Rutinas para la evaluación de integrales de linea: interpretación geométrica.
» Teoremas clásicos del Análisis Vectorial: Aplicaciones

3.1 Medida en subespacios

Se establece un concepto de medida adecuada sobre los subespacios de un espacio vectorial para llegar de forma natural al concepto de medida de paralelepípedo y su relación con del producto exterior de los vectores que lo dirigen.
La siguiente rutina muestra la interpretación geométrica del producto mixto de tres vectores en el espacio.

In[205]:=

```
ejes = Graphics3D[{Line[{{-10, 0, 0}, {10, 0, 0}}],
    Line[{{0, -10, 0}, {0, 10, 0}}],
    Line[{{0, 0, -10}, {0, 0, 10}}],
    Text[Style[x, Bold, 24], {10.5, 0, 0}],
    Text[Style[y, Bold, 24], {0, 10.75, 0}],
    Text[Style[z, Bold, 24], {0, 0, 10.75}]}
  ];
mixto[x1_, y1_, z1_, x2_, y2_, z2_, x3_, y3_, z3_] :=
  N[Det[{{x1, y1, z1}, {x2, y2, z2}, {x3, y3, z3}}]];
Clear[v]
ϵ = .2;
v[c_, x_, y_, z_] := Graphics3D[{c, Thickness[.01],
    Line[{{0, 0, 0}, {(1 - ϵ) x, (1 - ϵ) y, (1 - ϵ) z}}],
    EdgeForm[], Table[Cylinder[
       {{(1 - ϵ) x, (1 - ϵ) y, (1 - ϵ) z}, { (1 - n ϵ) x,
          (1 - n ϵ) y,  (1 - n ϵ) z}}, n ϵ],
     {n, 0, .98, .02}]}];

graficamixto = Manipulate[If[aux,
   Column[{
     Row@{Text[Style[" [ ", 20, Bold]],
       Text[Style[{ Round[x1, .01], Round[y1, .01],
          Round[z1, .01]}, 18, Red, Bold]],
        Text[Style[" , ", 20, Bold]],
       Text[Style[{ Round[x2, .01], Round[y2, .01],
          Round[z2, .01]}, 18, Blue, Bold]],
        Text[Style[" , ", 20, Bold]],
       Text[Style[{ Round[x3, .01], Round[y3, .01],
```

```
        Round[z3, .01]}, 18, Green, Bold]],
    Text[Style[" ] ", 20, Bold]],
    Text[Style[" = ", 20, Bold]],
    Text[Style[mixto[x1, y1, z1, x2, y2,
        z2, x3, y3, z3], 18, Black, Bold]]},


Grid[{{Show[ejes, v[Blue, x1, y1, z1],
    v[Red, x2, y2, z2], v[Black, x3, y3, z3],
    Graphics3D[{Opacity[.5], Green,
      Polygon[{{0, 0, 0}, {x1, y1, z1}, {x2 + x1,
          y2 + y1, z2 + z1}, {x2, y2, z2}}]}],
    Graphics3D[{Opacity[.5], Green,
      Polygon[{{0, 0, 0}, {x2, y2, z2}, {x2 + x3,
          y2 + y3, z2 + z3}, {x3, y3, z3}}]}],
    Graphics3D[{Opacity[.5], Green,
      Polygon[{{0, 0, 0}, {x1, y1, z1}, {x3 + x1,
          y3 + y1, z3 + z1}, {x3, y3, z3}}]}],
    Graphics3D[{Opacity[.5], Green, Polygon[
        {{x1 + x2, y1 + y2, z1 + z2}, {x2 + x1 + x3,
          y2 + y1 + y3, z2 + z1 + z3}, {x2 + x3,
          y2 + y3, z2 + z3}, {x2, y2, z2}}]}],
    Graphics3D[{Opacity[.5], Green, Polygon[
        {{x1 + x3, y1 + y3, z1 + z3}, {x2 + x1 + x3,
          y2 + y1 + y3, z2 + z1 + z3}, {x2 + x3,
          y2 + y3, z2 + z3}, {x3, y3, z3}}]}],
    Graphics3D[{Opacity[.5], Green, Polygon[
        {{x1 + x3, y1 + y3, z1 + z3}, {x2 + x1 + x3,
          y2 + y1 + y3, z2 + z1 + z3}, {x2 + x1,
          y2 + y1, z2 + z1}, {x1, y1, z1}}]}],
    Graphics3D[{Blue, Thickness[.005],
      Dashed, Line[{{x2, y2, z2},
         {x2 + x1, y2 + y1, z2 + z1}}]}],
    Graphics3D[{Red, Thickness[.005],
      Dashed, Line[{{x1, y1, z1},
         {x2 + x1, y2 + y1, z2 + z1}}]}],
    Graphics3D[{Black, Thickness[.005],
      Dashed, Line[{{x1, y1, z1},
         {x3 + x1, y3 + y1, z3 + z1}}]}],
```

```
        Graphics3D[{Blue, Thickness[.005],
          Dashed, Line[{{x3, y3, z3},
            {x3 + x1, y3 + y1, z3 + z1}}]}],
        Graphics3D[{Red, Thickness[.005],
          Dashed, Line[{{x3, y3, z3},
            {x3 + x2, y3 + y2, z3 + z2}}]}],
        Graphics3D[{Black, Thickness[.005],
          Dashed, Line[{{x2, y2, z2},
            {x3 + x2, y3 + y2, z3 + z2}}]}],
        Graphics3D[{Blue, Thickness[.005], Dashed,
          Line[{{x2 + x3, y2 + y3, z2 + z3}, {x3 + x1 +
               x2, y3 + y1 + y2, z3 + z1 + z2}}]}],
        Graphics3D[{Black, Thickness[.005], Dashed,
          Line[{{x1 + x2, y1 + y2, z1 + z2}, {x3 + x1 +
               x2, y3 + y1 + y2, z3 + z1 + z2}}]}],
        Graphics3D[{Red, Thickness[.005], Dashed,
          Line[{{x1 + x2 + x3, y1 + y2 + y3, z1 + z2 + z3},
            {x3 + x1, y3 + y1, z3 + z1}}]}],
        ImageSize → 500, PlotRange →
         {{-25, 25}, {-25, 25}, {-25, 25}}
       ]},
      {Framed[Text@Grid[{
           {"Volumen paralelepípedo = ",
            NumberForm[Abs[mixto[x1, y1, z1, x2,
                y2, z2, x3, y3, z3]], {5, 2}], "u^3"},
           {"(Valor absoluto del producto
              mixto de los vectores)"}


          }]]
      }}]},
  Alignment → Center],

 Column[{

   Row@{Text[Style[" [ ", 20, Bold]],
     Text[Style[{ Round[x1, .01], Round[y1, .01],
```

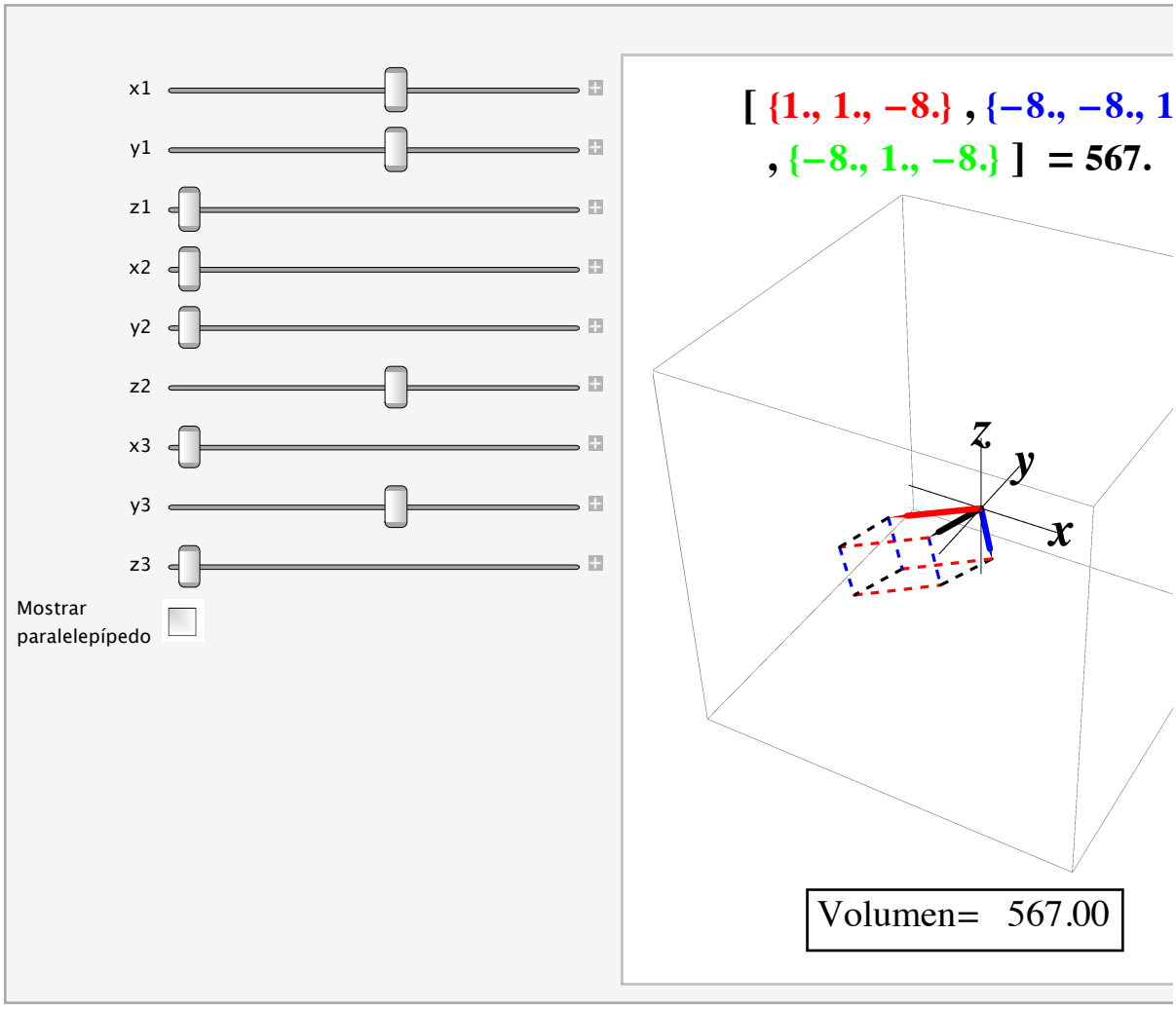
```
        Round[z1, .01]}, 18, Red, Bold]],
      Text[Style[" , ", 20, Bold]],
    Text[Style[{ Round[x2, .01], Round[y2, .01],
        Round[z2, .01]}, 18, Blue, Bold]],
     Text[Style[" , ", 20, Bold]],
    Text[Style[{ Round[x3, .01], Round[y3, .01],
        Round[z3, .01]}, 18, Green, Bold]],
    Text[Style[" ] ", 20, Bold]],
    Text[Style[" = ", 20, Bold]],
    Text[Style[mixto[x1, y1, z1, x2, y2,
        z2, x3, y3, z3], 18, Black, Bold]]},

  Grid[{{Show[ejes, v[Blue, x1, y1, z1],
      v[Red, x2, y2, z2], v[Black, x3, y3, z3],
      Graphics3D[{Blue, Thickness[.005],
        Dashed, Line[{{x2, y2, z2},
          {x2 + x1, y2 + y1, z2 + z1}}]}],
      Graphics3D[{Red, Thickness[.005],
        Dashed, Line[{{x1, y1, z1},
          {x2 + x1, y2 + y1, z2 + z1}}]}],
      Graphics3D[{Black, Thickness[.005],
        Dashed, Line[{{x1, y1, z1},
          {x3 + x1, y3 + y1, z3 + z1}}]}],
      Graphics3D[{Blue, Thickness[.005],
        Dashed, Line[{{x3, y3, z3},
          {x3 + x1, y3 + y1, z3 + z1}}]}],
      Graphics3D[{Red, Thickness[.005],
        Dashed, Line[{{x3, y3, z3},
          {x3 + x2, y3 + y2, z3 + z2}}]}],
      Graphics3D[{Black, Thickness[.005],
        Dashed, Line[{{x2, y2, z2},
          {x3 + x2, y3 + y2, z3 + z2}}]}],
      Graphics3D[{Blue, Thickness[.005], Dashed,
        Line[{{x2 + x3, y2 + y3, z2 + z3}, {x3 + x1 +
            x2, y3 + y1 + y2, z3 + z1 + z2}}]}],
      Graphics3D[{Black, Thickness[.005], Dashed,
        Line[{{x1 + x2, y1 + y2, z1 + z2}, {x3 + x1 +
            x2, y3 + y1 + y2, z3 + z1 + z2}}]}],
      Graphics3D[{Red, Thickness[.005], Dashed,
```

```
            Line[{{x1 + x2 + x3, y1 + y2 + y3, z1 + z2 + z3},
              {x3 + x1, y3 + y1, z3 + z1}}]}],
          ImageSize → 300, PlotRange →
           {{-25, 25}, {-25, 25}, {-25, 25}}
         ]},
        {Framed[Text@Grid[{
             {"Volumen=", NumberForm[Abs[mixto[x1, y1,
                 z1, x2, y2, z2, x3, y3, z3]], {5, 2}]}


            }]]
        }}]},
    Alignment → Center]
  ], {{x1, 1}, -8, 8}, {{y1, 1}, -8, 8},
  {z1, -8, 8}, {x2, -8, 8}, {y2, -8, 8},
  {{z2, 1}, -8, 8}, {x3, -8, 8}, {{y3, 1}, -8, 8},
  {z3, -8, 8}, {{aux, False, Column[
     {"Mostrar", "paralelepípedo"}]}, {True, False}}
]
```

