

SEMINARIO: El problema de la medida en la asignatura *Teoría del Buque*

Juan Vidal, Concepción MURIEL, José Juan ALONSO, Melquiades CASAS, Verónica RODRÍQUEZ, Adrián RUÍZ

Universidad de Cádiz,

11510 Puerto Real, Cádiz, España

28 de julio de 2014

Palabras clave: Elemento de volumen, medida, integración

RESUMEN

Presentamos el resumen de uno de los seminarios llevados a cabo durante la realización del Proyecto de Innovación y Mejora Docente PI-14-079: *Taller integrado de física-matemática con aplicaciones a la Ingeniería Naval y Oceánica*. Durante el transcurso del mismo se trató el problema de la medida en problemas de la asignatura *Teoría del Buque* del grado en *Ingeniería Naval y Oceánica*, utilizando un único procedimiento matemático que se aplica a la determinación de volúmenes de carena, las áreas de cuadernas o las superficies de flotación de un barco.

1. INTRODUCCIÓN

El concepto y el cálculo de medidas (longitudes, áreas y volúmenes) es un problema matemático básico y omnipresente en la asignatura *Teoría del Buque* del grado de *Ingeniería Naval y Oceánica*. Piénsese, por ejemplo, en problemas tales como determinar el volumen de carena, las áreas de cuadernas o las superficies de flotación de un barco.

En el primer curso el alumno del grado en *Ingeniería Naval y Oceánica* ha cursado asignaturas de Matemáticas en las que se tratan los temas de integración de funciones escalares de una, dos y tres variables y aprende a calcular integrales de Riemman, a usar la regla de Barrow para calcular integrales definidas y el teorema de Fubini para calcular integrales dobles y triples. Estas técnicas únicamente resuelven problemas de cálculo de áreas de recintos en el plano y de volúmenes de sólidos en el espacio. Para poder calcular la longitud de una curva, en el plano o en el espacio, o el área de una superficie en un espacio tridimensional, se requieren otras técnicas y conceptos propios del Análisis Vectorial. Usualmente el alumno de Ingeniería aprende una serie de fórmulas, aparentemente no relacionadas entre sí, para resolver cada caso particular o recurre a métodos numéricos cuando se encuentra con este tipo de problemas.

Por otro lado, un alumno del grado en *Matemáticas* trata el problema de la medida de forma gradual en asignaturas diferentes de primer, segundo y tercer curso (*Cálculo Infinitesimal*, *Integración y Análisis Vectorial*, *Métodos numéricos I y II*), lo que permite que el

problema sea tratado con una profundidad y un grado de generalización que es imposible de alcanzar en el tiempo del que dispone un alumno de Ingeniería. Por el contrario, en las citadas asignaturas usualmente no se tratan con suficiente dedicación las aplicaciones prácticas, por lo que pueden no adquirir competencias suficientes para adaptarse a la nomenclatura y a las técnicas propias de la Ingeniería con facilidad.

Uno de los objetivos del trabajo llevado a cabo durante el desarrollo del proyecto de Proyecto de Innovación y Mejora Docente PI-14-079: *Taller integrado de física-matemática con aplicaciones a la ingeniería naval y oceánica* es realizar, de forma experimental, seminarios para que alumnos de ambas titulaciones interactúen y se complementen para superar posibles carencias en sus respectivas formaciones. A continuación incluimos un resumen de uno de los seminarios en los que se abordó el problema de la medida con una definición única, válida para todos los problemas que aparecen en *Teoría del Buque*.