Out[210]=


x1
y1
z1
x2
y2
z2
x3
y3
z3
Mostrar paralelepípedo
[{1., 1., −8.} , {−8., −8., 1
, {−8., 1., −8.}] = 567.
z
y
x
Volumen= 567.00

3.1 Medida en variedades diferenciables

Al concepto de medida (local) en una variedad puede llegarse de forma heurística por aproximaciones de medida de paralelepípedos construidos sobre cada espacio tangente.

Rutinas 3.1 : Interpretación geométrica del concepto de medida local en una variedad

```
In[90]:= areas3 = Manipulate[vector = {1, 1};
    ϕ2[u_, v_] :=
     {2 Cos[v] * Sin[u], 2 Sin[v] * Sin[u], 2 Cos[u]};
    jacobiana = D[ϕ2[u, v], {{u, v}}];
    Grid[{{
       Show[{ParametricPlot[
           {{t, a}}, {a, 0, 2 π}, {t, 0, π / 2},
           BoundaryStyle → {Dashing[0.02], White},
           PlotStyle → {Directive[Yellow, Opacity[1]]},
           Mesh → False, Frame → False, Axes → True,
           PlotRange → {{-1, π + 1}, {-0.5, 2 π + 1}},
           Ticks → {Range[0, π, π / 4],
             Range[0, 2 π, π / 2]}, AspectRatio → 1,
           AxesLabel → {"t", "a"}, ImageSize → 200],
          ParametricPlot[pt + λ * {h1, 0} + μ * {0, h2},
           {λ, 0, 1}, {μ, 0, 1}, Mesh → None, PlotStyle →
            {Directive[Blue, Opacity[1]]}], Graphics[
           {Black, PointSize[0.02], Point[pt]}],
          Graphics[{Black, Arrow[{{pt[[1]], pt[[2]]},
              {pt[[1]], pt[[2]]} + {h1, 0}}]}],
          Graphics[{Black, Arrow[{{pt[[1]], pt[[2]]},
              {pt[[1]], pt[[2]]} + {0, h2}}]}]

         }],

       Show[ParametricPlot3D[
          {2 Cos[a] * Sin[t], 2 Sin[a] * Sin[t], 2 Cos[t]},
          {a, 0, 2 π}, {t, 0, π}, PlotRange →
           {{-2, 2}, {-2, 2}, {-0.5, 3}}, Mesh → None,
```

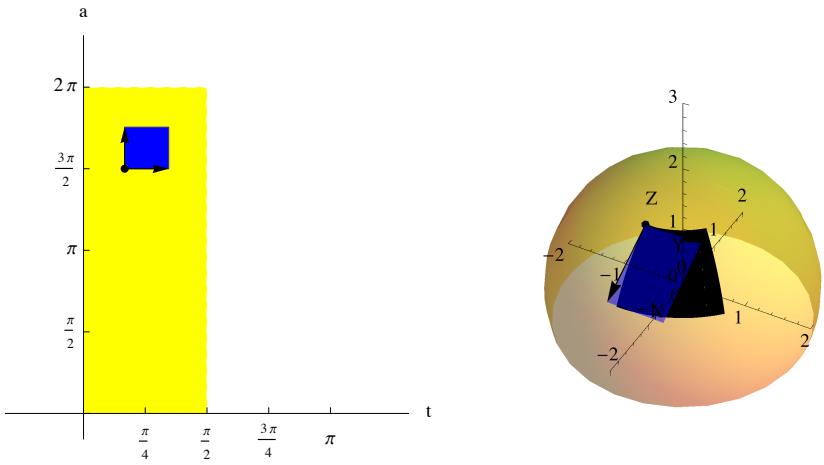
```
        AxesLabel → {"X", "Y", "Z"}, ImageSize → 200,
        PlotStyle → {Directive[Yellow, Opacity[0.5]]},
        Boxed → False, Axes → True,
        AxesOrigin → {0, 0, 0}],
      ParametricPlot3D[Evaluate[
        ϕ2[pt[[1]], pt[[2]]] +
         λ * ((jacobiana.{h1, 0}) /. {u → pt[[1]], v →
               pt[[2]]}) + μ * ((jacobiana.{0, h2}) /.
             {u → pt[[1]], v → pt[[2]]})] ,
        {λ, 0, 1}, {μ, 0, 1}, Mesh → None,
        PlotStyle → {Directive[Blue, Opacity[0.5]]}],
      ParametricPlot3D[Evaluate[ϕ2[pt[[1]] + λ * h1,
         pt[[2]] + μ * h2] ], {λ, 0, 1}, {μ, 0, 1},
        Mesh → None, PlotStyle → {Black, Opacity[1]}],
      Graphics3D[{Black, PointSize[0.02],
        Point[Evaluate[ϕ2[pt[[1]], pt[[2]]]]]}],
      Graphics3D[{Black, Arrow[{ϕ2[pt[[1]],
             pt[[2]]], ϕ2[pt[[1]], pt[[2]]] +
             Evaluate[(jacobiana.{0, h2}) /.
               {u → pt[[1]], v → pt[[2]]}]}]}],
      Graphics3D[{Black, Arrow[{ϕ2[pt[[1]],
             pt[[2]]], ϕ2[pt[[1]], pt[[2]]] +
             Evaluate[(jacobiana.{h1, 0}) /.
               {u → pt[[1]], v → pt[[2]]}]}]}]
    ]}}],
  {{h1, 0.56}, 0.1, 1},
  {{h2, 0.8}, 0.1, 1}, Delimiter,
  Style["Posición incial", 12, Bold],
  {{pt, {π / 6, 3 π / 2}, ""}, {0, 0}, {π / 2, 2 π}}]
```

h1

h2

Posición incial

Out[90]=



3.2 Integración en variedades. Ejemplo: Integrales de linea

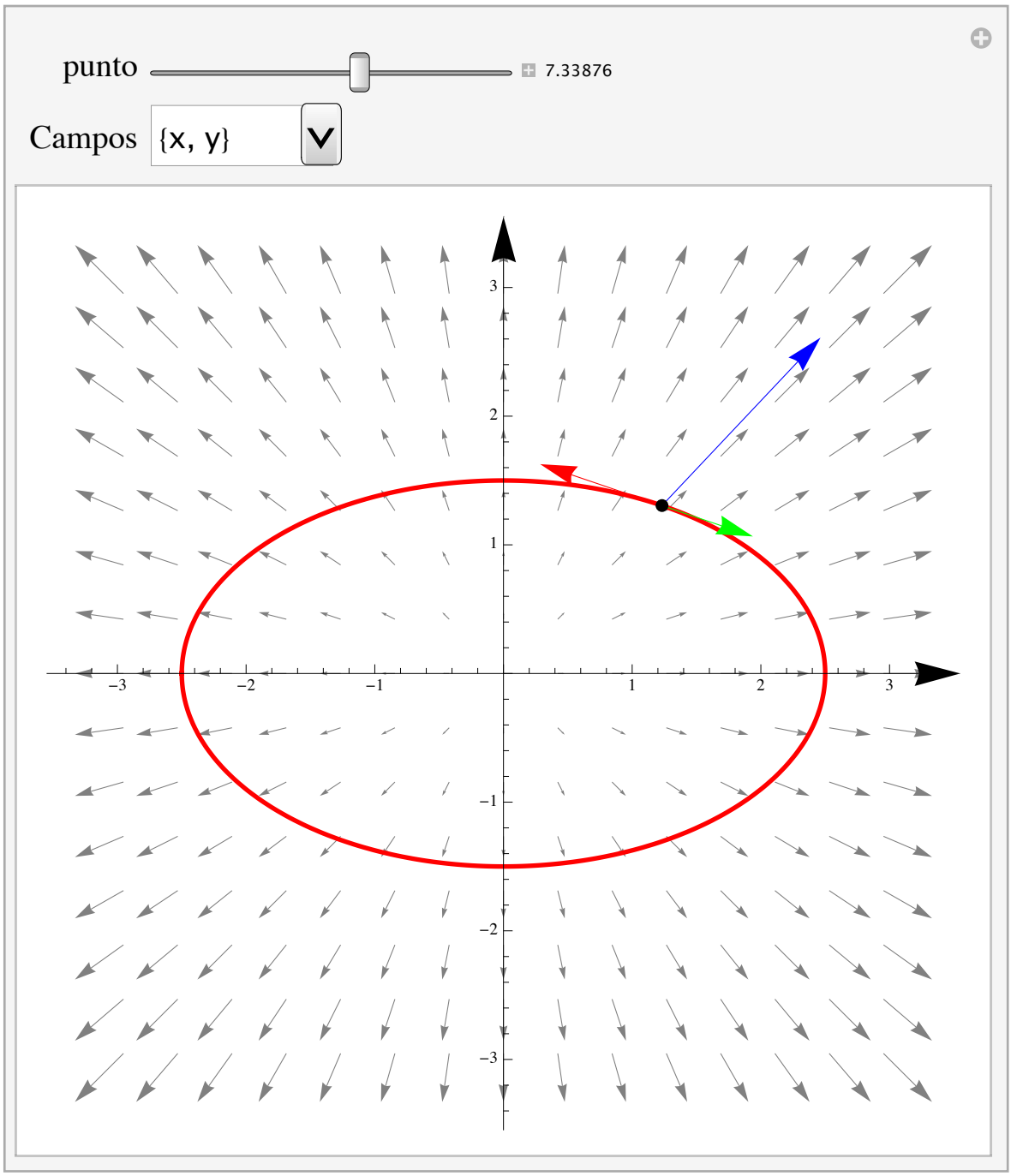
Rutinas 3.2 : Interpretación geométrica de integrales de linea en $\mathbb{R}^2$