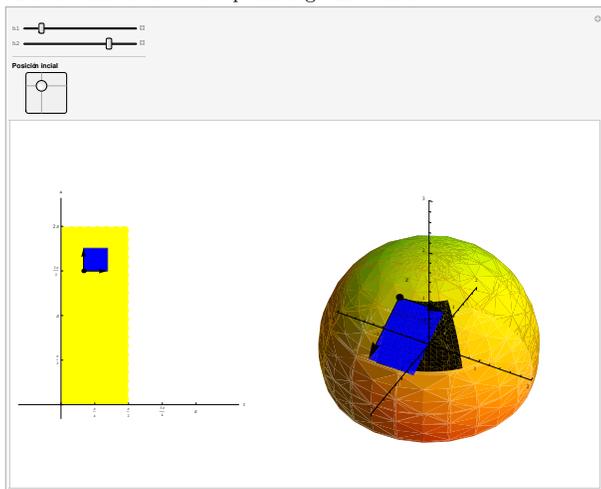
2. EL ELEMENTO DE VOLUMEN

Un concepto matemático básico en el Análisis Vectorial es elemento de volumen. Se refiere siempre a una parametrización de una variedad y es un concepto local. De forma intuitiva, parametrizar un recinto S es describirlo por medio de cierta aplicación diferenciable $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ en la forma $S = \phi(V)$, donde V es un abierto de \mathbb{R}^k . El número n indica el espacio en el que se encuentra el cuerpo, por ejemplo, en un plano si $n = 2$ o el espacio tridimensional si $n = 3$. El número k indica la dimensión de la variedad; por ejemplo, si $k = 1$ nuestro objeto es una curva, si $k = 2$ es una superficie y si $k = 3$ se trataría de un cuerpo sólido. Muchas veces no es posible describir un recinto S en la forma $S = \phi(V)$, pero siempre se puede hacer localmente, en el sentido de que S se puede “parhear” y cada parche, $S \cap U$, donde U es un abierto de \mathbb{R}^n , sí se puede expresar en la forma $S \cap U = \phi(V)$.

Se pretende trasladar a S el conocimiento del cálculo de medidas de recintos sencillos, como puede ser un rectángulo, o en general un paralelepípedo generado por k vectores; estas medidas pueden ser fácilmente determinadas por medio de determinantes. Para este traslado se utiliza la aplicación diferencial, denotada en este trabajo por $D\phi(t) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$. Por la propia naturaleza de la aplicación diferencial, tiene sentido

aproximar la medida del volumen de un paralelepípedo en \mathbb{R}^k generado por k vectores h_1, \dots, h_k , por la medida del paralelepípedo, en \mathbb{R}^n , generado por sus imágenes $D\phi(t)(h_1), \dots, D\phi(t)(h_k)$. Matemáticamente se demuestra que hay una relación de proporcionalidad entre las medidas de ambos paralelepípedos y ese factor de proporcionalidad es el elemento de volumen, que denotamos por $D_\phi(t)$.

Figura 1: El elemento de volumen es un factor de proporcionalidad entre las medidas de los paralelogramos azules



Existen formas equivalentes de calcularlo, por ejemplo, una de ellas nos dice que es la raíz cuadrada del determinante de la matriz formada por los productos escalares de los vectores columna de matriz jacobiana $[D\phi(t)]$. Este concepto es dependiente de la parametrización elegida. Dos parametrizaciones distintas dan lugar a elementos de volumen diferentes. Sin embargo, hay una importante relación entre ellos: cuando se expresan en el mismo sistema de parámetros, son proporcionales, y su factor de proporcionalidad es el valor absoluto del jacobiano del cambio de variables que pasa de una parametrización a otra.

Este concepto ha sido establecido para variedades de cualquier dimensión en cualquier espacio. En particular, si $k = 1$ y $n = 2$ (resp. $n = 3$) estaremos trabajando con curvas o trozos de curvas en el plano (resp. en el espacio). Dado que $[D\phi(t)]$ es una matriz columna formada por el vector tangente a la curva, se deduce fácilmente que el elemento de volumen coincide con el módulo del vector tangente a la curva calculado con esa parametrización. En el caso de superficies en el espacio ($k = 2$ y $n = 3$) el elemento de volumen es también el módulo de un vector, pero en este caso, de un vector normal a la superficie. Es el módulo del producto vectorial de los dos vectores columna de la matriz $[D\phi(t)]$ y que, naturalmente, son tangentes a la variedad.

Es un bonito ejemplo que ilustra cómo la unificación y la generalización de un concepto matemático explica por qué en ocasiones hay que considerar vectores tangentes y en otro, vectores normales. Este tipo de situaciones son las que provocan desconcierto y dificultad de comprensión en los alumnos que se limitan a aprender fórmulas para hacer cálculos, sin entender el motivo, lo que provoca que las olviden con facilidad.