In[160]:=
```
integrallinea = Manipulate[
  Show[
   VectorPlot[field @@ {x, y}, {x, -π, π}, {y, -π, π},
    VectorScale → {Small, Small, Automatic},
    VectorStyle → GrayLevel[0.5], Axes → True,
    AxesStyle → Arrowheads[{0.0, 0.05}],
    Frame → False],
   ParametricPlot[param[t], {t, -π, π}, PlotStyle →
     {Thickness[.005], Red}, ImageSize → 500],
   Graphics[
    Dynamic[{
      pointVector = param[tpoint];
      fieldVector = field @@ param[tpoint];
      gradVector  = grad[tpoint];
      vAngle =
       VectorAngle[gradVector, fieldVector];

      {Blue, Arrow[
        {pointVector, pointVector + fieldVector}]},
      {Red, Arrow[{pointVector,
         pointVector + gradVector}]},
      {Green, Arrow[pointVector + # & /@
         {{0, 0}, Norm[fieldVector] *
           Cos[vAngle] * gradVector}]},
      {PointSize[Large], Point[pointVector]}
     }]
   ]
   , ImageSize → 500],
  {{tpoint, 7.1, Text[Style["punto", FontSize → 18]]},
   0, 4 π, Appearance → "Labeled"},
  {{field, {#1, #2} &,
    Text[Style["Campos", FontSize → 18]]},
   {{#1, #2} & → {x, y}, {#1 ^ 2, #2 ^ 2} & → {x ^ 2, y ^ 2},
```

```
    {#2^2, #1^2} & → {y^2, x^2},
    {1, #1 + #2} & → {1, x + y}, {-#2, #1} & → {-y, x}},
  PopupMenu}, Initialization :→
  (param[t_] := {2.5 Cos[t], 1.5 Sin[t]};
   grad[t_] = Evaluate[Normalize[D[param[t], t]]]),
 TrackedSymbols → All
]
```

Out[160]=



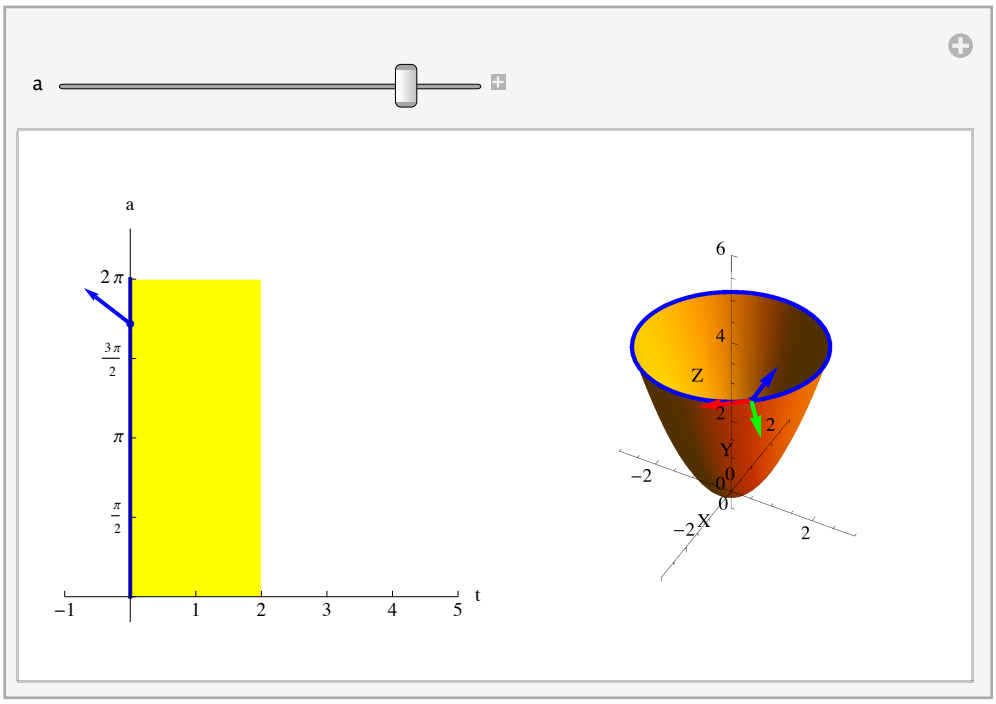
3.3 Aplicaciones de los teoremas clásicos del Análisis Vectorial: un ejemplo

In[94]:=
```
orientacion = Manipulate[vector = {-1, 1};
  ϕ3[u_, v_] :=
   {(2 - u) Cos[v], (2 - u) Sin[v], (2 - u) ^2};
  jacobiana := D[ϕ3[u, v], {{u, v}}];
  Grid[{{
     Show[
      {ParametricPlot[{{t, a}}, {a, 0, 2 π}, {t, 0, 2},
        BoundaryStyle → {Dashing[0.0001], White},
        PlotStyle → {Directive[Yellow, Opacity[1]]},
        Ticks → {Range[-1, 5, 1], Range[0, 2 π, π / 2]},
        Mesh → False, Frame → False, Axes → True,
        PlotRange → {{-1, 5}, {-0.5, 2 π + 1}},
        AspectRatio → 1, AxesLabel → {"t", "a"},
        ImageSize → 200], ParametricPlot[
        {{0, a}}, {a, 0, 2 π}, Axes → True,
        PlotStyle → {Thickness[0.01], Blue},
        PlotRange → {{-π / 12, π / 12}, {-0.5, 2 π + 1}},
        Ticks → {Range[-π / 12, π / 12, π / 12],
          Range[0, 2 π, π / 2]}, AspectRatio → 1,
        AxesLabel → {"t", "a"}, ImageSize → 200],
       Graphics[{Blue, PointSize[0.02],
         Point[{0, a0}]}],
       Graphics[{Blue, Thickness[0.01], Arrow[
           {{0, a0}, {0, a0} + Normalize[vector]}]}]
      }],

     Show[
      ParametricPlot3D[ϕ3[t, a],
       {a, 0, 2 π}, {t, 0, 2}, PlotRange →
        {{-3, 3}, {-3, 3}, {-0.5, 6}}, Mesh → None,
       AxesLabel → {"X", "Y", "Z"}, ImageSize → 200,
       PlotStyle → {Directive[Yellow, Opacity[1]]},
       Boxed → False, Axes → True,
       AxesOrigin → {0, 0, 0}],
      ParametricPlot3D[ϕ3[0, a], {a, 0, 2 π},
       PlotRange → {{-3, 3}, {-3, 3}, {-0.5, 6}},
```

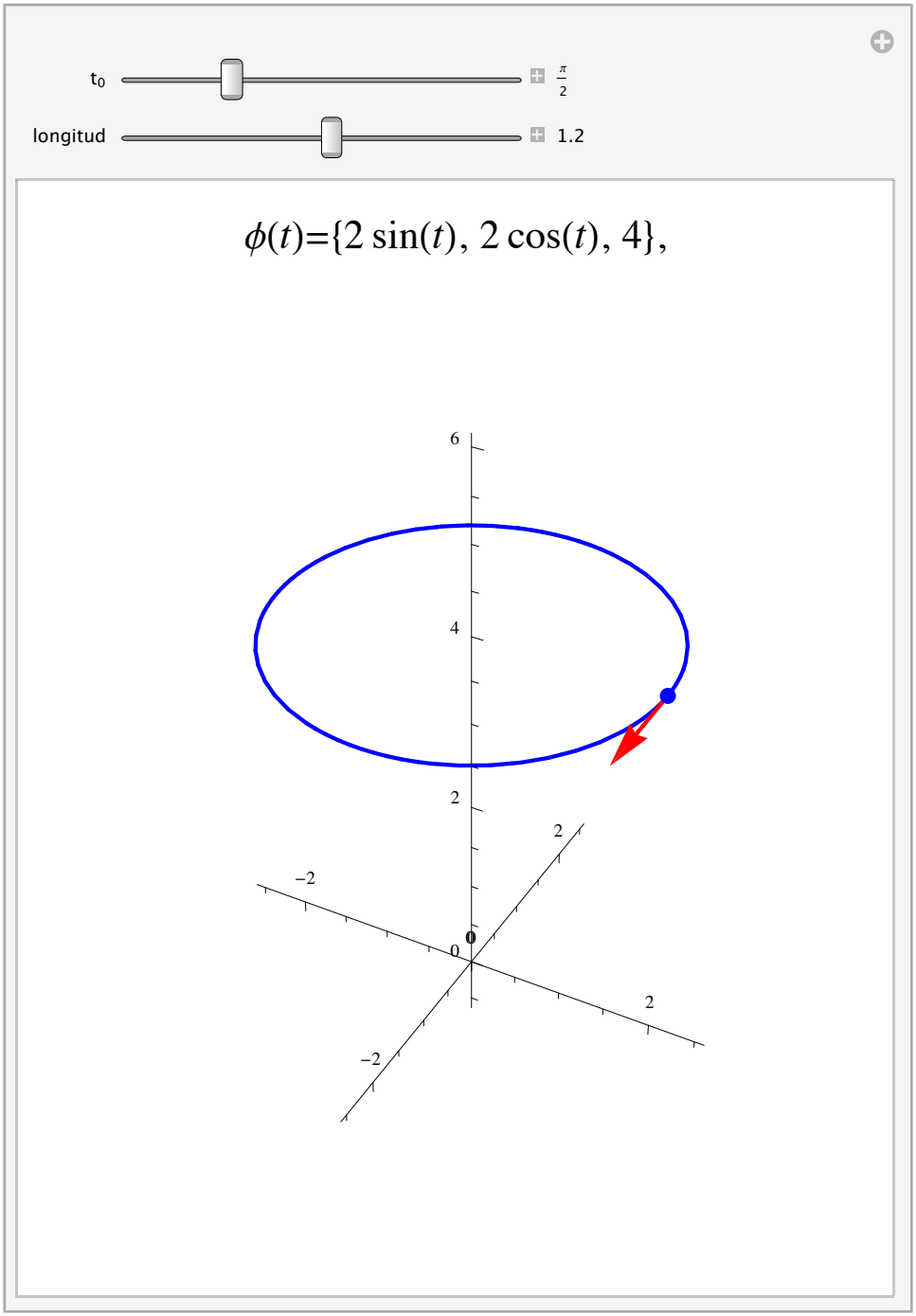
```
        Mesh → None, AxesLabel → {"X", "Y", "Z"},
        ImageSize → 200, PlotStyle →
         {Thickness[0.01], Blue}, Boxed → False,
        Axes → True, AxesOrigin → {0, 0, 0}],
      Graphics3D[{Blue, PointSize[0.02],
        Point[Evaluate[ϕ3[0, a0]]]}],
      Graphics3D[{Blue, Thickness[0.01],
        Arrow[{ϕ3[0, a0], ϕ3[0, a0] +
            Normalize[Evaluate[(jacobiana.vector) /.
                {u → 0, v → a0}]]}]}],
      Graphics3D[{Red, Thickness[0.01],
        Arrow[{ϕ3[0, a0], ϕ3[0, a0] +
            Normalize[Evaluate[(jacobiana.{0, -1}) /.
                {u → 0, v → a0}]]}]}],
      Graphics3D[{Green, Thickness[0.01],
        Arrow[{ϕ3[0, a0], ϕ3[0, a0] + Cross[
             Normalize[Evaluate[(jacobiana.
                  vector) /. {u → 0, v → a0}]],
             Normalize[Evaluate[(jacobiana.
                  {0, -1}) /. {u → 0, v → a0}]]
            ]}]}]
    ]}}],
  {{a0, 5.4, "a"}, 0.00001, 2 π}]
```

Out[94]=



In[34]:=
```
inducida = orientacion3D[
  {2 Sin[t], 2 Cos[t], 4}, {t, 0, 2 * Pi}, {Axes → True,
   AxesOrigin → {0, 0, 0}, Boxed → False,
   PlotRange → {{-2.5, 2.5}, {-2.5, 2.5}, {-0.5, 6}},
   ImageSize → 400}, {π / 2, 1.2}]
```

Out[34]=



» La circulación calculada como una integral de línea

```
Clear[x, y, z, r];
x[t_] = 2 Cos[t];
y[t_] = 2 Sin[t];
z[t_] = 4;
r[t_] = {x[t], y[t], z[t]};
F[x_, y_, z_] = {3 z[t], 5 x[t], -2 y[t]}
```

$$\int_0^{2\pi} F[x, y, z].D[r[t], t]\, dt$$

```
{12, 10 Cos[t], -4 Sin[t]}
```

20π

» Utilizando el teorema de Stokes

```
Clear[x, y, z, r, θ, CurlF, GradG];
F[x_, y_, z_] = {3 z, 5 x, -2 y};
CurlF[x_, y_, z_] =
 {D[F[x, y, z][[3]], y] - D[F[x, y, z][[2]], z],
  -D[F[x, y, z][[3]], x] + D[F[x, y, z][[1]], z],
  D[F[x, y, z][[2]], x] - D[F[x, y, z][[1]], y]}
G[x_, y_, z_] = z - x^2 - y^2;
GradG[x_, y_, z_] =
 {D[G[x, y, z], x], D[G[x, y, z], y], D[G[x, y, z], z]}
H[r_, θ_] = CurlF[x, y, z].GradG[x, y, z] /.
   {x → r Cos[θ], y → r Sin[θ]};
```

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2} r\, H[r, \theta]\, dr\, d\theta$$

```
{-2, 3, 5}
{-2 x, -2 y, 1}
```

20π

REFERENCIAS

[1] K. Janich, *Vector Analysis*, Springer - Verlag, New - York, 2001.

[2] J.E. Marsden y A. J. Tromba, *Cálculo Vectorial*, Addison - Wesley Iberoamericana, 1991.

[3] J.L. Romero, F. Benítez y C. Muriel, *Análisis Vectorial y Problemas resueltos de Análisis Vectorial*, Apuntes del departamento de matemáticas de la Universidad de Cádiz, 2004.

[4] S. Wagon, *Mathematica in action : Problem solving through visualization and computation*, Springer, New - York, 2010.

Aplicaciones físico-matemáticas para la enseñanza en alumnos del primer curso de grados de Ciencias e Ingenierías.

Juan Vidal

Facultad de Ciencias del Mar y Ambientales, Universidad de Cádiz

Avda. República Saharaui s/n. Puerto Real, 11510, Cádiz, Spain.

Concepción Muriel, Adrián Ruíz y Juan Bosco García

Facultad de Ciencias, Universidad de Cádiz

Avda. República Saharaui s/n. Puerto Real, 11510, Cádiz, Spain.

Palabras clave:

Enseñanza universitaria, física elemental, matemáticas, simulaciones.

1.INTRODUCCIÓN

En muchos países de Europa, la docencia universitaria tradicional se ha visto modificada por los principios que definen el Espacio Europeo de Educación Superior (EEES). Los cambios que promueve el EEES eliminan la concepción de profesor como figura única y fundamental en la transmisión de conocimiento donde compartía su sabiduría a través de la clase magistral, clases regladas donde los alumnos asimilaban los conceptos y tomaban apuntes. Con la adaptación al Tratado de Bolonia, el profesor se convierte en tutor o supervisor y se da mayor protagonismo al estudiante. Las clases no son puramente teóricas y existe una parte práctica que computa en la evaluación final. Para facilitar el trabajo de docente y del alumno se utilizan diferentes recursos tecnológicos aplicados al ámbito de la educación: Internet, los entornos virtuales de aprendizaje y el uso de diferentes herramientas tecnológicas son los útiles de estudio en la Universidad actual. El estudio de las bases matemáticas comunes en asignaturas de matemáticas y físicas en los primeros cursos de los nuevos grados en Ciencias e Ingenierías constituyen los pilares de muchos de los conceptos de asignaturas de cursos posteriores. Nuestra experiencia docente nos ha demostrado que los alumnos tienen grandes dificultades de asimilación de todos aquellos conceptos que exijan cierta abstracción, a lo que se une una falta de visión espacial. Dentro de este contexto se enmarca la presentación del material informático de esta comunicación para el aprendizaje interactivo de métodos matemáticos para la física. Este material ha sido elaborado gracias al Proyecto de Innovación PI1-12-005 de la convocatoria de Innovación y Mejora docente del Vicerrectorado de Docencia y Formación de la Universidad de Cádiz, en España.

2. OBJETIVOS DEL PROYECTO DE INNOVACIÓN DOCENTE

El estudio y didáctica de las matemáticas y asignaturas de físicas, comprenden una serie de estructuras de presentación y símbolos propios que contribuyen de forma determinante a la perfecta compresión de la materia. El desconocimiento de este lenguaje matemático supone un hándicap a la hora de la transmisión de conceptos en estas ciencias, y en particular en las asignaturas de físicas donde a veces la limitación no está en la idea conceptual sino en el formalismo matemático, por lo que su estudio debe constituir una tarea primordial desde los primeros niveles académicos.

El proyecto de innovación y mejora docente para la enseñanza de las matemáticas para la física a nivel universitario, consiste fundamentalmente en la elaboración del material didáctico informático y contempla los siguientes aspectos u objetivos generales:

1- **Adquisición** de conceptos matemáticos e **interpretación física**.
2- Desarrollo de **habilidades y destreza de cálculo.**
3- **Trabajo en grupo.**

Aunque este material trata aspectos generales y básicos del análisis vectorial, la aproximación del ingeniero a las matemáticas es de una naturaleza eminentemente práctica, y está orientada a la resolución de problemas concretos. Por este motivo, la propuesta metodológica está centrada

en los siguientes puntos:

- Presentación de una situación simplificada del mundo real.
- Traducción de la situación en terminología matemática y diseño del modelo físico-matemático.
- Tratamiento del modelo y resolución del problema.
- Interpretación de la solución en términos físicos y análisis de resultados. De acuerdo a Esquembre, F. (2001) y a García Barneto et al. (2006), estas aplicaciones informáticas pueden usarse para visualizar fenómenos pero también para interactuar con la simulación, recogiendo y analizando datos.

En este trabajo se presenta una colección de aplicaciones matemáticas para el desarrollo del programa común de Análisis Vectorial de las distintas asignaturas de matemáticas en el primer curso de los grados en ciencias e ingenierías. El paquete de rutinas se conforman en base a la necesidad de introducir los siguientes conceptos, agrupados en unidades didácticas:

1. Introducción a la variedades diferenciables: representaciones implícitas, paramétricas y explícitas. Vectores tangentes y normales. Coordenadas cartesianas, polares, cilíndricas y esféricas.

2. Campos escalares y vectoriales. Curvas y superficies de nivel. Líneas de corriente. Operaciones entre campos: Gradiente (operador nabla), divergencia (0perador laplaciano) y rotacional.

3. Orientación de variedades. Integración de campos escalares. Integración de campos vectoriales en variedades orientadas. Integrales de línea y de flujo: interpretación física.

4. Teoremas clásicos del análisis vectorial: Teorema de Green. Teorema de Stokes clásico y Teorema de Gauss o de la divergencia. Aplicaciones físicas.

El desarrollo de este programa se realiza utilizando el programa de cálculo simbólico Mathematica®, presentando cada uno de los conceptos mediante una breve introducción teórica que se completa con ejercicios resueltos. Algunos de estos conceptos se visualizan gráficamente con posibilidad de modificación de parámetros, lo que facilita la **interpretación de las aplicaciones físicas**. Estos ejercicios resueltos permiten desarrollar las **habilidades y destrezas** necesarias para resolver otros problemas prácticos, fomentando la capacidad de relacionar los conocimientos y las habilidades adquiridas con las situaciones presentadas, y de esta forma saber aplicar los conceptos matemáticos para fines prácticos. La **adquisición** de los conocimientos se puede autoevaluar con variaciones de los mismos problemas tipo.

Este material está disponible en la plataforma Moodle del campus virtual de la Universidad de Cádiz. El campus virtual de la Universidad de Cádiz ha sido diseñado con el objetivo de crear un entorno docente que facilite a nuestros alumnos el desarrollo de sus estudios online. Esta plataforma favorece el **trabajo en grupo**, permitiendo la discusión de los conceptos mediante la aplicación "foro", en donde alumnos y profesores intercambian opiniones sobre el tema o problema propuesto. La evaluación de los resultados del proyecto de innovación docente se realizará mediante encuestas a los alumnos a través del campus virtual.

El proyecto de innovación incluye unos objetivos específicos con el propósito de evaluar el procedimiento a través de los siguientes puntos:

- Analizar las opiniones de los alumnos respecto a la concepción, idea e importancia de las matemáticas en el aprendizaje de las asignaturas de físicas.
- Comparar los modelos de enseñanza basado en la exposición, ya sea mediante clases magistrales en pizarra o mediante presentaciones video-proyectadas, con clases de desarrollo de conocimientos mediante aplicaciones informáticas que potencian el aprendizaje interactivo y evaluar la relación existente entre las prácticas docentes empleadas y el nivel de progreso en algunos contenidos del programa de los alumnos.

3. EJEMPLO DE UN TALLER

3.1. Taller de física general

El *gradiente de un escalar* es la operación más simple del operador derivada (operador nabla) y el resultado es un vector. Un ejemplo frecuente en Mecánica de Fluidos lo constituye el gradiente de presión. La presión estática P es un campo escalar y el operador gradiente sobre la presión define el vector gradiente de presión, el cual representa una fuerza,

$$\mathbf{grad}\ P = \nabla P = \partial P/\partial x\ \mathbf{i} + \partial P/\partial y\ \mathbf{j} + \partial P/\partial z\ \mathbf{k} \qquad \text{(Ec 1)}$$

donde en la ecuación (Ec 1) **grad** P es un vector representando la fuerza (en realidad la fuerza es igual −**grad** P) que actúa sobre el fluido debido a la variación de P en el espacio. Existen otros muchos ejemplos de gradiente de escalares. El transporte difusivo de una propiedad se modela con un coeficiente de transporte que multiplica el gradiente de la propiedad. Ejemplo: la Ley de Fourier, $\mathbf{q} = -\,k\ \mathbf{grad}(T)$, donde **q** es el vector que representa el flujo de calor por unidad de tiempo y área, [W/m2], donde T es la temperatura y la constante de proporcionalidad k es la conductividad térmica.

Por otro lado es importante observar que al ser el gradiente de un campo escalar, un vector formado por la derivada de dicho campo, el mismo tiene la dirección de la máxima variación del mismo. En otras palabras, el vector gradiente es normal a las superficies formadas con valores constantes del campo escalar.