6. LA MEDIDA LOCAL EN VARIEDADES

El concepto de medida (local) en una variedad está basado en el elemento de volumen $D_\phi(t)$. Si $S = \phi(V)$ la medida de S se define como

$$\sigma(S) = \int_V D_\phi(t) dt, \quad (1)$$

donde $t \in \mathbb{R}^k$. Análogamente, si $A \subset S$, $\sigma(A) = \int_{\phi^{-1}(A)} D_\phi(t) dt$. Naturalmente, para que esta definición tenga sentido, es necesario probar que σ_S no depende de la parametrización elegida. Esto es así por la relación entre los elementos de volumen de dos parametrizaciones descrita en la sección anterior y por el teorema del cambio de variables en una integral múltiple.

En Matemáticas las definiciones no deben ser demostradas, pero sí deben ser convenientemente motivadas. Es importante que el alumno entienda por qué se define así una medida. Esta suele ser una de las tareas más difíciles en la enseñanza de contenidos físico-matemáticos: acercar la abstracción a la intuición y al entendimiento. En este contexto, nuestra opinión es que las herramientas multimedia son de gran utilidad. Como ejemplo, la rutina creada con el software de cálculo simbólico Mathematica (ver Figura 1) permite manipular las longitudes de los vectores que generan el rectángulo azul de la gráfica de la izquierda. Al mismo tiempo, la rutina recalcula los vectores del espacio tangente a la variedad que generan el paralelogramo azul de la figura que aparece en la derecha. Se ha dibujado, en negro, la *sombra* (matemáticamente, la proyección) de ese paralelogramo sobre la variedad. Cuando se consideran vectores de módulo cada vez más pequeño, se observa una mejor aproximación entre el paralelogramo azul (en el espacio tangente) y su sombra (en la variedad). Este proceso de *paso al límite* es el que conduce a la fórmula (1).

La fórmula (1) es la única que el alumno debe manejar para calcular la medida de cualquier recinto, una vez que ha sido parametrizado. Cuando se aplica a variedades de dimensiones $k = 2$ en \mathbb{R}^2 y $k = 3$ en \mathbb{R}^3 recupera los métodos tradicionales de cálculo de áreas y de volúmenes mediante integración doble y triple, respectivamente. Pero es mucho más general, pues calcula la longitud de una curva (en \mathbb{R}^2 o en \mathbb{R}^3) como la integral de la norma del vector tangente o el área de una superficie en el espacio como la integral de la norma del vector normal a la superficie. Cuando se aplican a cada caso particular, parece que son métodos distintos y no relacionados entre sí, pero en realidad sólo hay una forma de calcular medidas que requiere únicamente saber parametrizar y saber calcular elementos de volumen.

Una ventaja adicional de este esfuerzo de generalización y abstracción es evidente a la hora de programar rutinas para automatizar el cálculo de medidas y para visualizar recintos que mejoran nuestra experiencia docente. El código empleado en la rutina interactiva mostrada en la Figura 1 es fácilmente adaptable a cualquier recinto, de cualquier dimensión, en el plano o en el espacio.

6. UN EJEMPLO DE APLICACIÓN

En esta sección presentamos la resolución de un problema de aplicación, propio de la asignatura *Teoría del Buque*, para aplicar e ilustrar las ideas desarrolladas en secciones anteriores

Problema: *Un submarino tiene forma de elipsoide, de eslora 50 metros, puntal, 20 metros y manga 25 metros. Calcula el peso máximo que puede alcanzar, teniendo en cuenta que debe poder flotar con un calado igual o menor que la mitad de su puntal.*

Para resolver este problema el alumno se comienza calculando el volumen total del submarino. Para ello, deberá parametrizar este sólido, y por la geometría del recinto el uso de coordenadas esféricas adaptadas es el idóneo para tratar este problema. Con la ayuda de Mathematica y usando la instrucción ParametricPlot3D, podrá comprobar si la parametrización construida es válida al recinto del enunciado.

A continuación, necesitará calcular el correspondiente elemento de volumen asociado a la parametrización elegida. Si dos alumnos han elegido parametrizaciones diferentes, es un buen momento para ilustrar y comprobar en la práctica la dependencia del elemento de volumen de las parametrizaciones elegidas y la relación existente entre ellos. Finalmente tendrá que resolver la integral correspondiente a (1), que en este caso es una integral triple.

Una vez calculado el volumen, utilizarán la relación entre el desplazamiento, la mitad de su volumen y la densidad del agua de mar para obtener el desplazamiento del submarino cuando flota. Para que el submarino se encuentre en inmersión, debe aumentar su desplazamiento hasta igualarlo a la volumen total por la densidad. La diferencia de peso con el caso anterior nos da el peso de lastre (agua de mar) que debe introducir para poder sumergirse completamente.

7. REFLEXIONES FINALES

El problema planteado en este seminario es sólo uno de los muchos ejemplos que ilustran la potencia de una interacción entre contenidos propios de distintas disciplinas y la cooperación entre profesores de distintas ramas del conocimiento. Otros problemas similares pueden ser tratados siguiendo un planteamiento análogo. Por ejemplo, conceptos físicos como centro de gravedad, momento de inercia, trabajo, etc., que el alumno de Ingeniería estudia como fórmulas independientes, son todos consecuencia de un procedimiento matemático común. Son integrales de funciones escalares (para centros de gravedad o momentos de inercia) o vectoriales (en el caso de trabajo). De nuevo, el único aprendizaje que requiere su cálculo es saber parametrizar y determinar elementos de volumen, que han sido el objeto de este seminario.

De esta forma, el alumno de Ingeniería podrá disponer de una herramienta matemática muy potente que le permitirá resolver problemas de muy distinta índole: cálculo la estabilidad dinámica, cálculo de desplazamiento

de un buque, cálculo del radio metacéntrico, cálculo de superficies de flotación, cálculo de superficies mojadas, áreas transversales, volúmenes de carena, etc.

Las ideas teóricas, la metodología y el uso de rutinas interactivas presentados en este seminario podrían resultar de gran utilidad para la enseñanza de estrategias matemáticas necesarias para la resolución de problemas prácticos que aparecen en la asignatura *Teoría del Buque* del grado en *Ingeniería Naval y Oceánica*. De esta forma, se podría diseñar un curso más innovador con respecto a la enseñanza tradicional. En lugar de memorizar métodos de resolución muy diferentes entre sí, se transmite un procedimiento unificado y válido para más situaciones. Además, con la ayuda de las aplicaciones dinámicas e interactivas, como la que presentamos en este trabajo, se facilita comprensión de conocimientos matemáticos previos, avanzados y a menudo abstractos, que podrían superar la formación y el interés de alumnos o investigadores en ciencias aplicadas.

REFERENCIAS

- [1] M.L. Abell, J.P. Braselton. *Mathematica by example*. Academic Press, 2008.
- [2] J. Hoste. *Mathematica DeMYSTiFied*. McGraw-Hill, 2008.
- [3] R. Larson y R. Hostetler. *Cálculo y Geometría Analítica*. McGraw-Hill, 1989.
- [4] K. Jänich. *Vector Analysis*. Springer-Verlag, 2001.
- [5] S. Mangano. *Mathematica Cookbook*. O'Reilly Media, 2010.
- [6] J. E. Marsden y A. J. Tromba. *Cálculo Vectorial*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1991.
- [7] J. Marsden y A. Weinstein. *Calculus*. Springer-Verlag, 1985.
- [8] J. R. Munkres. *Analysis on Manifolds*. Addison-Wesley, USA, 1991.
- [9] J.L. Romero, F. Benítez, C. Muriel, "Análisis Vectorial". Dpto de Matemáticas. Universidad de Cádiz. 2004.
- [10] J.L. Romero, F. Benítez, C. Muriel, "Problemas Resueltos de Análisis Vectorial". Dpto de Matemáticas. Universidad de Cádiz. 2004.
- [11] M. Spivak, *Cálculo en Variedades*. Reverté, 1970.
- [12] J. Vidal y otros, "Aplicaciones físico-matemáticas para la enseñanza de Análisis Vectorial en alumnos del primer curso de grados de Ciencias e Ingenierías". Noveno Simposio Iberoamericano en Educación, Cibernética e Informática: SIECI 2012.
- [13] S. Wagon. *Mathematica in Action: Problem Solving Through Visualization and Computation*. Springer, 2010.