El ejercicio propuesto dice: Supongamos que la temperatura en cada punto (x,y) del plano viene dada por la función $f(x,y)=1/2\ (y^2-x^2)$. Calcula el camino que seguir· una bacteria que en todo instante busca el mayor aumento de la temperatura y que parte de un punto inicial (-2,1). Con la ayuda de la aplicación en Mathematica el alumno puede visualizar mejor el ejercicio. Mathematica es el software con el que trabajan los alumnos en las materias básicas de las asignaturas de matemáticas. Esta herramienta de cálculo, manipulación y visualización matemática, es un programa interactivo diseñado para resolver de forma simbólica, problemas en las áreas de Ciencias e Ingeniería. La aplicación permite modificar el punto y la función, lo que reinventa multitud de variantes con los que ejercitar el mismo tipo de problema.

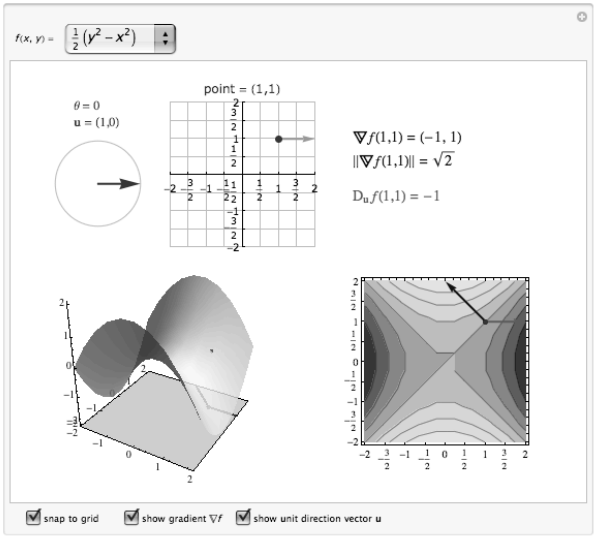
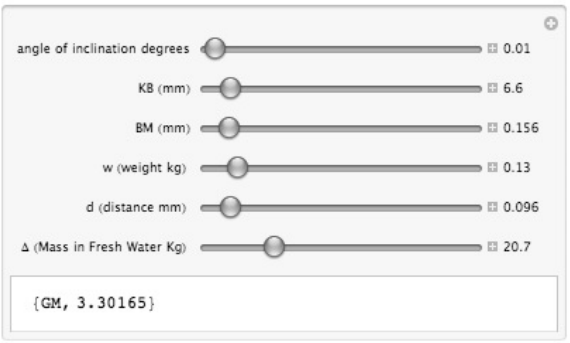


Figura 1: ejemplo de aplicación mathematica (por Abby Brown, Wolfram Mathematica) empleada en el taller para el ejercicio de gradiente de un campo escalar.

Estas aplicaciones se utilizaron en las clases taller siempre después de una introducción teórica en la pizarra donde se introduce los conceptos físico-matemáticos con rigurosidad. Los ejercicios del taller propuestos permitían la realización de cálculos y lograron que los alumnos resolvieran los problemas con lápiz y papel y luego contrastaran sus resultados con los obtenidos a partir de los datos de la misma.

3.2 Taller específico de alumnos de ingeniería náutica.

Con vista a introducir a los alumnos en problemas de sus estudios relacionados con el ejercicio profesional, se le muestra un ejemplo de cálculos del GM en un buque.



(elaboración propia)

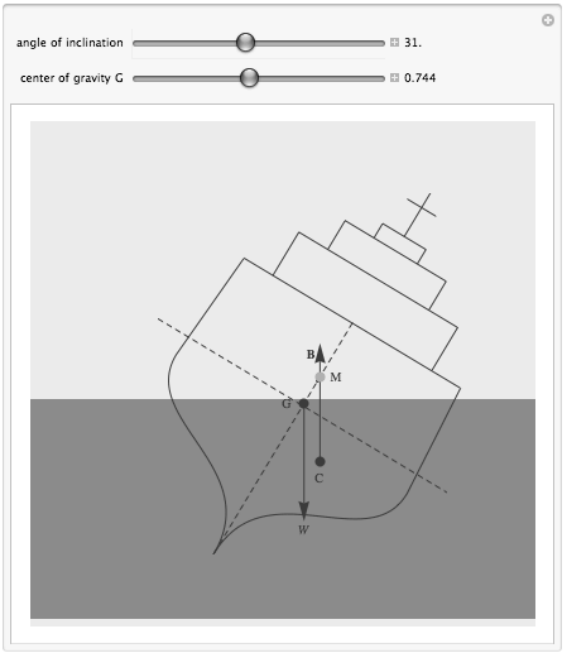


Figura 2: ejemplo de aplicación mathematica para el cálculo del GM en un buque y visualización de l par escorante-adrizante (por Enrique Zeleny, Wolfram Mathematica)

Modificando el ángulo de inclinación y el centro de gravedad, el alumno puede visualizar como cambia la situación de estabilidad del buque. Las barras superiores permiten calcular la posición del GM en función de los datos hidrostáticos y del traslado de pesos en el buque y la escora de este.

4. EVALUACIÓN DE LA METODOLOGÍA

Con el objetivo de evaluar la eficacia del método de

aprendizaje, se plantea una serie de tests y pruebas con alumnos de los primeros cursos de los grados que tienen asignaturas comunes de matemáticas y física general.

El diseño utilizado fue en formato de encuesta a partir de 14 preguntas cerradas. Se presentaron 14 afirmaciones para que los alumnos las clasificaran, en una escala de 5 a 0, desde totalmente de acuerdo (5) a totalmente desacuerdo(0).

Dividida en tres partes, en la primeras 5 preguntas se intenta indagar si la dificultad que encuentra el alumno en los problemas se debe a los conceptos físicos en sí o al aparato matemático que se necesita para su desarrollo y la coherencia de nomenclaturas a la hora de explicar los mismos conceptos en asignaturas de física y matemáticas. La segunda parte, estudia la percepción que el alumno tiene sobre la aplicación de los conceptos matemáticos en física y viceversa, así como sus posibles aplicaciones en posteriores asignaturas. La última parte, desde la pregunta 9 a la 14, se preguntó sobre la apreciación del alumno de la eficacia del método tradicional de desarrollo del tema en la pizarra o del método de intercalar prácticas con computadoras. El cuestionario fue el siguiente:

1. Entiendo los conceptos físicos que se explican.
2. Entiendo el desarrollo matemático que se utiliza para explicar los conceptos físicos.
3. Entiendo la nomenclatura matemática.
4. La nomenclatura matemática era conocida.
5. Había aprendido los conocimientos previos necesarios en otras asignaturas.
6. Los conceptos matemáticos me fueron útiles para comprender los algunos conceptos físicos.
7. Las interpretaciones físicas me ayudaron a comprender algunos conceptos matemáticos
8. Creo que los conceptos físicos-matemáticos estudiados en la asignatura me serán útiles para otras asignaturas.
9. Considero suficiente la colección de ejercicios prácticos.
10. El contenido teórico de la asignatura es adecuado.
11. Los recursos multimedia fueron suficientes.
12. El uso de material multimedia ha sido útil.
13. Entiendo mejor los conceptos teóricos cuando se desarrollan en la pizarra
14. Valoro positivamente las prácticas con software para comprender los conceptos.

La encuesta se pasó a alumnos de tercer curso del grado de matemáticas y alumnos de primero de grado de ingenierías marina, náutica y transporte marítimo y radioelectrónica, que cursan asignaturas de física general.

En total fueron 74 alumnos de ingenierías y 20 alumnos de matemáticas. Todos estos alumnos, durante las clases y en el aula virtual que dispone la Universidad de Cádiz, han dispuesto de estas aplicaciones informáticas, si bien no han tenido talleres específicos.

Los resultados se muestran en la siguiente tabla.

PREGUNTA	MEDIA		DESVIACIÓN	
	Ingenier.	Matem.	Ingenier.	Matem.
1	3.1	3.5	1.2	1.0
2	3.1	4.0	1.2	0.5
3	2.1	4.0	1.4	0.5
4	2.0	3.5	1.2	0.8
5	2.3	3.0	1.4	1.2
6	3.2	2.0	1.3	1.2
7	2.9	3.2	1.2	1.2
8	2.9	2.0	1.3	0.9
9	1.9	3.5	1.3	1.1
10	3.0	3.2	1.1	1.1
11	3.1	2.8	1.2	1.3
12	3.3	3.4	1.1	1.2
13	3.2	3.3	1.2	1.2
14	3.5	3.2	1.1	1.3

Tabla 1. Resultados de las encuestas a alumnos de matemáticas (matem.) del grado de matemáticas y alumnos de física general en el grado de ingenierías naval, náutica y transporte marítimo y radioelectrónica (Ingnier.).

La mayoría de los alumnos, tanto de ingenierías como de matemáticas, valoraron positivamente las clases con software y el empleo de material multimedia. Sin embargo, uno de las conclusiones más interesantes en función de la opiniones de los alumnos es que todos creen necesario el uso de la pizarra tradicional. Por tanto, el material multimedia es, en opinión de los alumnos, una herramienta necesaria pero no suficiente. En cuanto a titulaciones, las principales diferencias se encuentran en que los alumnos de ingenierías presentan dificultades a la hora de entender los desarrollos matemáticos y la nomenclatura no le resultó conocida. La alta calificación en estos apartados por los alumnos de matemáticas no es extraña, como tampoco que su peor calificación sea para las posibles utilidades de los conceptos físicos. Sin embargo, si valoran positivamente el emplear ejemplos físicos.

La segunda prueba de evaluación del método consistió en ofrecer unas clases extraordinarias voluntarias a alumnos de los grados de ingenierías marina, náutica y transporte marítimo y radioelectrónica En total fueron 27 alumnos. En estas clases se repasaron conceptos de algebra básicos como operaciones con vectores, integrales de línea o cambios de bases. En estas clases se utilizó gran cantidad de aplicaciones informáticas.

Para la evaluación de los resultados se diseñó un cuestionario de problemas cortos que evaluaban los conocimientos previos a la clase teórica, uno posterior a la misma y un último examen después de la clase de problemas con ordenador. Para contrastar los resultados de progresos, se repite una segunda prueba sobre otra parte del temario intercambiando la clase de ordenador y la de teoría. El objetivo es estudiar si el progreso está relacionado con el método o simplemente responde al repaso de conocimientos. Los resultados se muestran en la gráficas 1 y 2. Su análisis muestra que los alumnos tuvieron resultados similares en las dos pruebas preliminares, por lo que presentan similar preparación previa en los dos temas. También se puede apreciar que el progreso es mayor para la segunda prueba y aunque, tras las dos clases, presenten niveles de progresos similares en promedio el progreso es mayor en los alumnos que tenían peor preparación.

Por otro lado, el hecho que aunque se alcanza niveles parecidos tras las dos sesiones, se consigue más rápidamente cuando se imparte primero la clase práctica es un resultado muy destacable y pone de manifiesto que con sólo una clase se consigue prácticamente el mismo nivel de progreso que cuando se emplearon dos sesiones. En términos porcentuales, el incremento medio en la calificación de los 27 alumnos respecto a la prueba preliminar fue un 12% tras la primera clase (teórica) y de un 16% tras segunda clase (práctica) en la primera prueba y de un 17% después de la clase práctica y 16% tras la clase teórica en la segunda prueba. Es importante destacar la necesidad de que el alumno trabaje en clase delante del ordenador en diferentes casos del mismo problema. No basta con visualizar el problema inicialmente planteado sino que es imprescindible que practique cambiando las condiciones iniciales y él mismo se evalúe en las respuestas. A nuestro modo de ver, esta es la verdadera potencia de la herramienta.

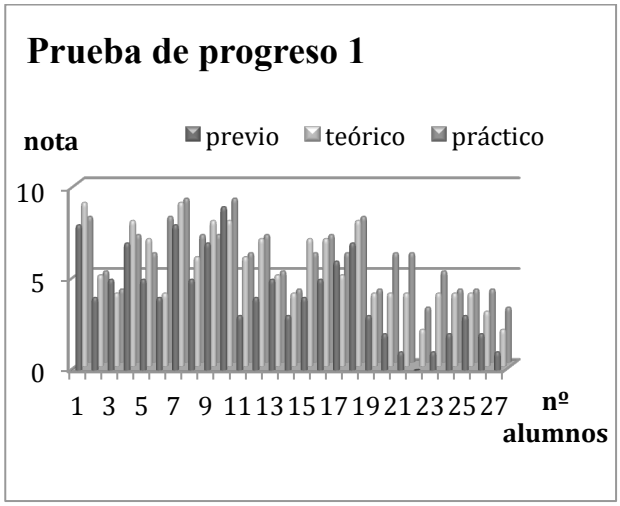


Figura 3. Prueba de progreso tras el primer taller. Resultados del ejercicio por alumnos.

Finalmente se realizó una presentación oral de cada ejercicio en grupos, en la que los estudiantes describieron los aspectos del uso de la simulación que cada grupo consideró como más importante. Dicho informe oral permitió a los docentes evaluar diversos aspectos del uso de la herramienta.

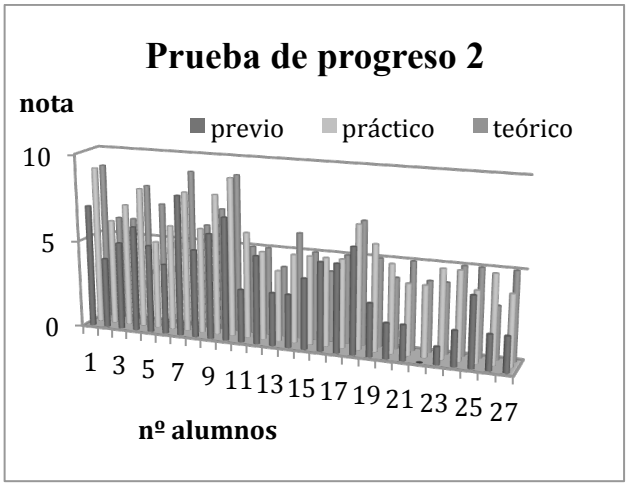


Figura 4. Prueba de progreso en el segundo taller. Resultados del ejercicio por alumnos.

La segunda parte consistió en la realización de un encuesta por estos alumnos en base al siguiente cuestionario:

1. Los ejemplos me ayudaron a entender mejor los conceptos físicos.

2. Las interpretaciones físicas me ayudaron a comprender algunos conceptos matemáticos.
3. Las aplicaciones me permitieron practicar por mi cuenta los diferentes ejercicios.

4. Valoro más importante las explicaciones en la pizarra.

5. Las aplicaciones no son imprescindibles para el desarrollo de la asignatura.

6. Las aplicaciones me ayudan a mejorar la destreza de cálculo en los problemas.

7. Creo que pueden aplicarse a otras asignaturas.

Los resultados se muestran en la siguiente tabla.

PREGUNTA	MEDIA	DESVIACIÓN
1	3.3	1.1
2	3.2	0.9
3	3.5	1.1
4	3.5	1.2
5	3.3	1.1
6	4.1	0.8
7	3.2	1.4

Tabla 2. Resultados de las encuestas a alumnos de ingenierías tras las dos sesiones de problemas y teoría utilizando como base las aplicaciones informáticas.

A diferencia de los alumnos que realizaron la encuesta anterior, estos recibieron dos sesiones extraordinarias de repaso de teoría y problemas con aplicaciones informáticas elaboradas con Mathematica. Las soluciones de los problemas que se trabajaron en los talleres se debatían y se planteaban variantes del mismo problema. La encuesta incluye cuestiones comunes a la encuesta anterior. Los resultados muestran una mejor apreciación de los alumnos a esta metodología, aunque repiten en la necesidad de clases de pizarras.

5. CONCLUSIONES

El propósito de la experiencia fue aplicar con mayor eficiencia esta herramienta en futuros cursos de la educación universitaria.

Se pudo comprobar que el uso de esta herramienta mejoró el rendimiento de los alumnos. Algunos de los alumnos que realizaron la simulación antes de la prueba, pudieron utilizarla para realizar por primera vez un problema del tema, para revisar la teoría y luego de resolver el problema analíticamente, así como para predecir el comportamiento del sistema estudiado. La simulación no solo les ayudó a introducirse en el tema, sino que también me les permitió ver como se hacia un ejercicio analíticamente.

También se pudo contrastar que su aplicación didáctica mejora la relación de los estudiantes con los docentes y con otros compañeros.

6. BIBLIOGRAFÍA

[1] Esquembre, F. ; Martín, E, Christian W y Vellón, M. Fislets Enseñanza de la Física con Material Interactivo. Ed. Pearson, Prentice Hall. 2001.

[2] F. C. Ferdinand. Mathematical Methods in Physics and Engineering with Mathematica. CRC Press Company. 339 pp., 2003

[3] A. Garcías. *Nuevas estrategias didácticas en entornos digitales para la enseñanza superior*. En: J. Salinas; A. Batista (coord.). Didáctica y tecnología educativa para una universidad en un mundo digital. Universidad de Panamá: Imprenta Universitaria, 2002.

[4] S. Hassani. Mathematical methods using Mathematica: for students of physics and related fields. Springer 235pp, 2003.

[5] J. Morin y R. Seurat. *Gestión de los recursos tecnológicos*. Madrid: Cotec, 1998.

[6] J. Salinas. *El rol del profesorado universitario ante los cambios de la era digital*. Actas del I Encuentro Iberoamericano de Perfeccionamiento Integral del Profesor Universitario. Caracas: Universidad Central de Venezuela, 1999.

[7] B. F. Torrence y E. A. Torrence. The Student's Introduction to MATHEMATICA ®: A Handbook for Precalculus, Calculus, and Linear Algebra. Cambridge University Press, 484 pp, 2009.

[8] P. R. Wellin, R. J. Gaylord y S. N. Kamin. *An introduction to programming with Mathematica*. Third Edition. Cambridge University Press. 570 pp, 2005.

[9] R. L. Zimmerman y F. I. Olness. *Mathematica For Physics*. Addison-Wesley Publishing Company. 335pp, 2002.

Elaboración de software matemático para la enseñanza del Cálculo Vectorial

Concepción MURIEL
Departamento de Matemáticas
Juan Manuel VIDAL
Departamento de Construcciones Navales
Adrián RUÍZ, Juan B. GARCÍA, Pablo PINIELLA
Alumnos colaboradores del Departamento de Matemáticas
Universidad de Cádiz,
11510 Puerto Real, Cádiz, España

14 de junio de 2012

RESUMEN

Se describen algunas de las rutinas elaboradas con el programa Mathematica para la enseñanza de asignaturas con contenidos matemáticos relacionados con el cálculo vectorial. La creación de ejercicios interactivos facilitan la comprensión de contenidos matemáticos y el aprendizaje de técnicas que requieren estas disciplinas.

1. INTRODUCCIÓN

La Declaración de Bolonia (1999), suscrita inicialmente por 30 países europeos y con más de 40 participantes en la actualidad, sienta las bases para la construcción de un *Espacio Europeo de Educación Superior* (EEES) que modifica profundamente las metodologías para la transmisión del conocimiento en el entorno universitario. Los nuevos estudios cuantifican el trabajo durante el proceso de aprendizaje, en un contexto de renovación metodológica docente y de evaluación continua de los conocimientos y de las competencias adquiridas. El EEES implica una nueva manera de enseñar y de aprender centrado en el alumno.

Este nuevo marco obliga al profesor universitario a renovar su propia formación, su metodología, sus materiales didácticos y los sistemas tradicionales de evaluación. Con objeto de mejorar tanto el aprendizaje de los alumnos como la forma de enseñar de los profesores, la Unidad de Innovación docente de la Universidad de Cádiz en España convoca anualmente Proyectos de Innovación y Mejora Docente. Los resultados presentados en este trabajo se enmarcan dentro del proyecto PI1-12-005 titulado "*Diseño de metodologías y elaboración de material docente para la organización, planificación y coordinación de asignaturas con contenidos físico-matemáticos*". Las principales líneas de trabajo del proyecto son las siguientes:

1. Diseñar y mejorar la clases prácticas y talleres de asignaturas con contenidos físico-matemáticos de diferentes titulaciones.
2. Coordinar contenidos de asignaturas y nomenclaturas físico-matemáticas.
3. Mejorar la exposición magistral en este tipo de asignaturas mediante material gráfico y animaciones.
4. Potenciar el trabajo activo del alumno con la creación de ejercicios interactivos en entornos informáticos amigables.

Uno de los resultados del proyecto es la creación de un marco de interacción entre profesores de diferentes titulaciones y/o áreas de conocimiento que produzca beneficios en un doble sentido: las asignaturas de Matemáticas se enriquecen con casos prácticos y las de Ciencias Experimentales (Física, Ingenierías, etc.) pueden avanzar con más facilidad si utilizan la misma notación y conceptos que el alumno estudia en asignaturas de Matemáticas. Para ello se crean materiales didácticos comunes que permitan una metodología diferente e innovadora en estas disciplinas: se potencia el uso de las nuevas tecnologías para que el alumno pueda ir resolviendo problemas de forma interactiva y agudizar su pensamiento crítico.

Uno de los materiales didácticos creados durante el proyecto de innovación es un software informático, interactivo y específico para la enseñanza del Cálculo Vectorial y sus aplicaciones e interpretaciones físicas ([5],[9],[8]). En este trabajo nos centramos en los

contenidos más matemáticos del software y en el análisis de resultados en alumnos que han cursado la asignatura Análisis Vectorial de tercer curso del grado en Matemáticas que se imparte en la Universidad de Cádiz. Un enfoque centrado en las aplicaciones a problemas prácticos en las Ciencias Experimentales, sus interpretaciones físicas y el análisis de resultados para alumnos de Ingenierías son presentados en [16].

Las rutinas han sido creadas usando Mathematica 8.0 por su potencia gráfica y la posibilidad de crear proyectos elaborados que pueden ser muy complicados de realizar en otros lenguajes de programación ([1],[4],[7],[17]). Además, las nuevas instrucciones incluidas en las últimas versiones para realizar animaciones, que permiten al usuario manipular gráficos o cálculos de forma interactiva, se adaptan a la perfección a las necesidades propias de estas disciplinas. El paquete de rutinas se ha creado en base a la necesidad de desarrollar los contenidos que se describen a continuación, agrupados en diferentes unidades didácticas.

2. VARIEDADES DIFERENCIABLES

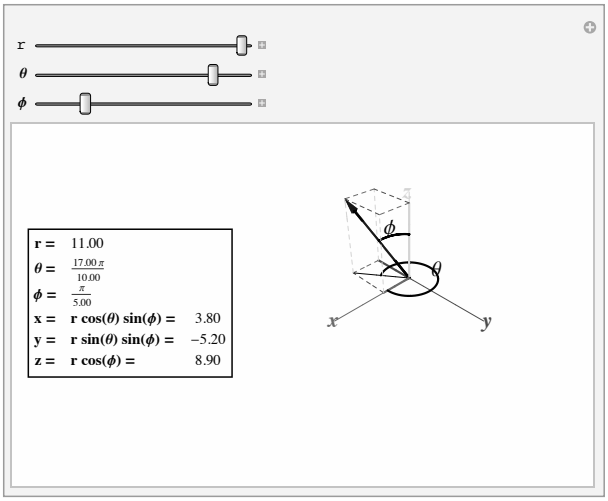
El alumno de la titulación de Grado en Matemáticas se ha encontrado en cursos anteriores de cálculo de una y/o varias variables con variedades diferenciables descritas como gráficas de funciones. Este concepto previo se formaliza mediante la representación explícita. Localmente, estos conjuntos son gráficas de funciones diferenciables, expresadas en alguna base ordenada de $\mathbb{R}^n$. Si la base es la canónica, las órdenes de Mathematica más adecuadas a este tipo de representación son las instrucciones Plot y Plot3D para representar gráficas de funciones en $\mathbb{R}^2$y en $\mathbb{R}^3$. El uso de bases diferentes requiere utilizar otras instrucciones como ParametricPlot y ParametricPlot3D.

Muchos conjuntos de la geometría clásica aparecen al describir un recinto como el lugar geométrico de los puntos del plano o del espacio que satisfacen unas condiciones descritas por una o varias ecuaciones. Se formaliza matemáticamente el concepto de representación implícita, especialmente adecuada para describir conjuntos que se obtienen como cortes o intersecciones de otros, y se introducen las órdenes de Mathematica necesarias para representar curvas y superficies dadas en forma implícita (ContourPlot, ContourPlot3D).

En otras ocasiones es muy natural describir un conjunto por medio de uno o varios parámetros que fijan de forma inequívoca la posición de los puntos del conjunto. Las órdenes ParametricPlot y ParametricPlot3D con sus opciones son las adecuadas para representar conjuntos descritos en forma paramétrica. Los cambios de coordenadas polares, cilíndricas y esféricas juegan un papel fundamental a la hora de aprender a parametrizar ciertas curvas y superficies. La potencia de las últimas versiones del Mathematica son de gran ayuda para comprender el significado de los parámetros involucrados en los nuevos sistemas de coordenadas ([2],[10]).

En la Figura 1 se muestra una rutina sobre las coordenadas esféricas, que permite experimentar al alumno eligiendo los valores de los parámetros y observando los cambios producidos sobre la gráfica. Automáticamente el procedimiento calcula y escribe las correspondientes coordenadas del punto en ambos sistemas de coordenadas. Rutinas análogas permiten trabajar con las coordenadas polares en $\mathbb{R}^2$ y las coordenadas cilíndricas en $\mathbb{R}^3$.

Figura 1: Coordenadas esféricas

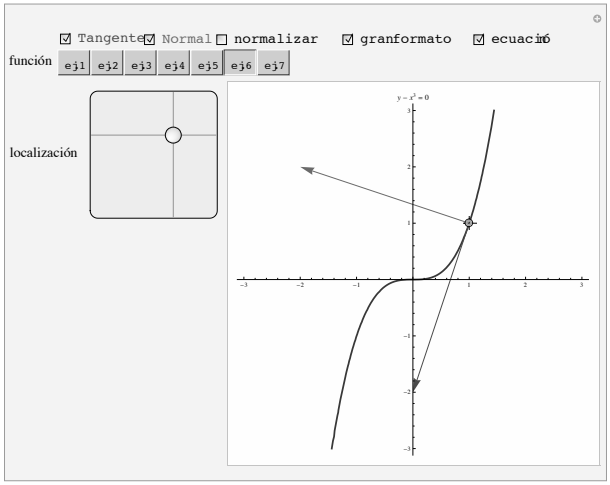


La noción de recta tangente a la gráfica de una función de una variable se generaliza para introducir el concepto de espacio afín tangente utilizando representaciones explícitas. A través de las equivalencias entre las distintas representaciones se deducen formas alternativas de calcular espacios tangentes y se introducen las instrucciones del programa necesarias para realizar los cálculos. Es muy importante que el alumno aprenda a calcular vectores tangentes utilizando las diferentes respresentaciones y que sepa elegir entre ellas la que más se adapta a cada recinto.

Animaciones como la de la Figura 2, inspirada en [14], es muy útil para representar de forma interactiva los vectores tangentes y normales a curvas en $\mathbb{R}^2$. El alumno puede elegir qué tipo de vector quiere representar y se pueden elegir diferentes recintos de funciones, con diferentes características. Los vectores pueden normalizarse a elección. La selección del punto sobre el que se quieren representar dichos vectores se realiza sobre un panel bidimensional, de forma que ambos vectores se dibujan sobre cualquier punto del

espacio, y no sólo sobre los puntos de la gráfica. Es un excelente ejercicio para ilustrar el concepto de campo vectorial, que aplica a cada punto un vector. De esta forma se facilita la comprensión de los conceptos de campos vectoriales tangentes y/o campos vectoriales normales a una variedad que se usarán en posteriores unidades didácticas.

Figura 2: Vectores tangentes y normales a gráficas de funciones



Entre las competencias específicas que el alumno adquiere en esta unidad didáctica se destacan:

1. Saber dibujar curvas y superficies en el plano y en el espacio dadas en forma implícita, explícitas y paramétricas.

2. Saber decidir intuitivamente a partir de las representaciones gráficas y un conjunto es variedad diferenciable o no.

3. Entender el concepto de curva y/o superficie de nivel y saber decidir cuándo son variedades diferenciables.

4. Reconocer recintos clásicos a partir de sus ecuaciones implícitas.

5. Entender el significado de los parámetros en coordenadas polares, cilíndricas y esféricas.

6. Saber parametrizar curvas y superficies

7. Saber calcular y dibujar la recta tangente a una curva y el plano tangente a una superficie utilizando diferentes representaciones.

8. Saber calcular y dibujar vectores normales a una variedad utilizando diferentes representaciones.

9. Utilizar animaciones para visualizar vectores tangentes y vectores normales.

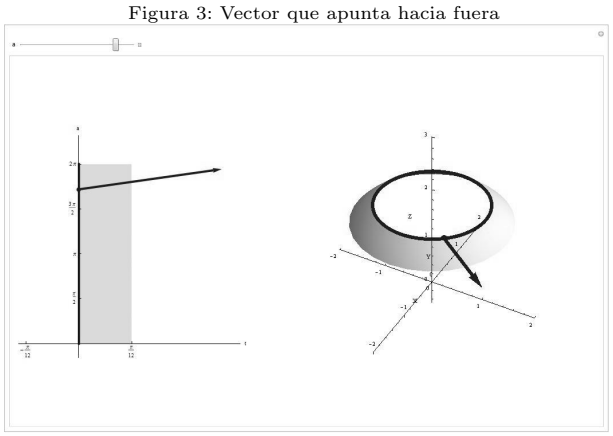
3. ORIENTACIÓN

El cambio de signo en una integral de Riemman de una función de una variable cuando se intercambian los límites de integración es una idea sencilla que justifica la necesidad de definir conceptos como recorrer una curva de izquierda a derecha, la cara exterior de una superficie, etc. Estos conceptos se usan constantemente en los textos de cálculo vectorial sin mucha precisión, pues dependen del punto de vista del observador. Por otro lado, definiciones basada en formas fundamentales, sistemas continuos de orientaciones, etc., usuales en libros de matemática avanzada ([6],[15]), son demasiado abstractos y dificultan la compresión intuitiva del concepto de orientación.

En este tema tan delicado, las órdenes de manipulación dinámica (Manipulate, Animate) de las últimas versiones del Mathematica son de especial utilidad. El software desarrollado incluye rutinas que permiten:

1: Visualizar el concepto de vector que apunta hacia fuera en puntos del borde de variedad con pseudo-borde ([12],[13]). En la Figura 3 se muestra una aplicación de la rutina, que permite visualizar los vectores en cada punto del borde. Utilizando diferentes vectores en el espacio de los parámetros, el alumno comprueba que el signo de la primera coordenada es el que determina el sentido del vector en el borde de la variedad.

Figura 3: Vector que apunta hacia fuera

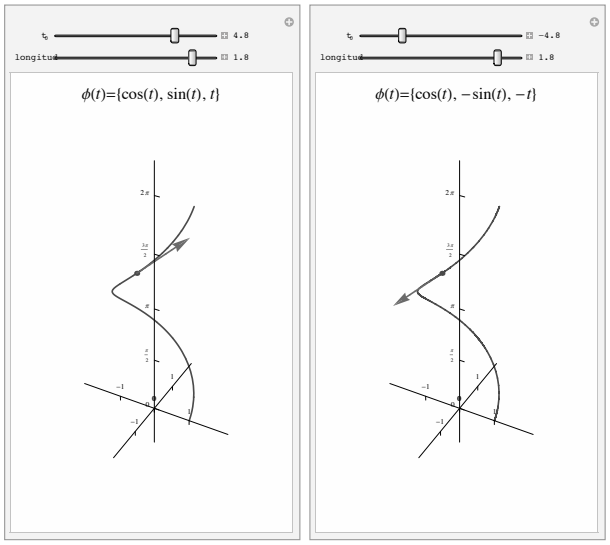


2: Dibujar animaciones para visualizar la orientación a través de campos de vectores tangentes, transversales y normales en el caso de hipersuperficies.

3: Comprobar de una forma interactiva si una parametrización es coherente o no con una orientación prefijada. La rutina presentada en la Figura 4 permite elegir diferentes parametrizaciones y dibujar un vector tangente en cada punto de la curva. El movimiento del vector a lo largo de la curva ayuda a visualizar la orientación que la parametrización elegida define

sobre la curva.

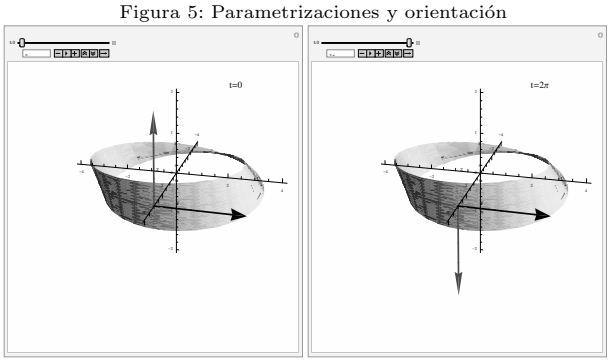
Figura 4: Parametrizaciones y orientación



4: Determinar visualmente la orientación inducida en el borde por una orientación prefijada en la variedad.

5: Comprender el concepto de no-orientabilidad con animaciones utilizando la banda de Möbius (Figura 5).

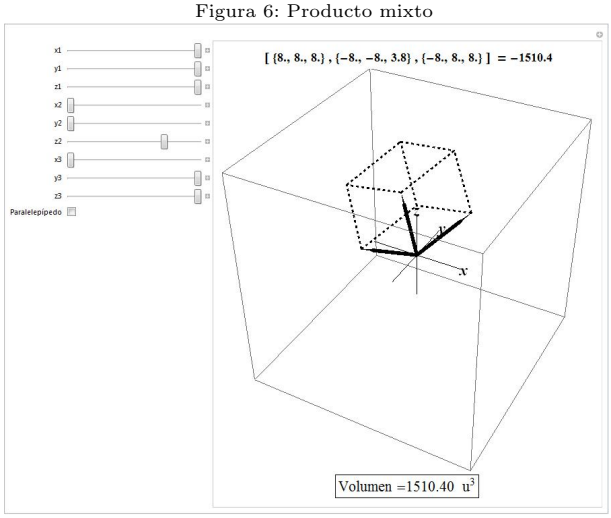
Figura 5: Parametrizaciones y orientación



4. MEDIDA E INTEGRACIÓN EN VARIEDADES

El alumno del grado en Matemáticas conoce de la teoría de integración como asociar longitudes, áreas y volúmenes a los subconjuntos medibles en $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente. Sin embargo, la medida de Lebesgue asocia valor cero a un segmento en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$, a una superficie en $\mathbb{R}^3$ y no proporciona una medida de longitud en $\mathbb{R}^2$ ni una medida de área en $\mathbb{R}^3$. Comenzando por el caso más sencillo se establece un concepto de medida adecuada sobre los subespacios de un espacio vectorial para llegar de forma natural al concepto de medida de paralelepípedo y su relación con del producto exterior de los vectores que lo dirigen. Con órdenes del tipo Wedge o Cross se pueden resolver fácilmente los problemas de cálculo en estas situaciones sencillas. En la Figura 6 se muestra la interpretación geométrica del producto mixto de tres vectores en el espacio. El alumno puede seleccionar las coordenadas de los vectores y la rutina los dibuja y calcula el valor de su producto mixto. Opcionalmente puede mostrarse el paralelepípedo que forman dichos vectores y su volumen se calcula de forma dinámica.

Figura 6: Producto mixto

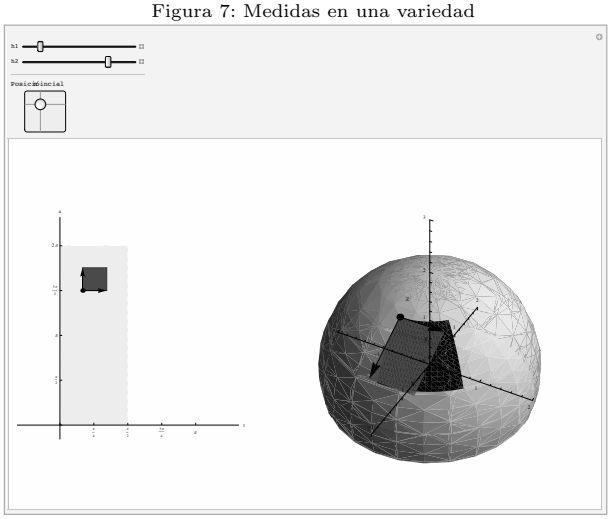


Al concepto de medida (local) en una variedad puede llegarse de forma heurística por aproximaciones de medida de paralelepípedos construidos sobre cada espacio tangente. En la Figura 7 se muestra el resultado de aplicar una rutina que representa dichos paralelepípedos y su proyección como una región sombreada en la superficie, con la posibilidad de modificar todos los elementos de forma interactiva, ayudan a entender de una forma muy efectiva este procedimiento de medida por aproximación y a interpretar el elemento de medida (longitud o superficie) como el factor de expansión entre la medida en $\mathbb{R}^k$.

Se diseñan diferentes rutinas para automatizar el cálculo de integrales de línea y superficie. Las nuevas órdenes PlotVectorField, ListPlotVectorField, GradientFieldPlot, y sus versiones en 3D incluidas en la versión 8.0 del programa Mathematica son utilizadas para explicar la interpretación física de una integral de linea en términos del trabajo al considerar el campo como un campo de fuerzas o de una integral de superficie como el flujo del campo a través de la superficie.

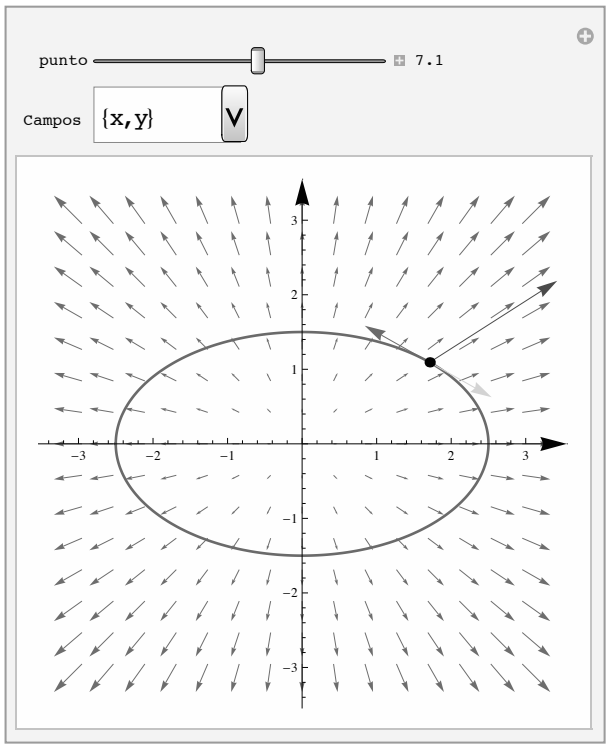
La Figura 8 muestra los objetos que intervienen en la evaluación de una integral de linea en $\mathbb{R}^2$ ([3]). Los alumnos pueden cambiar la curva o utilizar diferentes parametrizaciones para investigar el efecto de la orientación sobre el resultado de la integral. El

Figura 7: Medidas en una variedad



campo vectorial que se integra también puede elegirse a conveniencia.

Figura 8: Integral de linea



5. LOS TEOREMAS CLÁSICOS DEL ANÁLISIS VECTORIAL

Los teoremas clásicos del análisis vectorial aparecen como casos particulares del teorema de Stokes general, usualmente presentado y demostrado en los textos de matemática avanzada en el lenguaje de las formas diferenciales. La potencia de Mathematica como programa de cálculo simbólico facilita la comprensión, mediante comprobación directa de cálculos, de la equivalencia entre el enfoque clásico (campos vectoriales y escalares) y el enfoque moderno de las formas diferenciales. Al mismo tiempo, el alumno adquiere la agilidad y destreza necesarias para utilizar indistintamente ambas técnicas. En esta traducción de lenguajes, las operaciones clásicas (gradiente, rotacional, divergencia etc.) aparecen asociadas a la diferencial exterior de formas diferenciales ([12]).

Los teoremas de Green, Stokes clásico, y de la divergencia nos permiten en particular establecer significados físicos para los conceptos de divergencia y rotacional. Todas estas operaciones entre campos escalaras y/o vectoriales están implementadas como instrucciones del package Vector Analysis. Además de ejercicios de verificación del teorema de Stokes, se incluyen otros ejercicios interactivos de cálculos típicos de asignaturas de física, como puede ser la determinación de centros de gravedad y momentos de superficies.

6. METODOLOGÍA Y RESULTADOS

El material elaborado se organizó en diferentes laboratorios agrupados por unidades temáticas. La docencia de la asignatura Análisis Vectorial se impartió durante el primer semestre del curso académico 2011-2012 para alumnos del tercer curso del grado en Matemáticas en la Universidad de Cádiz. Cada alumno recibe tres sesiones de una hora dirigidas por el profesor más dos horas a la semana dedicadas a los laboratorios. Las clases de laboratorio se dividen en grupos, con una media de diez alumnos por aula. A través del campus virtual de la Universidad de Cádiz los alumnos disponen del material con antelación, incluyendo información sobre los objetivos que se desean alcanzar en cada taller y las pruebas que tienen que realizar y entregar para su evaluación. En la primera de las dos sesiones el profesor explica los contenidos y los procedimientos de los que consta cada laboratorio, mostrando ejemplos resueltos, como colección de problemas tipo. En la segunda de las sesiones el alumno experimenta con el material y trata de resolver los problemas propuestos; se fomenta la participación en grupos aunque la entrega de ejercicios es individual. El profesor supervisa los progresos y resuelve las posibles dificultades o dudas que están surgiendo. Al final de la segunda sesión el alumno dispone de un tiempo limitado para enviar sus respuestas a través del campus virtual.

Al final de la experiencia los alumnos valoraron positivamente el uso del material para comprender mejor conceptos difíciles de aprender, como el de orientabilidad y variedad con pseudoborde. Demandan más dedicación de horas a los laboratorios, posiblemente porque despierta su interés y participación, pero al

mismo tiempo creen necesario el desarrollo de la materia en pizarra por parte del profesor. Consideran muy positivas las aplicaciones a problemas físicos pero manifiestan poca satisfacción sobre los resultados obtenidos, lo que nos lleva a reforzar este punto en experiencias sucesivas. La interacción entre profesores de distintas disciplinas que se ha desarrollado gracias a este proyecto nos ha aportado una visión más amplia de las necesidades y deficiencias de cada sistema de enseñanza individual.

En general los resultados de las evaluaciones de los alumnos, en comparación con los alcanzadas en el curso anterior con el mismo profesorado, son considerablemente mejores, pero necesitaremos más tiempo para evaluar esta tendencia más allá de las características propias de cada curso.

Agradecimientos: Los autores agradecen la ayuda del grupo FQM201 de la junta de Andalucía, del proyecto MTM2009-11875 del Ministerio de Ciencia e Innovación y del proyecto de Innovación Docente PI1-12-005 de la Universidad de Cádiz.

REFERENCIAS

[1] M.L. Abell, J.P. Braselton. *Mathematica by example*. Academic Press, 2008.

[2] J. Bryant, *"Cylindrical Coordinates"* and *"Spherical Coordinates"* from the Wolfram Demonstrations Project (http://demonstrations.wolfram.com).

[3] C. Glosser, *"Vector Field Acting on a Curve"* from the Wolfram Demonstrations Project (http://demonstrations.wolfram.com/ VectorFieldActingOnACurve/).

[4] J. Hoste. *Mathematica DeMYSTiFied*. McGraw-Hill, 2008.

[5] R. Larson y R. Hostetler. *Cálculo y Geometría Analítica*. McGraw-Hill, 1989.

[6] K. Jänich. *Vector Analysis*. Springer-Verlag, 2001.

[7] S. Mangano. *Mathematica Cookbook*. O'Reilly Media, 2010.

[8] J. E. Marsden y A. J. Tromba. *Cálculo Vectorial*. Addinson-Wesley Iberoamericana, 1991.

[9] J. Marsden y A. Weinstein. *Calculus*. Springer-Verlag, 1985.

[10] F. Mohamed, *"Exploring Spherical Coordinates"* and *"Exploring Cylindrical Coordinates"* from the Wolfram Demonstrations Project (http://demonstrations.wolfram.com).

[11] J. R. Munkres. *Analysis on Manifolds*. Addinson-Wesley, USA, 1991.

[12] J.L. Romero, F. Benítez, C. Muriel, *"Análisis Vectorial"*. Dpto de Matemáticas. Universidad de Cádiz. 2004.

[13] J.L. Romero, F. Benítez, C. Muriel, *"Problemas Resueltos de Análisis Vectorial"*. Dpto de Matemáticas. Universidad de Cádiz. 2004.

[14] E. Schulz, *"Visualizing the Gradient Vector"* from the Wolfram Demonstrations Project (http://demonstrations.wolfram.com).

[15] M. Spivak, *Cálculo en Variedades*. Reverté, 1970.

[16] J. Vidal y otros, *"Aplicaciones físico-matemáticas para la ensenanza de Análisis Vectorial en alumnos del primer curso de grados de Ciencias e Ingenierías"*. Noveno Simposio Iberoamericano en Educación, Cibernética e Informática: SIECI 2012.

[17] S. Wagon. *Mathematica in Action: Problem Solving Through Visualization and Computation*. Springer, 2010.